Дискретная математика

том 7 выпуск 4 * 1995

УДК 519.2

Пороговый эффект для систем случайных уравнений специального вида

© 1995 г. В. Ф. Колчин, В. И. Хохлов

Результаты о пороговом эффекте, полученные ранее в [1] для систем случайных линейных уравнений в GF(2), переносятся на простое поле GF(p), $p \geqslant 3$.

Работа выполнена при поддержке первого автора Российским фондом фундаментальных исследований, грант 93–011–1443.

1. Введение

Рассмотрим $T \times N$ матрицу $A = \|a_{tj}\|$ в GF(p), где p — простое число, и обозначим

$$a_t = (a_{t1}, \dots, a_{tN}), \qquad t = 1, \dots, T,$$

ее строки.

Строки с номерами $t_1, \dots, t_m$ с весами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, образуют критический набор $B = \{t_1, \dots, t_m; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$, если сумма

$$\varepsilon_1 a_{t_1} + \dots + \varepsilon_m a_{t_m}$$

есть нулевой вектор; здесь $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ принимают ненулевые значения из GF(p) и операции сложения и умножения проводятся в GF(p).

Для критических наборов определим умножение на ненулевую константу α, полагая для критического набора $B = \{t_1, \dots, t_m; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$

$$\alpha B = \{t_1, \dots, t_m; \alpha\varepsilon_1, \dots, \alpha\varepsilon_m\},$$

и сложение, полагая для критических наборов

$$B_1 = \{t_1^{(1)}, \dots, t_{m_1}^{(1)}; \varepsilon_1^{(1)}, \dots, \varepsilon_{m_1}^{(1)}\}, \qquad B_2 = \{t_1^{(2)}, \dots, t_{m_2}^{(2)}; \varepsilon_1^{(2)}, \dots, \varepsilon_{m_2}^{(2)}\}$$

и ненулевых констант α_1, α_2

$$B = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 = \{t_1, \dots, t_m; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\},$$

где t, $1 \leqslant t \leqslant T$, входит в B с весом $\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_j^{(1)}$, если $t = t_j^{(1)}$ для некоторого j и $t_j^{(1)} \notin \{t_1^{(2)}, \dots, t_{m_2}^{(2)}\}$, строка t входит в B с весом $\varepsilon = \alpha_2 t_k^{(2)}$, если $t = t_k^{(2)}$ для некоторого k и $t_k^{(2)} \notin \{t_1^{(1)}, \dots, t_{m_1}^{(1)}\}$, и t входит в B с весом $\varepsilon = \alpha_1 \varepsilon_j^{(1)} + \alpha_2 \varepsilon_k^{(2)}$, если $t = t_j^{(1)} = t_k^{(2)} \in \{t_1^{(1)}, \dots, t_{m_1}^{(1)}\} \cap \{t_1^{(2)}, \dots, t_{m_2}^{(2)}\}$ и $\alpha_1 \varepsilon_j^{(1)} + \alpha_2 \varepsilon_k^{(2)} \neq 0$; во всех остальных случаях t не входит в $\{t_1, \dots, t_m\}$. Здесь, как и всюду, сложение и умножение весов на константу проводится в $\mathrm{GF}(p)$.

Нетрудно видеть, что αB и $\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ при $B_1 \neq B_2$ являются критическими наборами.

Критические наборы $B_1, \dots, B_s$ называются независимыми, если

$$\alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_s B_s = \varnothing$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Обозначим $s(A)$ максимальное число независимых критических наборов для матрицы A. Нетрудно видеть (см. например, [1, 2]), что ранг $r(A)$ матрицы A и $s(A)$ связаны соотношением

$$r(A) + s(A) = T. \tag{1}$$

Обозначим $S(A)$ общее число критических наборов в матрице A. Ясно, что в $\mathrm{GF}(p)$

$$S(A) = p^{s(A)} - 1.$$

Рассмотрим систему T уравнений в $\mathrm{GF}(p)$ относительно неизвестных $x_1, \dots, x_N$

$$x_{i_1(t)} + \ldots + x_{i_r(t)} = b_t, \qquad t = 1, \dots, T, \tag{2}$$

где $i_1(t), \dots, i_r(t)$, $t = 1, \dots, T$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $1, \dots, N$ с равными вероятностями, а b_t, $t = 1, \dots, T$, — независимые случайные величины, не зависящие от левых частей системы и принимающие значения из $\mathrm{GF}(p)$ с равными вероятностями.

