Математические заметки

том 68 выпуск 3 сентябрь 2000

УДК 517

О C^*-АЛГЕБРАХ, СВЯЗАННЫХ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ГОМОМОРФИЗМАМИ

В. М. Мануйлов

В статье изучаются C^*-алгебры, связанные с асимптотическими гомоморфизмами Мищенко. В частности, показано, что их различные версии слабо гомотопически эквивалентны, но не изоморфны. Приведены также непрерывные версии этих алгебр.

Библиография: 5 названий.

Введение. Пусть M_k, $k \in \mathbb{N}$, – C^*-алгебра матриц размерности k. Для единообразия мы будем обозначать через M_∞ C^*-алгебру K компактных операторов сепарабельного гильбертова пространства. Пусть $\nu = \{\nu(1), \nu(2), \dots\}$ – функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, т.е. ν – последовательность, элементы $\nu(i)$, $i \in \mathbb{N}$, которой являются либо натуральными числами, либо бесконечны. В этой статье мы будем рассматривать только монотонно неубывающие последовательности $\nu = \{\nu(i)\}$, которые либо стабилизируются (существует $\lim_{i\to\infty} \nu(i)$), либо стремятся к бесконечности при $i \to \infty$.

Рассмотрим C^*-факторалгебру

$$\prod_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)} \Big/ \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)},$$

которая является C^*-алгеброй, обслуживающей дискретные асимптотические гомоморфизмы [1], [2], т.е. любой дисктерный асимптотический гомоморфизм из C^*-алгебры A в матричные алгебры или в алгебру компактных операторов дает настоящий $*$-гомоморфизм из A в эту алгебру. В [3] Мищенко предложил рассмотреть другую версию дискретных асимптотических гомоморфизмов, именно, добавив следующее требование: если последовательность отображений $\varphi_i \colon A \to B$, $i \in \mathbb{N}$, задает дискретный асимптотический гомоморфизм, она должна дополнительно удовлетворять равенству

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_{i+1}(a) - \varphi_i(a)\| = 0$$

для каждого $a \in A$. Соответствующие C^*-алгебры были построены в [4] следующим образом. Поскольку последовательность ν неубывающая, существует естественное включение $M_{\nu(i)} \subset M_{\nu(i+1)}$, значит правый сдвиг

$$\alpha \colon (m_1, m_2, \dots) \mapsto (0, m_1, m_2, \dots), \tag{1}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01201, и INTAS, грант № 96-1099.

где $m = (m_1, m_2, \dots) \in \prod_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)}$, корректно определен не только в алгебре $\prod_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)}$, но и в факторалгебре $\prod_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)} / \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)}$. Отображение α является эндоморфизмом этих C^*-алгебр, и, как легко видеть, α-инвариантное подмножество в C^*-алгебре $\prod_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)} / \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{\nu(i)}$ также является C^*-алгеброй. Эту α-инвариантную C^*-алгебру мы обозначаем $Q(\nu)$.

Если последовательность ν стабилизируется,

$$\lim_{i\to\infty} \nu(i) = n, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

мы обозначаем такую последовательность через $\mathbf{n}$ (или $\boldsymbol{\infty}$, если $n = \infty$). В этом случае мы пишем $Q(\mathbf{n})$ вместо $Q(\nu)$. C^*-алгебра $Q(\nu)$ может быть описана как множество $B(\nu)$ всех последовательностей $(m_1, m_2, \dots)$ матриц $m_i \in M_{\nu(i)}$ таких, что

$$\lim_{i\to\infty} \|m_{i+1} - m_i\| = 0$$

по модулю последовательностей, сходящихся к нулю. Множество $B(\nu)$, очевидно, является C^*-алгеброй, поэтому $Q(\nu)$ есть факторалгебра алгебры $B(\nu)$ по идеалу $I(\nu)$ последовательностей, сходящихся к нулю. Отметим, что идеал $I(\nu)$ является существенным в $B(\nu)$, т.е. алгебра $B(\nu)$ лежит в алгебре мультипликаторов $M(I(\nu))$.

