В.Н.Дубинин

# РАЗДЕЛЯЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЛАСТЕЙ И ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

## Введение

В последнее время в теории функций получил развитие метод кусочно-разделяющей симметризации. Суть этого метода заключается в следующем: исследуемый объект разбивается на части, которые отображаются на части специального вида; затем из последних конструируются симметричные объекты либо путем склеивания, либо с помощью известных способов симметризации (круговой, радиальной и др.). Простейшим и в то же время важным примером кусочно-разделяющей симметризации является преобразование конденсаторов, введенное в работе [I] . В дальнейшем это преобразование будем называть разделяющим преобразованием. Можно предполагать, что использование разделяющего преобразования совместно с другими видами симметризации существенно расширит границы применения симметризационных методов и позволит решить новые задачи. Кроме того, это преобразование имеет самостоятельный интерес. Важность разделяющего преобразования заключается в том, что в ряде случаев оно позволяет задачу с заданным количеством параметров свести к задаче с меньшим числом параметров. Например, методом работы [I] известную задачу Г.Сеге о покрытии радиальных отрезков можно свести к классической теореме об $1/4$ Кебе–Бибербаха.

В данной работе вводится разделяющее преобразование областей, аналогичное преобразованию в [I] , а также дается приложение этого преобразования к задачам о произведении степеней конформных радиусов неналегающих областей. Указанные задачи имеют богатую историю, достаточно полно изложенную в литературе [2 – 4] . Применение метода симметризации к решению этих задач вносит новые аспекты [5] . В отличие от работы [5] , мы рассматриваем в основном приложении к задачам со свободными полюсами (точнее, с полюсами, обладающими определенной степенью свободы).

## § I. Разделяющее преобразование конденсаторов и областей

Для полноты изложения приведем здесь определение разделяющего преобразования конденсаторов [I] , сделав при этом некоторые упрощения. Конденсатором на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$

называется всякая упорядоченная пара $C=(E_0,E_1)$ непересекающихся непустых замкнутых множеств $E_0$ и $E_1$. Обозначим через $\mathcal{L}_2^1(C)$ совокупность всех функций $\omega:\overline{\mathbb{C}}_z\to\mathbb{R}^1$, непрерывных в $\overline{\mathbb{C}}_z$, равных нулю на множестве $E_0$, единице на $E_1$ и принадлежащих классу $L_2^1(\mathbb{C}_z\setminus(E_0\cup E_1))$ (см., например, [6; с.84, I22]). Емкость конденсатора $C$ определяется следующим образом:

$$|C|=\inf_{\omega\in\mathcal{L}_2^1(C)}\iint_{\mathbb{C}_z}|\nabla\omega|^2dx\,dy,\qquad z=x+iy.$$

Пусть $C=(E_0,E_1)$ – произвольный конденсатор на $z$-сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$; $B_\ell$, $\ell=1,\dots,m$, – односвязные попарно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$, ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых и удовлетворяющие условию $E_j\cap\overline{B}_\ell\neq\emptyset$, $j=0,1$, $\ell=1,\dots,m$. Пусть $\{p_\ell\}_{\ell=1}^m$ – некоторое семейство функций $\zeta=p_\ell(z)$, конформно и однолистно отображающих соответственно области $B_\ell$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$. Обозначим через $E_j^{(\ell)}$ объединение множества $p_\ell(E_j\cap\overline{B}_\ell)$ с его отражением относительно мнимой оси. Результатом разделяющего преобразования конденсатора $C=(E_0,E_1)$ относительно семейства функций $\{p_\ell\}_{\ell=1}^m$ назовем семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, состоящее из $m$ симметричных конденсаторов $C_\ell=(E_0^{(\ell)},E_1^{(\ell)})$, $\ell=1,\dots,m$. Этот вариант разделяющего преобразования наиболее удобен в данной работе. В отличие от [I], мы рассматриваем здесь конденсаторы более широкого класса и ограничиваемся односвязными областями $B_\ell$. Иногда вместо полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta>0$ в определении некоторых функций $\zeta=p_\ell(z)$, $1\leqslant\ell\leqslant m$, будем рассматривать круг $|\zeta|<1$. В этом случае под $E_j^{(\ell)}$ понимаем объединение множества $p_\ell(E_j\cap\overline{B}_\ell)$ с его инверсией относительно окружности $|\zeta|=1$, $j=0,1$. Семейство конденсаторов $\{C_\ell\}_{\ell=1}^m$, $C_\ell=(E_0^{(\ell)},E_1^{(\ell)})$, $\ell=1,\dots,m$, по-прежнему будем называть результатом разделяющего преобразования конденсатора $C$.

ТЕОРЕМА I. Справедливо неравенство

$$|C|\geqslant\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^m|C_\ell|.$$

Доказательство этого утверждения аналогично соответствующему доказательству в [I] и даже проще, так как не требует применения принципа Дирихле.