Обозначим A_r матрицу системы (2). В силу (1), если $s(A) \to 0$ по вероятности, то вероятность совместности системы (2) стремится к единице. Если $s(A) \to \infty$ по вероятности, то вероятность совместности системы (2) стремится к нулю.

В этой статье продолжаются исследования, начатые в [1], где рассматривается аналогичная система уравнений в $\mathrm{GF}(2)$. Доказано, что в $\mathrm{GF}(p)$ справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 1 из [1].

Теорема 1. *Пусть $r \geqslant 3$ фиксировано, $N, T \to \infty$ так, что $T/N \to \alpha$. Тогда существует такая постоянная α_r, что $\mathsf{M}S(A_r) \to 0$ при $\alpha < \alpha_r$ и $\mathsf{M}S(A_r) \to \infty$ при $\alpha > \alpha_r$, при этом постоянная α_r равна первой компоненте вектора, являющегося единственным решением системы уравнений*

$$\frac{1}{p} e^{\lambda} \left(1 + (p-1) e^{-p\lambda/(p-1)}\right) \left(\frac{ar}{ar - x}\right)^a e^{-x} = 1,$$

$$\frac{(p-1)(ar - x)}{x} = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^r,$$

$$x = \lambda \frac{1 - e^{-p\lambda/(p-1)}}{1 + (p-1) e^{-p\lambda/(p-1)}},$$

относительно неизвестных a, λ, x.

Численные расчеты дают значения постоянных α_r, представленные в следующей таблице.

r \ p	2	3	5	7	11	13
3	0.889493	0.869163	0.839614	0.817829	0.785881	0.773358
4	0.967148	0.959500	0.947242	0.937362	0.921642	0.9136
5	0.989163	0.986443	0.981848	0.977926	0.971286	0.9647
6	0.996228	0.995257	0.993575	0.992096	0.989498	0.988322
7	0.998650	0.998299	0.997685	0.997139	0.996160	0.995707
8	0.999510	0.999382	0.999158	0.998956	0.998593	0.998424
9	0.999821	0.999774	0.999692	0.999618	0.999484	0.999421
10	0.999934	0.999917	0.999887	0.999859	0.999810	0.999810

2. Связь с задачей о размещении

Общее число критических наборов $S(A_r)$ можно представить в виде суммы индикаторов. Положим $\xi_{t_1,\dots,t_m;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}=1$, если в матрице A_r имеется критический набор $\{t_1,\dots,t_m;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m\}$, и $\xi_{t_1,\dots,t_m;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}=0$ в остальных случаях. Пусть среди $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m$ ровно m_i значений i, $i=1,\dots,p-1$. Ясно, что вероятность $\mathsf{P}\{\xi_{t_1,\dots,t_m;\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m}=1\}$ не зависит от индексов $t_1,\dots,t_m$ и равна вероятности $\mathsf{P}\{\xi_{1,\dots,m;1,\dots,1,\dots,p-1,\dots,p-1}=1\}$, где число значений i в весах критического набора равно m_i, $i=1,\dots,p-1$.

В силу того, что индексы $i_1(t),\dots,i_r(t)$, $t=1,\dots,T$, независимы и принимают значения $1,\dots,N$ с равными вероятностями, можно считать, что коэффициенты при неизвестных в каждом уравнении получаются как результат размещения r частиц по N ячейкам с последующим приведением по модулю p. Поэтому суммы по столбцам элементов любых m строк матрицы A_r до приведения по модулю имеют полиномиальное распределение с rm испытаниями и N равновероятными исходами.