Хотя C^*-алгебра $Q(\nu)$ состоит только из α-инвариантных элементов алгебры $\prod_i M_{\nu(i)} / \bigoplus_i M_{\nu(i)}$, не следует думать, что $Q(\nu)$ меньше, чем последняя алгебра. Рассмотрим, например, алгебру $Q(\boldsymbol{\infty})$. Пусть $r = r(n)$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \bigl(r(i+1) - r(i)\bigr) = \infty. \tag{2}$$

Тогда легко видеть, что последовательности $(m_1, m_2, \dots)$, в которых $m_{r(i)} = 0$, $i \in \mathbb{N}$, составляют идеал I_r в $Q(\boldsymbol{\infty})$ и соответствующую C^*-факторалгебру $Q(\boldsymbol{\infty})/I_r$ можно отобразить в $\prod_i M_\infty / \bigoplus_i M_\infty$ по формуле

$$(m_1, m_2, \dots) \mapsto (m_{r(1)}, m_{r(2)}, \dots).$$

Учитывая (2), с помощью линейной интерполяции можно поднять любой элемент алгебры $\prod_i M_\infty / \bigoplus_i M_\infty$, значит, указанное отображение эпиморфно.

Отметим, что C^*-алгебра $Q(\mathbf{1})$ коммутативна и ее спектр – корона Хигсона – является факторпространством Стоун–Чеховской короны $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ по стандартному действию группы $\mathbb{Z}$. Легко видеть, что C^*-алгебра $Q(\nu)$ унитальна тогда и только тогда, когда $\nu = \mathbf{n}$ для некоторого конечного n. В этом случае $Q(\mathbf{n}) = Q(\mathbf{1}) \otimes M_n$. В противном случае $Q(\nu)$ содержит тензорное произведение $Q(\mathbf{1}) \otimes M_\infty$ в качестве собственной подалгебры. Действительно, поднятие $Q(\mathbf{1}) \otimes M_\infty$ в $B(\nu)$ состоит из равномерно компактных последовательностей $m = (m_1, m_2, \dots) \in B(\nu)$, т.е. таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер j такой, что

$$\|(m_1, m_2, \dots) - (p_j m_1 p_j, p_j m_2 p_j, \dots)\| < \varepsilon,$$

где $p_j \in M_\infty$ обозначает проектор на первые j координат. Для любой ν, стремящейся к бесконечности, легко найти элемент алгебры $B(\nu)$, не являющийся равномерно убывающим. Для этого рассмотрим последовательность $\{n_i\}$, удовлетворяющую

$$\lim_{i\to\infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty,$$

и ненулевой элемент $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in B(\mathbf{1})$ такой, что $\lambda_{n_i} = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\chi_{[n_i, n_{i+1}]}$ – характеристическая функция множества $[n_i, n_{i+1}] \subset \mathbb{N}$. Пусть $\{k_i\}$ – другая последовательность, стремящаяся к бесконечности, а $e_i \in M_\infty$ – проектор на i-ю координату. Тогда элемент $\bigoplus_i \chi_{[n_i, n_{i+1}]} \lambda e_{k_i}$ не принадлежит $B(\mathbf{1}) \otimes M_\infty$.

1. Слабая гомотопическая эквивалентность алгебр $Q(\nu)$. Поскольку C^*-алгебры $Q(\nu)$ являются факторалгебрами по существенному идеалу, для них естественно рассматривать более слабое определение гомотопности, такое же как гомотопность $*$-гомоморфизмов в алгебры короны. Напомним, что функция $g = g(t)\colon [0,1] \to B(\nu)$ называется *непрерывной в строгой топологии* [5], если функции $g(t)k(t)$ и $k(t)g(t)$ непрерывны в $C([0,1], I(\nu))$ для любой непрерывной функции $k = k(t) \in C([0,1], I(\nu))$. C^*-алгебру всех непрерывных в строгой топологии функций мы обозначаем $C_{\mathrm{str}}([0,1], B(\nu))$. Гомоморфизмы факторизации $C_{\mathrm{str}}([0,1], B(\nu)) \to C_{\mathrm{str}}([0,1], B(\nu))/C([0,1], I(\nu))$ и $B(\nu) \to Q(\nu)$ мы обозначаем через q.

Пусть $f_0, f_1\colon A \to Q(\nu)$ – два $*$-гомоморфизма. Они называются *гомотопными* (как отображения в факторалгебру), если существует семейство отображений (не обязательно являющихся $*$-гомоморфизмами) $F_t\colon A \to B(\nu)$ такое, что $F_t(a)$ непрерывно в строгой топологии для каждого $a \in A$, композиция $q \circ F_t\colon A \to C([0,1], Q(\nu))$ является $*$-гомоморфизмом и $q \circ F_i$ совпадает с f_i, $i = 0, 1$.