Рассмотрим теперь разделяющее преобразование областей. Пусть

$a$ – произвольная фиксированная точка $\overline{\mathbb{C}}_z$ ; $B_l$, $l=1,\ldots,m$, – односвязные попарно непересекающиеся области, ограниченные конечным числом кусочно-гладких кривых, причем $a\in\partial B_l$, $l=1,\ldots,m$, и точка $a$ является носителем только одного граничного элемента для каждой области $B_l$. Семейство функций $\{p_l\}_{l=1}^m$ назовем допустимым семейством для разделяющего преобразования областей относительно точки $a$, если эти функции конформно и однолистно отображают соответственно области $B_l$ на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$ или на круг $|\zeta|<1$ таким образом, что при $z\to a$, $z\in\overline{B}_l$, выполняются следующие асимптотические равенства:

$$|p_l(z)-p_l(a)|\sim c_l|z-a|^{1/\beta_l}$$

в случае $a\neq\infty$ и для всех $l$, при которых $p_l(a)\neq\infty$;

$$|p_l(z)|\sim c_l^{-1}|z-a|^{-1/\beta_l}$$

в случае $a\neq\infty$ и для тех $l$, при которых $p_l(a)=\infty$;

$$|p_l(z)-p_l(a)|\sim c_l|z|^{-1/\beta_l}.$$

в случае $a=\infty$, $p_l(a)\neq\infty$;

$$|p_l(z)|\sim c_l^{-1}|z|^{1/\beta_l}$$

в случае $a=\infty$, $p_l(a)=\infty$.

Здесь $c_l,\beta_l$, $l=1,\ldots,m$, – некоторые положительные числа и $\sum_{l=1}^{m}\beta_l=2$. В дальнейшем мы рассматриваем только такие области $B_l$, для которых указанное семейство функций существует. Пусть $\{p_l\}_{l=1}^m$ – допустимое семейство функций, $D$ – произвольная область, $a\in D\subset\overline{\mathbb{C}}_z$. Для тех $l$, $1\leqslant l\leqslant m$, при которых $p_l(B_l)$ – полуплоскость, обозначим через $D_l$ объединение связной компоненты множества $p_l(D\cap\overline{B}_l)$, содержащей точку $p_l(a)$, с ее отражением относительно мнимой оси. В случае, когда $p_l(B_l)$ – круг, обозначим через $D_l$ объединение связной компоненты множества $p_l(D\cap\overline{B}_l)$, содержащей точку $p_l(a)$, с ее инверсией относительно окружности $|\zeta|=1$. Семейство симметричных областей $\{D_l\}_{l=1}^m$ назовем результатом разделяющего преобразования области $D$ относительно семейства функций $\{p_l\}_{l=1}^m$. Пусть $r(\Omega,b)$ – внутренний радиус произвольной области $\Omega$ расширенной комплексной плоскости относительно точки $b$. При $b=\infty$ имеем $r(\Omega,b)=e^{\gamma}$, где $\gamma$ – постоянная Робэна для области $\Omega$.

ТЕОРЕМА 2. Справедливо неравенство

$$r(D,a) \leqslant \prod_{\ell=1}^{m} \left[ r(D_\ell, p_\ell(a))/c_\ell \right]^{\beta_\ell^2/2}. \qquad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что область $D$ имеет классическую функцию Грина. Такую область будем называть допустимой. Рассмотрим конденсатор $C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D, \{z: |z-a| \leqslant r\})$, где $r > 0$ настолько мало, что круг $\{z: |z-a| \leqslant r\}$ целиком принадлежит области $D$ (при $a = \infty$ полагаем $C(r) = (\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D, \{z: |z| \geqslant 1/r\})$). Если для некоторого $\ell$ пересечение $(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus D) \cap \overline{B}_\ell$ пусто, то $r(D_\ell, p_\ell(a)) = \infty$ и неравенство (I) тривиально. В противном случае к конденсатору $C(r)$ применимо разделяющее преобразование относительно семейства функций $\{p_\ell\}_{\ell=1}^{m}$. Пусть $\{C_\ell(r)\}_{\ell=1}^{m}$ – результат такого преобразования. Из теоремы I и выпуклости функции $1/x$ следует

$$|C(r)|^{-1} \leqslant \left\{ \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\beta_\ell}{2} |C_\ell(r)|/\beta_\ell \right\}^{-1} \leqslant \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\beta_\ell^2}{2} |C_\ell(r)|^{-1}.$$

Учитывая известную связь между емкостью конденсатора и внутренним радиусом допустимой области, а также асимптотические оценки для функций $\zeta = p_\ell(z)$, имеем

$$|C(r)|^{-1} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D,a)}{r} + o(1), \quad r \to 0,$$

$$|C_\ell(r)|^{-1} \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{r(D_\ell, p_\ell(a))}{c_\ell\, r^{1/\beta_\ell}} + o(1), \; r \to 0,$$

$$\ell = 1, \ldots, m.$$

Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (I). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение разделяющего преобразования и способ доказательства теоремы 2 позволяют обобщить это преобразование в различных направлениях, при этом будут иметь место неравенства, аналогичные неравенству (I). Например, точка $a$ в определении разделяющего преобразования может быть носителем не одного, а нескольких граничных элементов для каждой области $B_\ell$. Пусть $a_{\ell 1}, a_{\ell 2}, \ldots, a_{\ell s_\ell}$ – такие граничные элементы. Для функций в окрестности каждого граничного элемента $a_{\ell s}$ естественно потребовать выполнения асимптотического условия, аналогичного приведенным выше. Пусть $C_{\ell s}$ и $\beta_{\ell s}$ – соответствующие коэффициенты и пусть $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{s=1}^{s_\ell} \beta_{\ell s}=2$. Аналогично предыдущему, пусть область $D_{\ell s}$ есть объединение связной компоненты множества $p_\ell(D \cap \overline{B}_\ell)$, содержащей точку $p_\ell(a_{\ell s})$, с ее симметричным образом. Однако на этот раз необходимо потребовать, чтобы для каждого фиксированного $\ell$ $(1 \leqslant \ell \leqslant m)$ множества $D_{\ell s}, s=1,\dots,s_\ell$, попарно не пересекались. В этом случае, повторяя доказательство теоремы 2 в новых обозначениях и с естественными добавлениями, получаем неравенство