Обозначим $\eta_1(n,N),\dots,\eta_N(n,N)$ заполнения ячеек в равновероятной схеме размещения n частиц по N ячейкам. В этих обозначениях суммы по столбцам любых m строк матрицы A_r до приведения по модулю p имеют распределение, совпадающее с распределением величин $\eta_1(rm,N),\dots,\eta_N(rm,N)$. Поэтому, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}\{\xi_{1,\dots,m;1,\dots,1,\dots,p-1,\dots,p-1}=1\}\\&\quad=\mathsf{P}\{\eta_i^{(1)}(rm_1,N)+2\eta_i^{(2)}(rm_2,N)+\ldots+(p-1)\eta_i^{(p-1)}\in E_0,\ i=1,\dots,N\},\end{aligned}$$

где $E_0=\{0,p,2p,\dots\}$,

$$(\eta_1^{(1)}(rm_1,N),\dots,\eta_N^{(1)}(rm_1,N)),\dots,(\eta_1^{(p-1)}(rm_{p-1},N),\dots,\eta_N^{(p-1)}(rm_{p-1},N))$$

— векторы заполнений ячеек в $p-1$ независимых схемах размещения $rm_1,\dots,rm_{p-1}$ частиц по N ячейкам.

Математическое ожидание числа критических наборов в матрице A_r можно записать в виде

$$\mathsf{M}S(A_r)=\sum_{m=1}^{T}\binom{T}{m}\sum_{m_1+\ldots+m_{p-1}=m}\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N),\qquad(3)$$

где

$$P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)$$
$$=\mathbf{P}\{\eta_i^{(1)}(rm_1,N)+2\eta_i^{(2)}(rm_2,N)+\ldots+(p-1)\eta_i^{(p-1)}(rm_{p-1})\in E_0,\ i=1,\dots,N\}.$$

Таким образом, для оценки $\mathbf{M}S(A_r)$ нужно знать асимптотику вероятности $P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)$. Для ее нахождения используем переход к независимым случайным величинам.

Совместное распределение случайных величин $\eta_1(n,N),\dots,\eta_N(n,N)$ можно следующим образом (см., например, [3]) выразить через условные распределения независимых случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_N$, одинаково распределенных по закону Пуассона с произвольным параметром: для любых целых неотрицательных $n_1,\dots,n_N$ таких, что $n_1+\ldots+n_N=n$,

$$\mathbf{P}\{\eta_1(n,N)=n_1,\dots,\eta_N(n,N)=n_N\}=\mathbf{P}\{\xi_1=n_1,\dots,\xi_N=n_N\mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}.$$

Поэтому, используя независимые случайные величины

$$\xi_1^{(1)},\dots,\xi_N^{(1)},\dots\xi_1^{(p-1)},\dots,\xi_N^{(p-1)},$$

первые N из которых распределены по закону Пуассона с параметром λ_1, и последние N по закону Пуассона с параметром λ_{p-1}, можно записать вероятность $P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)$ в следующем виде:

$$P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)$$
$$=\mathbf{P}\{\eta_i^{(1)}(rm_1,N)+2\eta_i^{(2)}(rm_2,N)+\ldots+(p-1)\eta_i^{(p-1)}(rm_{p-1},N)\in E_0,i=1,\dots,N\}$$
$$=\frac{\mathbf{P}\{\xi_i^{(1)}+\ldots+(p-1)\xi_i^{(p-1)}\in E_0,i=1,\dots,N,\xi_1^{(j)}+\ldots+\xi_N^{(j)}=rm_j,j=1,\dots,p-1\}}{\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}=rm_1\}\ldots\mathbf{P}\{\xi_1^{(p-1)}+\ldots+\xi_N^{(p-1)}=rm_{p-1}\}}$$
$$=(\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}+2\xi_1^{(2)}+\ldots+(p-1)\xi_1^{(p-1)}\in E_0\})^N$$
$$\times\frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(j)}+\ldots+\xi_N^{(j)}=rm_j,j=1,\dots,p-1\mid\xi_i^{(1)}+\ldots+(p-1)\xi_i^{(p-1)}\in E_0,i=1,\dots,N\}}{\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}=rm_1\}\ldots\mathbf{P}\{\xi_1^{(p-1)}+\ldots+\xi_N^{(p-1)}=rm_{p-1}\}}.$$