Поскольку мы работаем с несепарабельными C^*-алгебрами, естественно рассматривать еще более слабое определение гомотопической эквивалентности. Пусть A, B – C^*-алгебры. Через $[A, B]$ обозначим множество всех $*$-гомоморфизмов из A в B.

Определение 1. C^*-алгебры A и B называются *слабо гомотопически эквивалентными*, если для любой *сепарабельной* C^*-алгебры C существуют *естественные* (по C) отображения

$$\phi = \phi_C\colon [C, A] \to [C, B] \quad \text{и} \quad \psi = \psi_C\colon [C, B] \to [C, A],$$

переводящие гомотопные $*$-гомоморфизмы в гомотопные и такие, что для каждого $f\colon C \to A$ и каждого $g\colon C \to B$ композиции $(\psi \circ \phi)(f)$ и $(\phi \circ \psi)(g)$ гомотопны f и g соответственно.

Лемма 1. *Если A и B – слабо гомотопически эквивалентные сепарабельные C^*-алгебры, то они гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Положим $f = \phi_A(\mathrm{id}_A)\colon A \to B$ и $g = \psi_B(\mathrm{id}_B)\colon B \to A$. Через f^* обозначим отображение $[B, X] \to [A, X]$, индуцированное $*$-гомоморфизмом f. Тогда $f = f^*(\mathrm{id}_B)$ и из естественности ψ следует, что

$$\psi_A \phi_A(\mathrm{id}_A) = \psi_A f^*(\mathrm{id}_B) = f^* \psi_B(\mathrm{id}_B) = f^* g = g \circ f,$$

поэтому по определению $g \circ f$ гомотопно id_A. Аналогично показывается, что $f \circ g$ гомотопно id_B.

Лемма 2. *Если C^*-алгебры A и B слабо гомотопически эквивалентны, то $K_*(A) \cong K_*(B)$.*

Доказательство. Легко видеть, что слабая гомотопическая эквивалентность алгебр A и B влечет такую же эквивалентность алгебр $M_\infty \otimes A$ и $M_\infty \otimes B$, а группы K_0 и K_1 определяются гомотопическими классами $*$-гомоморфизмов в эти алгебры сепарабельных алгебр $\mathbb{C}$ и $C_0(\mathbb{R})$ соответственно.

K-функтор C^*-алгебр $Q(\nu)$ был вычислен в [4].

Предложение 1 (см. [4]). *Для каждой ν имеем $K_0(Q(\nu)) = \mathbb{Z}$ и $K_1(Q(\nu)) = 0$. Группа $K_0(Q(\nu))$ порождается последовательностью $(e_1, e_1, e_1, \dots)$, где e_1 – проектор на первую координату.*

Предложение 2. *Пусть ν_1 и ν_2 – две стремящиеся к бесконечности последовательности, но $\nu_j \neq \infty$, $j = 1, 2$. Тогда C^*-алгебры $Q(\nu_1)$ и $Q(\nu_2)$ гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Пусть ν_3 – последовательность, мажорирующая как ν_1, так и ν_2. Транзитивность гомотопической эквивалентности позволяет доказывать гомотопическую эквивалентность только для алгебр $Q(\nu_1)$ и $Q(\nu_3)$. Так как $\nu_1(i) \leqslant \nu_3(i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$, существует естественное включение $f \colon Q(\nu_1) \to Q(\nu_3)$. Чтобы определить отображение g в обратном направлении, рассмотрим элемент $m = (m_1, m_2, \dots) \in B(\nu_3)$, определим числа $r = r(i)$ неравенством $\nu_1(i-1) < \nu_3(r) \leqslant \nu_1(i)$ и положим $(g(m))_i = m_r$. Тогда $g(m) \in B(\nu_1)$ и если $m \in I(\nu_3)$, то $g(m) \in I(\nu_1)$, поэтому отображение $g \colon Q(\nu_3) \to Q(\nu_1)$ корректно определено. Тогда композиция $g \circ f \colon Q(\nu_1) \to Q(\nu_1)$ сводится к перенумерации: последовательность $m = (m_1, m_2, \dots)$ $\in B(\nu_1)$ отображается в последовательность

$$(\underbrace{m_1, \dots, m_1}_{s_1 \text{ раз}}, \underbrace{m_2, \dots, m_2}_{s_2 \text{ раз}}, \dots). \tag{3}$$