$$r(D,a) \leqslant \prod_{\ell=1}^{m} \prod_{s=1}^{s_\ell} \left[ r(D_{\ell s}, p_\ell(a_{\ell s}))/C_{\ell s} \right]^{\beta_{\ell s}^2/2}.$$

В следующем параграфе мы ограничимся применением неравенства (I). Отметим частные случаи этого неравенства. Так, при $m=1$, $\beta_1=2$ оно принимает вид

$$r(D,a) \leqslant (r(D_1, p_1(a))/C_1)^2. \tag{2}$$

В случае, когда $m=2$, $\beta_1=\beta_2=1$, а функции $p_\ell(z)$ дифференцируемы в точке $a$, имеем

$$r(D,a) \leqslant \sqrt{\prod_{\ell=1}^{2} r(D_\ell, p_\ell(a))/|p_\ell'(a)|}. \tag{3}$$

## § 2. Задачи об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности

Пусть $a_1$ и $a_2$ – точки плоскости $\mathbb{C}_z$, и пусть $D_k$, $a_k \in D_k$, $k=1,2$, – произвольные непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$. Из классической теоремы М.А.Лаврентьева [7, с.156], [2, с.32, 224] следует, что

$$r(D_1,a_1)\, r(D_2,a_2) \leqslant |a_1-a_2|^2, \tag{4}$$

причем для допустимых областей $D_k$ знак равенства в (4) имеет место тогда и только тогда, когда области $D_1$, $D_2$ ограничены окружностью $|(z-a_1)/(z-a_2)|=c$, где $c$ – произвольная положительная постоянная.

Фиксируем теперь некоторое компактное множество $E$ и рассмотрим задачу о нахождении максимума произведения $r(D_1,a_1)r(D_2,a_2)$ по всевозможным различным точкам $a_k\in E$, $k=1,2$, и всевозможным непересекающимся областям $D_k$, $a_k\in D_k$, $k=1,2$. Ввиду неравенства (4) такой максимум равен квадрату диаметра множества $E$. Что можно сказать об аналогичном максимуме для произвольного фиксированного числа точек $a_k\in E$, $k=1,\dots,n$, и попарно непересекающихся областей $D_k$, $a_k\in D_k$, $k=1,\dots,n$? Интересна также следующая задача. Пусть $a_1,\dots,a_n$ – различные точки $\overline{\mathbb{C}}_z$, причем некоторые из этих точек, пусть $a_1,\dots,a_\ell$, фиксированы, а остальные точки $a_{\ell+1},\dots,a_n$ принадлежат заданному множеству $E$ (свободные точки). Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – фиксированные положительные числа. Рассмотрим задачу:

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k)\longrightarrow \sup;$$

$$a_k\in E,\ k=\ell+1,\dots,n,\quad a_k\in D_k,\ k=1,\dots,n,$$

$$D_k\cap D_\ell=\emptyset,\ k\neq\ell,\quad k,\ell=1,\dots,n.$$

Отметим, что точное значение верхней грани выписанного произведения при любых фиксированных точках $a_k$ и попарно непересекающихся областях $D_k$ известно лишь для малых значений $n$. Тем не менее, в ряде частных случаев указанная задача может быть решена для любых $n$. В данном параграфе рассматриваются некоторые варианты этой задачи в том случае, когда множество $E$ есть окружность. Такие задачи естественно называть задачами со свободными полюсами на окружности, поскольку точки $a_k$ являются полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала в соответствующей задаче при фиксированных $a_k$, а также полюсами функций Грина, фигурирующих в определении внутренних радиусов рассматриваемых областей. Приведем сначала простейший пример такого рода.

ТЕОРЕМА 3. Для любых различных точек $a_k$, $k=1,\dots,n$ $(n\geqslant 3)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $D_k$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_z$, $k=1,\dots,n$, справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k,a_k)\leqslant (4/n)^n. \tag{5}$$

Если, дополнительно, области $D_k$, $k=1,\dots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (5) достигается в том и только в том случае, когда $a_k=\exp(i(\theta+2\pi k/n))$, $D_k=\{z:|\arg z-\theta-2\pi k/n|<\pi/n\}$,

$k=1,\dots,n$, где $\theta$ – произвольная вещественная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $\theta_k=\arg a_k, k=1,\dots,n, \theta_0=\theta_n-2\pi$, $\theta_{n+1}=2\pi$, $\varphi_k=\theta_{k+1}-\theta_k, k=0,1,\dots,n$. Можно считать, что $0=\theta_1<\theta_2<\dots<\theta_n<2\pi$. Положим

$$B_k=\{z:\theta_k<\arg z<\theta_{k+1}\},$$

$$\zeta=p_k(z)\equiv -i(ze^{-i\theta_k})^{\pi/\varphi_k},\ z\in B_k,\ k=0,1,\dots,n.$$