Введем независимые одинаково распределенные $(p-1)$-мерные случайные векторы

$$(\xi_1^{(1)}(E_0),\dots,\xi_1^{(p-1)}(E_0)),\dots,(\xi_N^{(1)}(E_0),\dots,\xi_N^{(p-1)}(E_0))$$

с распределением

$$\mathbf{P}\{(\xi_1^{(1)}(E_0),\dots,\xi_1^{(p-1)}(E_0))=(k_1,\dots,k_{p-1})\}$$
$$=\mathbf{P}\{(\xi_1^{(1)},\dots,\xi_1^{(p-1)})=(k_1,\dots,k_{p-1})\mid\xi_1^{(1)}+2\xi_1^{(2)}+\ldots+(p-1)\xi_1^{(p-1)}\in E_0\},$$
$$k_1,\dots,k_{p-1}=0,1,\dots\quad(4)$$

Тогда представление для $P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)$ можно переписать в виде

$$P(rm_1,\dots,rm_{p-1},N)=(\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}+2\xi_1^{(2)}+\ldots+(p-1)\xi_1^{(p-1)}\in E_0\})^N$$
$$\times\frac{\mathbf{P}\{(\xi_1^{(1)}(E_0),\dots,\xi_1^{(p-1)}(E_0))+\ldots+(\xi_N^{(1)}(E_0),\dots,\xi_N^{(p-1)}(E_0))=(rm_1,\dots,rm_{p-1})\}}{\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}=rm_1\}\ldots\mathbf{P}\{\xi_1^{(p-1)}+\ldots+\xi_N^{(p-1)}=rm_{p-1}\}}.\quad(5)$$

Далее мы выберем параметры $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ распределения (4) и оценим входящие в выражение (5) вероятности.

В дополнение к $E_0 = \{0, p, 2p, \dots\}$ введем множества

$$E_i = \{i, p+1, \dots\}, \qquad i = 1, \dots, p-1,$$

а также положим

$$P_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) = \mathbf{P}\{\xi_1^{(1)} + 2\xi_1^{(2)} + \dots + (p-1)\xi_1^{(p-1)} \in E_j\}, \qquad j = 0, 1, \dots, p-1,$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_l &= \lambda_1 \sin\frac{2\pi l}{p} + \dots + \lambda_{p-1}\sin\frac{2\pi(p-1)l}{p}, \\ \beta_l &= \lambda_1 \cos\frac{2\pi l}{p} + \dots + \lambda_{p-1}\cos\frac{2\pi(p-1)l}{p}, \quad l = 0, 1, \dots p-1. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$P_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) = \frac{1}{p}\left(1 + e^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}} \sum_{l=1}^{p-1} e^{\beta_l}\cos(\alpha_l - 2\pi j l/p)\right),$$
$$j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (6)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} P_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) &= \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + (p-1)k_{p-1} \in E_j} \frac{\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_{p-1}2^{k_{p-1}}}{k_1!\dots k_{p-1}!} e^{\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}} \\ &= \sum_{k \in E_j}\ \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + (p-1)k_{p-1} = k} \frac{\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_{p-1}^{k_{p-1}}}{k_1!\dots k_{p-1}!} e^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $k \in E_j$

$$\chi_j(k) = \frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1} e^{2\pi i(k-j)l/p} = 1$$

и $\chi(k) = 0$ в остальных случаях. Поэтому

$$\begin{aligned} &P_j(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \\ &= \frac{1}{p}e^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}} \sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + (p-1)k_{p-1} = k}\ \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\lambda_1^{k_1}\dots\lambda_{p-1}^{k_{p-1}}}{k_1!\dots k_{p-1}!} e^{2\pi i(k-j)l/p} \\ &= \frac{1}{p}e^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}} \sum_{l=0}^{p-1}\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k_1}}{k_1!} e^{2\pi i k_1 l/p} \dots \sum_{k_{p-1}=0}^{\infty} \frac{\lambda_{p-1}^{k_{p-1}}}{k_{p-1}!} e^{2\pi i(p-1)k_{p-1}l/p} e^{-2\pi i j l/p} \\ &= \frac{1}{p}e^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_{p-1}} \sum_{l=0}^{p-1} \exp\left\{\lambda_1 e^{2\pi i l/p} + \dots + \lambda_{p-1}e^{2\pi i(p-1)l/p} - 2\pi i j l/p\right\}. \end{aligned}$$