Построим гомотопию $F_t \colon Q(\nu_1) \to C_{\mathrm{str}}([0,1], B(\nu_1))$, соединяющую $g \circ f$ с $\mathrm{id}_{Q(\nu_1)}$. Для каждого $a \in Q(\nu_1)$ выберем представителя $m \in B(\nu_1)$ вида (3). Для $t \in [0, 1/2]$ определим $F_t(a)$ как линейный путь, соединяющий последовательность (3) с последовательностью

$$F_{1/2}(a) = (m_1, \underbrace{m_2, \dots, m_2}_{s_1+s_2-1 \text{ раз}}, \underbrace{m_3, \dots, m_3}_{s_3 \text{ раз}}, \dots). \tag{4}$$

При $t \in [1/2, 3/4]$ соединим последовательность (4) с последовательностью

$$F_{3/4}(a) = (m_1, m_2, \underbrace{m_3, \dots, m_3}_{s_1+s_2+s_3-1 \text{ раз}}, \underbrace{m_4, \dots, m_4}_{s_4 \text{ раз}}, \dots)$$

и т.д. При $t = 1$ определим F_1 равенством $F_1(a) = (m_1, m_2, \dots)$. Легко видеть, что $F_t(a)$ непрерывно в строгой топологии (это достаточно проверять только при $t = 1$), $q \circ F_t(a)$ не зависит от выбора представителя m и $F_t(\,\cdot\,)$ – $*$-гомоморфизм по модулю $C([0,1], I(\nu_1))$, поэтому определяет необходимую гомотопию. Аналогичная гомотопия соединяет $f \circ g$ с $\mathrm{id}_{Q(\nu_3)}$.

Предложение 3. *Пусть A – сепарабельная C^*-алгебра, $f \colon A \to Q(\infty)$ – $*$-гомоморфизм. Тогда существует конечная последовательность ν такая, что $f(A) \subset Q(\nu) \subset Q(\infty)$.*

Доказательство. Зафиксируем плотную последовательность $\{a_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, в A и монотонно стремящуюся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $m^{(i)} = (m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots) \in B(\infty)$ – поднятия для $f(a_i)$. Тогда номера $\nu(n)$ могут быть выбраны, исходя из неравенств

$$\|m_j^{(i)} - p_{\nu(n)} m_j^{(i)} p_{\nu(n)}\| < \varepsilon_n \tag{5}$$

для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где $p_{\nu(n)} \in M_\infty$ – проекторы на первые $\nu(n)$ координат. Из (5) следует, что для каждого i последовательности

$$(m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots) \quad \text{и} \quad (p_{\nu(1)} m_1^{(i)} p_{\nu(1)}, p_{\nu(2)} m_2^{(i)} p_{\nu(2)}, \dots)$$

задают один и тот же элемент в $Q(\infty)$ и вторая из них лежит в $B(\nu)$. Так как $Q(\nu) \subset Q(\infty)$ – C^*-подалгебра, f непрерывно и $f(a_i) \in Q(\nu)$, получаем включение $f(A) \subset Q(\nu)$.

Из предложений 2 и 3 вытекает

Теорема 1. *Если ν стремится к бесконечности, то все C^*-алгебры $Q(\nu)$ слабо гомотопически эквивалентны.*

2. Функции роста и алгебры $Q(\nu)$. Покажем, что C^*-алгебры $Q(\nu)$ могут быть различными при различной скорости роста ν. Последовательность ν имеет полиномиальный рост, если существуют числа $0 < C_1 < C_2$ и $n \geqslant 1$ такие, что

$$C_1 i^n \leqslant \nu(i) \leqslant C_2 i^n, \qquad \lim_i \frac{\nu(i+1) - \nu(i)}{i^n} = 0.$$

Она имеет экспоненциальный рост, если существует такое число $a > 1$, что для всех i выполняется неравенство $\nu(i+1) \geqslant a\nu(i)$.