Каждая пара функций $\{p_{k-1},p_k\}$ образует допустимое семейство функций для разделяющего преобразования областей относительно точки $a_k$. Пусть $\{D_k^{(1)},D_k^{(2)}\}$ – результат такого преобразования области $D_k, k=1,\dots,n$. Неравенство (3) дает

$$r(D_k,a_k)\leqslant\sqrt{(\varphi_{k-1}\varphi_k/\pi^2)r(D_k^{(1)},i)r(D_k^{(2)},-i)},\ k=1,\dots,n.$$

Отсюда

$$\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k}{\pi}\sqrt{r(D_k^{(2)},-i)r(D_{k+1}^{(1)},i)} \tag{6}$$

$(D_{n+1}^{(1)}=D_1^{(1)})$. Применяя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем

$$\prod_{k=1}^{n}r(D_k,a_k)\leqslant(2/n)^n\prod_{k=1}^{n}\sqrt{r(D_k^{(2)},-i)r(D_{k+1}^{(1)},i)}.$$

Области $D_k^{(2)}$ и $D_{k+1}^{(1)}$ не пересекаются. По теореме М.А.Лаврентьева,

$$r(D_k^{(2)},-i)\,r(D_{k+1}^{(1)},i)\leqslant 4$$

(см. (4)). Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (5). Предположим теперь, что каждая область $D_k$ имеет классическую функцию Грина $g_{D_k}(z,a_k)$, и пусть в неравенстве (5) достигается знак равенства. Тогда знак равенства имеет место во всех предыдущих соотношениях. В частности, из равенства между средним геометрическим и средним арифметическим следует, что все $\varphi_k$ равны между собой. Далее воспользуемся теоремой I работы [5], положив в ней $G=\overline{\mathbb{C}}_z$ и $Q(z)dz^2=-z^{n-2}(z^n-1)^{-2}dz^2$, $n\geqslant 3$. Согласно условиям равенства в этой теореме, множество $P=\{z: \arg z^n=\pi\}$ либо является линией уровня некоторой функции $g_{D_{K_n}}(z,a_K), 1\leqslant K\leqslant\pi$, либо не содержит ни одной точки из объединения $\bigcup\limits_{K=1} D_K$. В первом случае из поведения гармонической функции $g_{D_K}(z,a_K)$ в окрестности начала координат и условия $n\geqslant 3$ заключаем, что существуют некоторый угол $\Lambda$, ограниченный двумя соседними лучами из $P$, $a_K\notin\Lambda$, и точка $z_0$, принадлежащая этому углу и такая, что $g_{D_K}(z_0,a_K)>g_{D_K}(0,a_K)$. Это обстоятельство противоречит принципу максимума в $\Lambda\cap D_K$. Во втором случае в силу принципа Линделефа имеем: $D_K=\{z: |\arg z-2\pi(K-1)/n|<\pi/n\}, K=1,\ldots,n$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для таких областей $D_K$ и соответствующих точек $a_K=\exp(i(2\pi(K-1)/n))$ в неравенстве (5) действительно имеет место знак равенства. Теорема доказана.

При $n=3$ и для односвязных областей $D_K$ полученный результат равносилен известной теореме Г.М.Голузина (см. [7, с.164-165], а также [2, с.32]). Случай четырех односвязных областей рассматривался Г.П.Бахтиной [8]. Для произвольных $n$ неравенство (5) доказано в работе [9]. Заметим, что в [9] получено более сильное утверждение. Именно, области $D_K$ лежат в кольце $r\leqslant|z|\leqslant R$ $(0\leqslant r<R\leqslant\infty)$ и допускается частичное налегание их друг на друга. Е.Г.Емельянов [10] рассмотрел связь между двумя задачами об экстремальном разбиении, из которой следует ряд теорем и, в частности, неравенство (5) при любом $n$ и для односвязных областей $D_K$.

Добавим теперь к областям $D_1,\ldots,D_n$ теоремы 3 область $D_0$, содержащую начало координат, и рассмотрим следующую задачу:

$$\prod_{K=0}^{n} r(D_K,a_K)\longrightarrow \sup;$$

$$a_0=0,\ |a_K|=1,\ K=1,\ldots,n,\ \ a_K\in D_K,\ K=0,1,\ldots,n,$$

$$D_K\cap D_l=\emptyset,\ K\neq l,\ K,l=0,1,\ldots,n.$$

Эта задача существенно сложнее предыдущей. В самом деле, можно предполагать, что области $D_K, K=1,\ldots,n$, расположенные несимметрично, имеют меньшее произведение внутренних радиусов, чем некоторые симметричные области. С другой стороны, внутренний радиус области $D_0$ при диссимметризации строго увеличивается [11]. Тем не менее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. Для любых различных точек $a_K, K=1,\ldots,n\ (n\geqslant 2)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $D_\kappa, a_\kappa \in D_\kappa \subset \overline{\mathbb{C}}_z, \kappa=0,1,\ldots,n (a_0=0)$, справедливо неравенство

$$\prod_{\kappa=0}^{n} r(D_\kappa, a_\kappa) \leqslant \frac{4^{1/n+n}\, n^n}{(n^2-1)^{1/n+n}} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2. \qquad (7)$$