Применяя формулу Эйлера, находим, что

$$\exp\{\lambda_1 e^{2\pi i l/p} + \ldots + \lambda_{p-1} e^{2\pi i(p-1)l/p} - 2\pi i j l/p\} = e^{\beta_l + i(\alpha_l - 2\pi j l/p)}.$$

Учитывая, что

$$\alpha_l - 2\pi j l/p = -(\alpha_{p-l} - 2\pi j(p-l)/p), \qquad l = 1, \ldots p-1,$$

приходим к представлению

$$P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) = \frac{1}{p} e^{-\lambda_1 - \ldots - \lambda_{p-1}} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\beta_l} \cos(\alpha_l - 2\pi j l/p),$$

из которого следует представление, указанное в лемме.

Положим

$$x_1 = \frac{rm_1}{N}, \ldots, x_{p-1} = \frac{rm_{p-1}}{N}$$

и выберем параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ распределения (4) так, что

$$x_1 = \mathsf{M}\xi_1^{(1)}(E_0), \ldots, x_{p-1} = \mathsf{M}\xi_1^{(p-1)}(E_0).$$

Найдем явные выражения для $\mathsf{M}\xi_1^{(j)}(E_0)$, $j = 1, \ldots, p-1$.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\mathsf{M}\xi_1^{(j)}(E_0) = \lambda_j \frac{P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})}{P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})}, \qquad j = 1, \ldots, p-1. \tag{7}$$

Доказательство. Ясно, что для $j = 1, \ldots, p-1$

$$\mathsf{M}\xi_1^{(j)}(E_0) = \sum_{k_j=0}^{\infty} \frac{k_j \mathsf{P}\{\xi_1^{(j)} = k_j, \xi_1^{(1)} + 2\xi_1^{(2)} + \ldots + (p-1)\xi_1^{(p-1)} \in E_0\}}{\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)} + 2\xi_1^{(2)} + \ldots + (p-1)\xi_1^{(p-1)} \in E_0\}}$$
$$= \frac{1}{P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + 2k_2 + \ldots + (p-1)k_{p-1} = k} \frac{k_j \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_{p-1}^{k_{p-1}}}{k_1! \ldots k_{p-1}!} e^{2\pi i k l/p}.$$

Полагая $k + j = s$, $s_j = k_j - 1$, $s_i = k_i$, $i \neq j$, находим, что

$$\mathsf{M}\xi_1^{(j)}(E_0) = \frac{\lambda_j}{P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{s_1 + 2s_2 + \ldots + (p-1)s_{p-1} = s} \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\lambda_1^{s_1} \ldots \lambda_{p-1}^{s_{p-1}}}{s_1! \ldots s_{p-1}!} e^{2\pi(s-j)l/p}$$
$$= \frac{\lambda_j P_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})}{P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})}.$$

3. Оценка среднего числа критических наборов

Перейдем к оценке

$$\mathsf{M}S(A_r)=\sum_{m=1}^{T}\binom{T}{m}\sum_{m_1+\ldots+m_{p-1}=m}\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}P(rm_1,\ldots,rm_{p-1},N). \tag{8}$$

Точно так же, как это сделано в [1], можно оценить хвосты сумм, входящих в (8). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Если $N,T\to\infty$ так, что $T/N\to\alpha$, $0<\alpha<1$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что*

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant\delta T}\binom{T}{m}\sum_{m_1+\ldots+m_{p-1}=m}\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}P(rm_1,\ldots,rm_{p-1},N)\leqslant\varepsilon,$$

$$\sum_{(1-\delta)T\leqslant m\leqslant T}\binom{T}{m}\sum_{m_1+\ldots+m_{p-1}=m}\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}P(rm_1,\ldots,rm_{p-1},N)\leqslant\varepsilon,$$