Теорема 2. *Пусть ν_1 имеет полиномиальный рост, а ν_2 – экспоненциальный.*
1) На C^*-алгебре $Q(\nu_1)$ существует нетривиальный $Q(\mathbf{1})$-значный след.
2) На C^*-алгебре $Q(\nu_2)$ не существует нетривиального следа.

Доказательство. 1) Мы определим след на C^*-алгебре $B(\nu_1)$ и покажем, что он равен нулю на идеале $I(\nu_1)$. Пусть $m = (m_1, m_2, \dots) \in B(\nu_1)$, $m_i \in M_{\nu_1(i)}$. Положим

$$\tau(m) = \left(\frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(1)}(m_1)}{\nu_1(1)}, \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(2)}(m_2)}{\nu_1(2)}, \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(3)}(m_3)}{\nu_1(3)}, \dots \right),$$

где tr_i – стандартный след на M_i с нормировкой $\operatorname{tr}_i(1_i) = i$, где 1_i – единица в M_i. Если $\|m\| = 1$, то $\operatorname{tr}_{\nu_1(i)}(m_i) \leqslant \nu_1(i)$, поэтому $\|\tau(m)\| \leqslant 1$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(i+1)}(m_{i+1})}{\nu_1(i+1)} - \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(i)}(m_i)}{\nu_1(i)} \right\| &\leqslant \left\| \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(i+1)}(m_{i+1}) - \operatorname{tr}_{\nu_1(i)}(m_i)}{\nu_1(i+1)} \right\| + \left\| \frac{\operatorname{tr}_{\nu_1(i)}(m_i)}{\nu_1(i)\nu_1(i+1)} \right\| \\ &\leqslant \|m_{i+1} - m_i\| + \frac{1}{\nu_1(i+1)} \to 0, \end{aligned}$$

поэтому образ τ лежит в $B(\mathbf{1})$. Наконец, свойство $\tau(ab) = \tau(ba)$ для $a, b \in B(\nu_1)$ очевидно. Таким образом, τ является $B(\mathbf{1})$-значным следом на $B(\nu_1)$. Также очевидно, что $\tau(I(\nu_1)) \subset I(\mathbf{1})$, поэтому τ корректно определен на факторалгебре $Q(\nu_1)$. Остается показать нетривиальность τ. Пусть

$$m_i = \operatorname{diag}\left\{ \mathbf{1}, \frac{\nu_1(i) - 1}{\nu_1(i)}, \dots, \frac{1}{\nu_1(i)} \right\}$$

– диагональные матрицы в $M_{\nu_1(i)}$. Тогда

$$\|m_{i+1} - m_i\| = \frac{\nu_1(i+1) - \nu_1(i)}{\nu_1(i+1)} \leqslant \frac{1}{C_1} \frac{\nu_1(i+1) - \nu_1(i)}{i^n} \to 0,$$

поэтому последовательность $m = (m_1, m_2, \dots)$ лежит в $B(\nu_1)$, значит она определяет элемент в $Q(\nu_1)$ и

$$\tau(m) = \left(\frac{\nu_1(1)+1}{2\nu_1(1)}, \dots, \frac{\nu_1(i)+1}{2\nu_1(i)}, \dots\right).$$

Так как

$$\lim_i \frac{\nu_1(i)+1}{2\nu_1(i)} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

след τ нетривиален.

2) Без ограничения общности для удобства обозначений мы можем считать, что $a = 2$ и $\nu_2(i+1) \geqslant 2\nu_2(i)$. Мы предполагаем, что все M_i вложены в C^*-алгебру ограниченных операторов гильбертова пространства H с базисом $\xi_1, \xi_2, \dots$. Пусть u_1, u_2 – изометрии в H такие, что $u_1(\xi_k) = \xi_{2k-1}$, $u_2(\xi_k) = \xi_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $m = (m_1, m_2, \dots) \in B(\nu_2)$. Тогда можно определить элемент $m \oplus m \in B(\nu_2)$ следующим образом. Положим

$$(m \oplus m)_1 = 0, \qquad (m \oplus m)_{i+1} = u_1 m_i u_1^* + u_2 m_i u_2^* \;\; \text{для } i > 1.$$

Тогда $\dim(m \oplus m)_{i+1} = 2\nu_2(i) \leqslant \nu_2(i+1)$ и легко видеть, что $\|(m \oplus m)_{i+1} - (m \oplus m)_i\| \to 0$. Поскольку $\|(m \oplus m)_i\| \to 0$ при $m \in I(\nu_2)$, отображение $m \mapsto (m \oplus m)$ задает гомоморфизм $Q(\nu_2) \to Q(\nu_2)$. Аналогично определяется прямая сумма 4, 8 и т.д. слагаемых.