Если, дополнительно, области $D_\kappa, \kappa=0,1,\ldots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство в (7) достигается в том и только в том случае, когда области $D_\kappa$ и точки $a_\kappa$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^n(n^2-1)+1}{z^2((\alpha z)^n-1)^2}\,dz^2,$$

где $\alpha$ – произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $|\alpha|=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_\kappa, \varphi_\kappa, B_\kappa, p_\kappa(z), D_\kappa^{(1)}, D_\kappa^{(2)}$ – такие же, как и при доказательстве теоремы 3. Семейство функций $\{p_\kappa\}_{\kappa=1}^{n}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z=0$. Обозначим через $\{D_0^{(\kappa)}\}_{\kappa=1}^{n}$ результат такого преобразования области $D_0$. Из теоремы 4 следует

$$r(D_0, a_0) \leqslant \prod_{\kappa=1}^{n} \left[r(D_0^{(\kappa)}, 0)\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi}\right)^2}. \qquad (8)$$

Для каждого $\kappa$ рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q_\kappa(\zeta)d\zeta^2 = -\frac{-\zeta^2(4-(\varphi_\kappa/\pi)^2)+(\varphi_\kappa/\pi)^2}{\zeta^2(1+\zeta^2)^2}\,d\zeta^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду на $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$, за исключением полюсов второго порядка в точках $\zeta=0,-i,i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$Q_\kappa(\zeta) = -(\varphi_\kappa/\pi)^2/\zeta^2+\ldots,\quad Q_\kappa(\zeta)=-1/(\zeta+i)^2+\ldots,$$

$$Q_\kappa(\zeta) = -1/(\zeta-i)^2+\ldots\ .$$

Далее, области $\mathcal{D}_0^{(k)}$, $\mathcal{D}_k^{(2)}$, $\mathcal{D}_{k+1}^{(1)}$ являются (вообще говоря, многосвязными) попарно непересекающимися областями на $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$. Объединение этих областей содержит не более чем конечное число замыканий ортогональных траекторий дифференциала $Q_k(\zeta)d\zeta^2$, так как указанные траектории имеют либо концевую точку в начале координат, либо концевые точки в обоих направлениях в различных полюсах $Q_k(\zeta)d\zeta^2$ $(\varphi_k < 2\pi)$. Из теоремы I работы [5], учитывая результат Л.И.Колбиной [12], получаем

$$\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2\left[r(\mathcal{D}_0^{(k)},0)\right]^{(\varphi_k/\pi)^2} r(\mathcal{D}_k^{(2)},-i)\,r(\mathcal{D}_{k+1}^{(1)},i) \leq \Phi(\varphi_k/\pi), \tag{9}$$

где

$$\Phi(u) = 2^{u^2+6}\,u^{u^2+2}\,(2-u)^{-(2-u)^2/2}\,(2+u)^{-(2+u)^2/2}, \quad 0<u<2\,.$$

Рассмотрим экстремальную задачу:

$$\prod_{k=1}^{n}\Phi(u_k) \longrightarrow \sup\,; \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = 2\,. \tag{10}$$

Необходимые условия имеют вид

$$\Phi'(u_k)/\Phi(u_k) = -\lambda\Big/\prod_{k=1}^{n}\Phi(u_k)\,, \quad k=1,\dots,n\,. \tag{11}$$

Покажем, что все $u_k$ равны между собой. Легко проверить, что функция $F(u)=\Phi'(u)/\Phi(u)$ строго убывает на некотором промежутке $(0,u_0]$ и возрастает на $[u_0,2)$, $u_0>1$. Введем вспомогательную функцию $\mathcal{F}(u)=F(u)-F(2-u)$, $0<u\leq 1$. Простые вычисления показывают, что $\mathcal{F}(u)$ положительна на интервале $(0,1)$. Если теперь хотя бы одно из $u_k$ больше I, например, $u_{k'}>1$, то для остальных $u_k$ имеет неравенства $u_k\leq 2-u_{k'}<1<u_0$ и потому $F(u_k)\geq F(2-u_{k'})>$ $>F(2-(2-u_{k'}))=F(u_{k'})$. Получили противоречие с равенствами (II). Поэтому для любого $k$ справедливо условие $u_k\in(0,1]$ и в силу равенств (II), а также монотонности $F(u)$ на $(0,u_0]$ в точке предполагаемого экстремума, имеем $u_k=2/n$, $k=1,\dots,n$. Нетрудно видеть, что точка $(2/n,\dots,2/n)$ действительно является решением задачи (I0). Совместно с неравенствами (6), (8) и (9) это дает неравенство теоремы.