и для всех $j=1,\ldots,p-1$

$$\sum_{m=1}^{T}\binom{T}{m}\sum_{m_j\leqslant\delta m}\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}P(rm_1,\ldots,rm_{p-1},N)\leqslant\varepsilon.$$

Оценим теперь среднюю часть суммы (8). Пусть $x=x_1+\ldots+x_{p-1}$, тогда

$$x=\frac{rm}{N}.$$

Обозначим $a=T/N$. Тогда, как нетрудно видеть, при $T\to\infty$ равномерно относительно m, $\delta\leqslant m/T\leqslant1-\delta$,

$$\binom{T}{m}=\frac{ar}{\sqrt{2\pi x(ar-x)aN}}\left(\frac{(ar)^{ar}(ar-x)^x}{x^x(ar-x)^{ar}}\right)^{N/r}(1+o(1)). \tag{9}$$

Учитывая, что

$$\frac{m_1}{m}=\frac{x_1}{x},\ldots,\frac{m_{p-1}}{m}=\frac{x_{p-1}}{x},$$

находим, что при $m\to\infty$ равномерно относительно $\delta\leqslant x_1/x,\ldots,x_{p-1}/x\leqslant1-\delta$

$$\frac{m!}{m_1!\ldots m_{p-1}!}=\frac{x}{\sqrt{2\pi x_1\ldots x_{p-1}N}}\frac{x^m}{x_1^{m_1}\ldots x_{p-1}^{m_{p-1}}}(1+o(1))$$

$$=\frac{\sqrt{rx}}{\sqrt{2\pi x_1\ldots x_{p-1}N}}\frac{x^{xN/r}}{x_1^{x_1N/r}\ldots x_{p-1}^{x_{p-1}N/r}}(1+o(1)). \tag{10}$$

Вероятности, стоящие в знаменателе выражения (5), оцениваются достаточно просто. Например,

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}=rm_1\}=\frac{\lambda_1^{rm_1}}{(rm_1)!}e^{-\lambda_1N}$$

$$=\left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^{x_1N}e^{-\lambda_1N+x_1N}\frac{1}{\sqrt{2\pi x_1N}}(1+o(1)).$$

Поэтому произведение этих вероятностей в знаменателе (5) имеет следующее асимптотическое выражение:

$$\mathsf{P}\{\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}=rm_1\}\ldots\mathsf{P}\{\xi_1^{(p-1)}+\ldots+\xi_N^{(p-1)}=rm_{p-1}\}$$
$$=\left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^{x_1N}\ldots\left(\frac{\lambda_{p-1}}{x_{p-1}}\right)^{x_{p-1}N}e^{-(\lambda_1+\ldots+\lambda_{p-1})N+xN}\frac{1+o(1)}{(2\pi N)^{(p-1)/2}\sqrt{x_1\ldots x_{p-1}}}. \quad (11)$$

Оценим вероятность

$$\mathsf{P}\{(\xi_1^{(1)}(E_0),\ldots,\xi_1^{(p-1)}(E_0)+\ldots+(\xi_N^{(1)}(E_0),\ldots,\xi_N^{(p-1)}(E_0))$$
$$=(rm_1,\ldots,rm_{p-1})\}, \quad (12)$$

стоящую в числителе выражения (5). Ясно, что для входящей в нее суммы векторов справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению. В силу выбора параметров $x_1,\ldots,x_{p-1}$ вероятность (12) имеет асимптотику $c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})/N^{(p-1)/2}$, где $c(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})$ — некоторая непрерывная функция, не имеющая нулей при $\delta\leqslant x_1/x,\ldots,x_{p-1}/x\leqslant 1-\delta$.