Предположим, что существует след τ на $Q(\nu_2)$, обладающий свойством $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in Q(\nu_2)$. Тогда τ задает след на $B(\nu_2)$, который мы по-прежнему обозначаем τ. Пусть $m \in B(\nu_2)$ – положительный элемент, $\|m\| = 1$ и $\tau(m) \neq 0$. Имеем $m \oplus m = m^{(1)} + m^{(2)}$, где $m^{(1)} = (0, u_1 m_1 u_1^*, u_1 m_2 u_1^*, u_1 m_3 u_1^*, \dots)$, $m^{(2)} = (0, u_2 m_1 u_2^*, u_2 m_2 u_2^*, u_2 m_3 u_2^*, \dots)$. Так как все m_i положительны и имеют размерность $\nu(i)$, последовательности

$$\begin{aligned} a_j &= (0, u_j (m_1)^{1/2}, u_j (m_2)^{1/2}, u_j (m_3)^{1/2}, \dots), \\ b_j &= (0, (m_1)^{1/2} u_j^*, (m_2)^{1/2} u_j^*, (m_3)^{1/2} u_j^*, \dots), \end{aligned}$$

$j = 1, 2$, корректно определены как элементы алгебры $B(\nu_2)$. Имеем

$$\tau(m^{(j)}) = \tau(a_j b_j) = \tau(b_j a_j) = \tau(\alpha(m)),$$

где α – оператор сдвига (1), поэтому $\tau(m^{(j)}) = \tau(m)$, так как $m = \alpha(m)$ по модулю $I(\nu_2)$. Следовательно, $\tau(m \oplus m) = 2\tau(m)$. Таким же образом можно показать, что для всех k

$$\underbrace{m \oplus m \oplus \dots \oplus m}_{2^k \text{ раз}} \in B(\nu_2)$$

и

$$\tau(\underbrace{m \oplus m \oplus \dots \oplus m}_{2^k \text{ раз}}) = 2^k \tau(m). \tag{6}$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$\|\underbrace{m \oplus m \oplus \dots \oplus m}_{2^k \text{ раз}}\| = \|m\|;$$

следовательно,

$$\tau(\underbrace{m \oplus m \oplus \cdots \oplus m}_{2^k \text{ раз}}) \leqslant 1, \tag{7}$$

и противоречие между (6) и (7) показывает, что $\tau(m) = 0$, что завершает доказательство.

Напомним, что C^*-алгебра A называется *стабильной*, если $A \cong A \otimes M_\infty$.

Следствие 1. *Если ν имеет полиномиальный рост (или более медленный), C^*-алгебра $Q(\nu)$ не является стабильной. Если ν имеет экспоненциальный рост, C^*-алгебра $Q(\nu)$ стабильна.*

Следствие 2. *Пусть ν имеет полиномиальный рост. Пусть τ – след, построенный в теореме* 2, $a \in Q(\mathbf{1}) \otimes M_\infty \subset Q(\nu)$. *Тогда* $\tau(a) = 0$.

Пусть ν имеет полиномиальный рост. Рассмотрим C^*-подалгебру $I_\tau \subset Q(\nu)$, порожденную всеми положительными элементами $a \in Q(\nu)$, для которых $\tau(a) = 0$. Поскольку

$$\tau(ba) = \tau(a^{1/2}ba^{1/2}) \leqslant \|b\|\tau(a) = 0$$

для всех $b \in Q(\nu)$, то I_τ – идеал в $Q(\nu)$. Из леммы 2 и следствия следует, что K-группы I_τ и $Q(\nu)$ изоморфны и вложение $I_\tau \subset Q(\nu)$ индуцирует их изоморфизм. Значит, C^*-факторалгебра $Q(\nu)/I_\tau$ является K-стягиваемой.