Предположим теперь, что области $\mathcal{D}_k$, $k=0,1,\ldots,n$, имеют классические функции Грина, а в неравенстве (7) достигается знак равенства. Тогда необходимо имеем $\varphi_k=2\pi/n$, $k=1,\ldots,n$ , и утверждение теоремы следует из теоремы I работы [5] , примененной к квадратичному дифференциалу $Q(z)dz^2$ , где $\alpha$ – некоторая постоянная, $|\alpha|=1$ . При этом выражение для правой части неравенства (I) теоремы I в [5] легко получить, если воспользоваться вычислениями в [I2] и тем фактом, что дифференциал $Q(z)dz^2$ получается из $Q_k(\zeta)d\zeta^2$ $(\varphi_k=2\pi/n)$ заменой переменной $\zeta=i(\alpha z)^{n/2}$. Теорема доказана.

Отметим, что для $n=2$ и для односвязных областей $\mathcal{D}_k$ неравенство (7) следует из теоремы Г.М.Голузина [7, с.165] . В случае $n=3$ и односвязных $\mathcal{D}_k$ это неравенство вытекает из результата Г.В.Кузьминой [I3] . Для $n>3$ теорема 4 доказана впервые. Постановка следующей задачи заимствована автором из работы Г.П.Бахтиной [I4] :

$$\prod_{k=0}^{n} r(\mathcal{D}_k,a_k)\longrightarrow \sup ;$$

$$a_0=0,\quad |a_k|=1,\quad k=1,\ldots,n,\qquad a_k\in\mathcal{D}_k\,,\quad k=0,1,\ldots,n, \tag{I2}$$

$$\mathcal{D}_k\cap\mathcal{D}_\ell=\varnothing,\quad k\neq\ell,\quad k,\ell=0,1,\ldots,n,\quad \mathcal{D}_k=\{z:\ 1/\bar{z}\in\mathcal{D}_k\},\ k=1,\ldots,n.$$

В работе [I4] методом вариаций получены некоторые условия, при которых произведение в (I2) достигает своей верхней грани. Эти условия позволяют решить поставленную задачу при некоторых ограничениях на области $\mathcal{D}_k$ и при малых значениях $n$ . Однако уже при $n=3$ такой подход встречает значительные трудности. Решение указанной задачи для этого частного случая (даже для односвязных областей $\mathcal{D}_k$ ) в литературе, по-видимому, не встречалось. Разделяющее преобразование дает возможность решить задачу для любых $n$ . Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $a_k$, $k=1,\ldots,n$ $(n\geqslant 2)$, – произвольные различные точки окружности $|z|=1$ ; $\mathcal{D}_k$ , $k=0,1,\ldots,n$, – попарно непересекающиеся области на $\overline{\mathbb{C}}_z$ такие, что $a_k\in\mathcal{D}_k$ , $k=0,1,\ldots,n$ $(a_0=0)$ и $\mathcal{D}_k$ , $k=1,\ldots,n$ , симметричны относительно окружности $|z|=1$ .Тогда

$$\prod_{k=0}^{n} r(\mathcal{D}_k,a_k)\leqslant \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{1/n+n/2}}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} .$$

Если, дополнительно, области $\mathcal{D}_k$, $k=0,1,\ldots,n$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области $\mathcal{D}_k$ и точки $a_k$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала

$$Q(z)\,dz^2 = -\frac{(\alpha z)^{2n} + (\alpha z)^n(2n^2-2)+1}{z^2((\alpha z)^n - 1)^2}\,dz^2, \tag{13}$$

где $\alpha$ – произвольная постоянная, $|\alpha| = 1$.

Это утверждение непосредственно вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для любых различных точек $a_k$, $k=1,\ldots,n$ $(n\geq 2)$, лежащих на окружности $|z|=1$, и любых попарно непересекающихся областей $\mathcal{D}_k$, $a_k \in \mathcal{D}_k \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $k=0,1,\ldots,n+1$ $(a_0=0,\ a_{n+1}=\infty)$, справедливо неравенство

$$\sqrt{r(\mathcal{D}_0,a_0)\,r(\mathcal{D}_{n+1},a_{n+1})}\ \prod_{k=1}^{n} r(\mathcal{D}_k,a_k) \leq \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{1/n+n/2}}\left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Если, дополнительно, области $\mathcal{D}_k$, $k=0,1,\ldots,n+1$, имеют классические функции Грина, то равенство достигается в том и только в том случае, когда области $\mathcal{D}_k$ и точки $a_k$ являются соответственно круговыми областями и полюсами квадратичного дифференциала (13), где $\alpha$ – произвольная постоянная, $|\alpha| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду ниже пользуемся обозначениями, принятыми при доказательстве теорем 3 и 4. Семейство функций $\{p_k\}_{k=1}^{n}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $z=\infty$. Пусть $\{\mathcal{D}_{n+1}^{(k)}\}_{k=1}^{n}$ – результат такого преобразования области $\mathcal{D}_{n+1}$. По теореме 2,

$$r(\mathcal{D}_{n+1},a_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n}\left[r(\mathcal{D}_{n+1}^{(k)},\infty)\right]^{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_k}{\pi}\right)^2}. \tag{14}$$

Для каждого $k$ рассмотрим квадратичный дифференциал

$$R_k(\zeta)\,d\zeta^2 = -\frac{\zeta^4(\varphi_k/\pi)^2/2 - \zeta^2(4-(\varphi_k/\pi)^2)+(\varphi_k/\pi)^2/2}{\zeta^2(1+\zeta^2)^2}\,d\zeta^2.$$