Таким образом, собирая оценки (9), (10), (11) и (12), находим, что слагаемое средней части суммы имеет асимптотику

$$(P_0(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}))^N\left(\frac{(ar)^{ar}(ar-x)^x}{x^x(ar-x)^{ar}}\right)^{N/r}\left(\frac{x^x}{x_1^{x_1}\ldots x_{p-1}^{x_{p-1}}}\right)^{N/r}$$
$$\times\left(\frac{x_1}{\lambda_1}\right)^{x_1N}\ldots\left(\frac{x_{p-1}}{\lambda_{p-1}}\right)^{x_2N}e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_{p-1})N-xN}\frac{c(a,r,x_1,\ldots,x_{p-1})}{N^{(p-1)/2}}(1+o(1)),$$

где $c(a,r,x_1,\ldots,x_{p-1})$ — некоторая непрерывная функция, не обращающаяся в нуль в области суммирования.

При фиксированном x множитель в этом выражении, стоящий в степени N и зависящий от $x_1,\ldots,x_{p-1}$, равен

$$\varphi(x_1,\ldots,x_{p-1})=e^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{p-1}}P_0(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1})\frac{x_1^{x_1(1-1/r)}\ldots x_{p-1}^{x_{p-1}(1-1/r)}}{\lambda_1^{x_1}\ldots\lambda_{p-1}^{x_{p-1}}}. \quad (13)$$

Лемма 4. *При фиксированном $x=x_1+\ldots+x_{p-1}$ единственный максимум функции (13) достигается в точке $x_1=\ldots=x_{p-1}=x/(p-1)$.*

Доказательство. Рассуждая так же, как в [1], заключаем, что в точке экстремума этой функции частные производные по x_j, $j=1,\ldots,p-2$, обращаются в нуль. Действительно, можно дать приращение переменной x_j, а поскольку значение правой части не зависит от выбора параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}$, им можно сохранить прежние значения, при этом в точке экстремума приращение функции должно обращаться в нуль.

Переходя к логарифму функции $\varphi(x_1,\ldots,x_{p-1})$ и дифференцируя, для точки экстремума при фиксированном x получаем уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\varphi(x_1,\ldots,x_{p-1})=\left(1-\frac{1}{r}\right)\ln\frac{x_j}{x_{p-1}}-\ln\frac{\lambda_j}{\lambda_{p-1}}=0, \qquad j=1,\ldots,p-2.$$

которые равносильны уравнениям

$$\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r} = \ldots = \frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r}, \qquad j = 1, \ldots, p-2. \tag{14}$$

Перепишем функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_{p-1})$ в виде

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, \ldots, x_{p-1}) &= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1}} P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \left(\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r}\right)^{x_1/r} \cdots \left(\frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r}\right)^{x_2/r} \\
&= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1}} P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \left(\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r} + \ldots + \frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r}\right)^{x/r} \\
&\times \left(\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r (x_1^{r-1}/\lambda_1^r + \ldots + x_{p-1}^{r-1}/\lambda_{p-1}^r)}\right)^{x_1/r} \cdots \\
&\times \left(\frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r (x_1^{r-1}/\lambda_1^r + \ldots + x_{p-1}^{r-1}/\lambda_{p-1}^r)}\right)^{x_{p-1}/r}.
\end{aligned}$$

Учитывая равенство (14), находим, что в точке экстремума

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1, \ldots, x_{p-1}) \\
&= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1}} P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \left(\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r} + \ldots + \frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r}\right)^{x/r} \frac{1}{2^{x_1/r}} \cdots \frac{1}{2^{x_{p-1}/r}} \\
&= e^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{p-1}} P_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \left(\frac{x_1^{r-1}}{\lambda_1^r} + \ldots + \frac{x_{p-1}^{r-1}}{\lambda_{p-1}^r}\right)^{x/r} \frac{1}{2^{x/r}}.
\end{aligned}$$

По-прежнему, частная производная по x_j должна обращаться в нуль. Это приводит к уравнениям

$$\frac{(r-1)x_j^{r-2}}{\lambda_j^r} - \frac{(r-1)x_{p-1}^{r-2}}{\lambda_{p-1}^r} = 0, \qquad j = 1, \ldots, p-2.$$

Учитывая равенство (14), приходим к уравнениям

$$\frac{1}{x_j} - \frac{1}{x_{p-1}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, p-2,$$

что дает единственный корень $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1}$.

Нетрудно проверить, что точка $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x/(p-1)$ есть точка максимума функции $\varphi(x_1, \ldots, x_{p-1})$.