3. Непрерывная версия алгебр $Q(\nu)$**.** Пусть $C_b([0,\infty), B)$ (соответственно $C_0([0,\infty), B)$) – C^*-алгебра непрерывных ограниченных (соответственно стремящихся к нулю в бесконечности) функций на полупрямой, принимающих значения в C^*-алгебре B. Факторалгебра $Q_b(B) = C_b([0,\infty), B)/C_0([0,\infty), B)$ обычно используется при описании непрерывных асимптотическмх гомоморфизмов. Однако эта алгебра велика, и часто приходится прибегать к репараметризации для получения слабо изменяющихся функций. Рассмотрим сначала случай $B = M_\infty$. Имеется естественное вложение

$$Q(\infty) \to Q_b(M_\infty), \tag{8}$$

заданное естественным включением $\mathbb{N} \subset [0,\infty)$ и линейной интерполяцией последовательностей компактных операторов до M_∞-значных функций. Это вложение, очевидно, не сюръективно.

Для функции $f(t) \in C_b([0,\infty), M_\infty)$ и для отрезка $[a,b] \subset [0,\infty)$ положим

$$\operatorname{Var}_{a,b} f = \sup_{t_1,t_2 \in [a,b]} \|f(t_2) - f(t_1)\|$$

и рассмотрим в $C_b([0,\infty), M_\infty)$ подмножество функций с затухающей вариацией

$$C_b^{\mathrm{vv}}([0,\infty), M_\infty) = \Bigl\{f(t) \in C_b([0,\infty), M_\infty) : \lim_{t\to\infty} \operatorname{Var}_{a+t,b+t} f = 0\Bigr\}.$$

Это подмножество является C^*-подалгеброй, и не зависит от выбора отрезка $[a,b]$. Обозначим через $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$ факторалгебру $C_b^{\mathrm{vv}}([0,\infty), M_\infty)/C_0([0,\infty), M_\infty)$.

Лемма 3. *C^*-алгебры $Q(\infty)$ и $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$ изоморфны.*

Доказательство. Образ $Q(\infty)$ при $*$-гомоморфизме (8), очевидно, лежит в $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$. Для определения $*$-гомоморфизма в обратном направлении отобразим функцию $f(t) \in C_b^{\mathrm{vv}}([0,\infty), M_\infty)$, представляющую элемент алгебры $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$, в последовательность $\{f(n)\}$ значений этой функции в целых точках. Непосредственно проверяется, что эти $*$-гомоморфизмы взаимно обратны.

Предложение 4. *C^*-алгебры $Q_b(M_\infty)$ и $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$ слабо гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Легко видеть, что для каждого $*$-гомоморфизма сепарабельной C^*-алгебры A в $Q_b(M_\infty)$ можно найти репараметризацию $s = s(t)$ так, что после перехода от t к s образ A лежит в $Q_b^{\mathrm{vv}}(M_\infty)$.

Для определения непрерывной версии для общих ν используется конструкция телескопов. Пусть

$$T(\nu) = \bigl\{f(t) \in C_b([0,\infty), M_\infty) : f(t) \in M_{\nu(i)} \text{ при } t \in [i, i+1)\bigr\}$$

– телескопическая C^*-алгебра. Положим

$$C_0([0,\infty),\nu) = \Bigl\{f(t) \in T(\nu) : \lim_{t\to\infty} \|f(t)\| = 0\Bigr\},$$
$$C_b^{\mathrm{vv}}([0,\infty),\nu) = \Bigl\{f(t) \in T(\nu) : \lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}_{t,t+1} f = 0\Bigr\}.$$

Лемма 4. *C^*-алгебры $Q(\nu)$ и $C_b^{\mathrm{vv}}([0,\infty),\nu)/C_0([0,\infty),\nu)$ изоморфны.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Connes A., Higson N. Deformations, morphismes asymptotiques et K-theorie bivariante // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. 1990. V. 311. P. 101–106.
[2] Loring T. A. Almost multiplicative maps between C^*-algebras // Operator Algebras and Quantum Field Theory: Internat. Press, 1997. P. 111–122.
[3] Mishchenko A. S., Noor Mohammad. Asymptotic representations of discrete groups "Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications" // Mathematics and its Applications. V. 433. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 299–312.
[4] Мануйлов В. М., Мищенко А. С. Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 10. С. 53–72.
[5] Pedersen G. K. C^*-algebras and Their Automorphism Groups. London–New York–San Francisco: Acad. Press, 1979.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: manuilov@mech.math.msu.su

Поступило
07.09.1999