Этот дифференциал регулярен всюду в $\overline{\mathbb{C}}_\zeta$, за исключением полюсов второго порядка в точках $\zeta = 0, \infty, -i, i$, в окрестностях которых имеют место соответственно разложения

$$R_\kappa(\zeta) = -[(\varphi_\kappa/\pi)^2/2]/\zeta^2 + \ldots, \quad R_\kappa(\zeta) = -[(\varphi_\kappa/\pi)^2/2]/\zeta^2 + \ldots$$

$$R_\kappa(\zeta) = -1/(\zeta+i)^2 + \ldots, \qquad R_\kappa(\zeta) = -1/(\zeta-i)^2 + \ldots .$$

Для круговых областей $G_\kappa^{(\ell)}$ относительно дифференциала $R_\kappa(\zeta)d\zeta^2$ имеем

$$\left[r(G_\kappa^{(0)},0)\, r(G_\kappa^{(3)},\infty)\right]^{(\varphi_\kappa/\pi)^2/2} r(G_\kappa^{(1)},-i)\, r(G_\kappa^{(2)},i) = (\pi/\varphi_\kappa)^2 \Psi(\varphi_\kappa/\pi\sqrt{2}),$$

где

$$\Psi(\vartheta) = 8\,\vartheta^{2\vartheta^2+2}\,|1-\vartheta|^{-(1-\vartheta)^2}(1+\vartheta)^{-(1+\vartheta)^2}, \quad 0<\vartheta\leqslant\sqrt{2}$$

(при $\vartheta = 1$ $\Psi(\vartheta) = 1/2$ ).

В этом легко убедиться, если воспользоваться вычислениями Л.И.Колбиной [I2] и тем фактом, что дифференциал $R_\kappa(\zeta)d\zeta^2$ с помощью замены $\zeta^2 = (1+\sqrt{w})/(\sqrt{w}-1)$ приводится к дифференциалу

$$P(w)dw^2 = -\frac{w((\varphi_\kappa/\pi)^2/2-1)+1}{4w^2(1-w)^2}\,dw^2,$$

определяющему экстремальную конфигурацию в соответствующей задаче [I2] . Теорема I работы [5] дает

$$\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi}\right)^2\left[r(D_0^{(\kappa)},0)\, r(D_{n+1}^{(\kappa)},\infty)\right]^{\frac{1}{8}\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi}\right)^2} r(D_\kappa^{(2)},-i)\, r(D_{\kappa+1}^{(1)},i) \leqslant \Psi\left(\frac{\varphi_\kappa}{\pi\sqrt{2}}\right). \quad (I5)$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{\kappa=1}^{n}\Psi(\vartheta_\kappa) \longrightarrow \sup; \quad \sum_{\kappa=1}^{n}\vartheta_\kappa = \sqrt{2}.$$

Введем функцию $H(\vartheta) = \Psi'(\vartheta)/\Psi(\vartheta)$. Элементарные вычисления показывают, что эта функция убывает на промежутке $(0,\vartheta_0]$ и возрастает на $[\vartheta_0,\sqrt{2}]$. Здесь $\vartheta_0$ удовлетворяет условию $0,85<\vartheta_0<1$. Учитывая также, что $H(0{,}564)>0$, $H(\sqrt{2})<0$, получаем, что разность $H(\vartheta)-H(\sqrt{2}-\vartheta)$ положительна на промежутке $0<\vartheta<\sqrt{2}/2$. Аналогично доказательству теоремы 4, убеждаемся, что единственным решением экстремальной задачи является точка $(\sqrt{2}/n,\dots,\sqrt{2}/n)$. Совместно с неравенствами (6), (8), (I4) и (I5) это дает неравенство теоремы 6. Случай равенства как и при доказательстве теорем 3 и 4 вытекает из теоремы I работы [5]. Теорема доказана.

## § 3. Некоторые замечания и дополнения

Доказательства теорем, предложенные в предыдущем параграфе, далеко не исчерпывают возможностей разделяющего преобразования. Отметим здесь лишь "близкие" приложения, непосредственно связанные с задачами об экстремальном разбиении. Например, способ доказательства теоремы 3, где разделяющее преобразование применяется вместе с теоремой М.А.Лаврентьева, нетрудно распространить на довольно общий случай. Нам понадобятся некоторые определения [I5, I6]. Двуугольником называется любая односвязная область $P$ на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$ с двумя отмеченными граничными элементами $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, носителями которых являются различные или совпадающие точки $a_1$ и $a_2$. Для простоты изложения точки $a_1$ и $a_2$ будем считать конечными, а рассматриваемые ниже двуугольники $P$ – ограниченными конечным числом кусочно-гладких кривых. Граничные элементы $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ назовем вершинами двуугольника $P$. Пусть функция $w=g(z)$ конформно и однолистно отображает $P$ на полосу $h_1<\operatorname{Im} w<h_2$ так, что вершина $\tilde{a}_1$ переходит в $-\infty$, а вершина $\tilde{a}_2$ – в $+\infty$. Кривые $\operatorname{Im} g(z)=c$ $(h_1<c<h_2)$ назовем траекториями двуугольника $P$. Следуя работе Г.В.Кузьминой [I5], будем предполагать, что рассматриваемые двуугольники $P$ удовлетворяют условию (ж), т.е. в окрестности граничного элемента $\tilde{a}_j$, $j=1,2$, имеет место равенство

$$g(z)=\frac{h_2-h_1}{\varphi_j}\left\{(-1)^{j-1}\log(z-\tilde{a}_j)+\tilde{g}_j(z)\right\},$$