Из равенства

$$1 + e^{iz} + e^{2iz} + \ldots + e^{(n-1)iz} = \frac{e^{niz} - 1}{e^{iz} - 1}$$

следует, что

$$\begin{aligned}
\sin\frac{2\pi l}{p} + \ldots + \sin\frac{2\pi(p-1)l}{p} &= 0, \\
\cos\frac{2\pi l}{p} + \ldots + \cos\frac{2\pi(p-1)l}{p} &= -1, \qquad l = 1, \ldots, p-1.
\end{aligned}$$

Поэтому при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = \lambda/(p-1)$ справедливы равенства

$$\alpha_l = 0, \quad \beta_l = -\frac{\lambda}{p-1}, \quad l = 1, \ldots, p-1.$$

Учитывая, что

$$\cos\frac{2\pi j}{p} + \ldots + \cos\frac{2\pi j(p-1)}{p} = -1, \qquad j = 1, \ldots, p-1,$$

из леммы 2 получаем, что

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= P_0(\lambda/(p-1), \ldots, \lambda/(p-1)) = \frac{1}{p}(1 + (p-1)e^{-p\lambda/(p-1)}), \\ P_j(\lambda) &= P_j(\lambda/(p-1), \ldots, \lambda/(p-1)) \\ &= \frac{1}{p}\left(1 + e^{-\lambda}\sum_{l=1}^{p-1} e^{-\lambda/(p-1)}\cos\frac{2\pi jl}{p}\right) \\ &= \frac{1}{p}(1 - e^{-p\lambda/(p-1)}), \qquad j = 1, \ldots, p-1. \end{aligned}$$

Из (7) находим, что

$$x_j = \frac{\lambda P_j(\lambda)}{(p-1)P_0(\lambda)}, \qquad j = 1, \ldots, p-1.$$

Поэтому $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x/(p-1)$ и

$$x = \frac{\lambda P_1(\lambda)}{P_0(\lambda)} = \frac{1 - e^{-p\lambda/(p-1)}}{1 + (p-1)e^{-p\lambda/(p-1)}}. \tag{15}$$

Множитель (13), зависевший от $x_1, \ldots, x_{p-1}$, принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{x}{p-1}, \ldots, \frac{x}{p-1}\right) &= \frac{e^{\lambda}P_0(\lambda)(x/(p-1))^{x(1-1/r)/(p-1)} \ldots (x/(p-1))^{x(1-1/r)/(p-1)}}{(\lambda/(p-1))^{x/(p-1)} \ldots (\lambda/(p-1))^{x/(p-1)}} \\ &= e^{\lambda}P_0(\lambda)\frac{x^{x(1-1/r)}(p-1)^{x/r}}{\lambda^x}. \end{aligned}$$

Подставляя его в (13), находим, что общий член суммы при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{p-1} = x/(p-1)$ имеет вид

$$(f(a, \lambda, x))^N c_r(a, \lambda, x)/N^{(p-1)/2},$$

где

$$f(a, \lambda, x) = e^{\lambda}P_0(\lambda)\left(\frac{(p-1)^x(ar)^{ar}}{x^x(ar-x)^{ar-x}}\right)^{1/r}\frac{x^x e^{-x}}{\lambda^x}.$$

Рассуждая так же, как в [1], для точки экстремума по переменной x, в которой $f(a, \lambda, x) = 1$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} f(a, \lambda, x) &= 1, \\ f'_x(a, \lambda, x) &= 0, \end{aligned}$$

где $x = \lambda P_1(\lambda)/P_0(\lambda)$, которая преобразуется к виду, указанному в теореме. Численно решая эту систему, находим значения a_r, указанные во введении.

Список литературы

1. Балакин Г. В., Колчин В. Ф., Хохлов В. И. Гиперциклы в случайном гиперграфе. *Дискретная математика* (1991) **3**, №3, 102–108.
2. Колчин В. Ф. *Системы случайных уравнений*. МИЭМ, Москва, 1988.
3. Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. Наука, Москва, 1984.

Статья поступила 30.12.94.