где $\varphi_j$ – внутренний угол области $P$ в граничном элементе $\tilde{a}_j$, а $\tilde{g}_j(z)$ – регулярная функция [I5, с.II2]. В этом случае определен приведенный модуль-П двуугольника $P$ и он равен

$$\mu(P)=\frac{1}{\varphi_2}\operatorname{Re}\tilde{g}_2(\tilde{a}_2)-\frac{1}{\varphi_1}\operatorname{Re}\tilde{g}_1(\tilde{a}_1) \qquad (I6)$$

[I5, с.II4] (по поводу определения приведенного модуля двуугольника см. также работу Е.Г.Емельянова [I6] ).

Пусть $A=\{a_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность различных фиксированных точек на плоскости $\mathbb{C}_z$. Рассмотрим конечную совокупность $\{P\}$ попарно непересекающихся двуугольников $P$ с вершинами в точках из $A$. Пусть каждая точка из $A$ является носителем некоторой вершины. Пронумеруем двуугольники из $\{P\}$, а также углы при их вершинах, следующим образом. При достаточно малом $\varepsilon>0$ пересечение окружности $|z-a_k|=\varepsilon$ с множествами из $\{P\}$ состоит из конечного числа дуг $S_{k\ell}, \ell=1,\dots,m_k$. Обозначим через $P_{k\ell}$ область из $\{P\}$, содержащую дугу $S_{k\ell}$; $\varphi_{k\ell}$ – внутренний угол области $P_{k\ell}$ в точке $a_k$, соответствующий дуге $S_{k\ell}$. Ясно, что при такой нумерации каждый двуугольник учитывается дважды.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A$ и $\{P\}$ – введенные выше множества, $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ – совокупность положительных чисел. Предположим, что выполняются равенства

$$\sum_{\ell=1}^{m_k}\varphi_{k\ell}=2\pi, \qquad k=1,\dots,n,$$

$$\alpha_k\varphi_{k\ell}^2=\alpha_{k'}\varphi_{k'\ell'}^2, \quad \ell=1,\dots,m_k, \quad k=1,\dots,n,$$

где $\varphi_{k\ell}$ и $\varphi_{k'\ell'}$ – углы при вершинах одного и того же двуугольника $P_{k\ell}(P_{k'\ell'})$. Пусть $\{D_k\}_{k=1}^{n}$, $a_k\in D_k\subset\overline{\mathbb{C}}_z, k=1,\dots,n,$ – произвольная совокупность областей, объединение которых не содержит ни одной кривой, лежащей в двуугольнике из $\{P\}$ и соединяющей его противоположные вершины. Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k)\leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m_k}\frac{\alpha_k\varphi_{k\ell}^2}{4\pi}\mu(P_{k\ell})\right\}. \qquad (I7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функции $\zeta=p_{k\ell}(z), \ell=1,\dots,m_k, k=1,\dots,n$, конформно и однолистно отображающие соответственно двуугольники $P_{k\ell}$ на круг $|\zeta|<1$ таким образом, что при $z\to a_k$ по пути, пересекающемуся с $S_{k\ell}$, имеем $p_{k\ell}(z)\to-1$, а противоположная вершина двуугольника переходит в точку $\zeta=1$. Мы полагаем также, что $p_{k\ell}(z)=-p_{k'\ell'}(z)$, где функции $p_{k\ell}(z)$ и $p_{k'\ell'}(z)$ соответствуют одному и тому же двуугольнику, но с разной нумерацией ($P_{k\ell}$ и $P_{k'\ell'}$). Ввиду условий теоремы, семейство функций $\{p_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$ является допустимым для разделяющего преобразования областей относительно точки $a_k$. Обозначим через $c_{k\ell}$ коэффициенты в соответствующих асимптотических равенствах для функций $P_{k\ell}(z)$, и пусть $\{D_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$ - результат разделяющего преобразования области $D_k$ относительно семейства функций $\{P_{k\ell}\}_{\ell=1}^{m_k}$. Учитывая замечание к теореме 2, имеем

$$\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(D_k,a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left[r(D_{k\ell},-1)/c_{k\ell}\right]^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/2} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left\{\left[r(D_{k\ell},-1)/c_{k\ell}\right]^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/4}\left[r(D_{k'\ell'},-1)/c_{k'\ell'}\right]^{\alpha_{k'}(\varphi_{k'\ell'}/\pi)^2/4}\right. =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{m_k}\left\{\left[r(D_{k\ell},-1)r(\{\zeta:-\zeta\in D_{k'\ell'}\},1)\right]/(c_{k\ell}\,c_{k'\ell'})\right\}^{\alpha_k(\varphi_{k\ell}/\pi)^2/4}$$

Неравенство М.А.Лаврентьева (4) дает

$$r(D_{k\ell},-1)r(\{\zeta:-\zeta\in D_{k'\ell'}\},1)\leqslant 4.$$

Осталось воспользоваться формулой (16), согласно которой

$$4/(c_{k\ell}c_{k'\ell'}) = \exp[\pi\mu(P_{k\ell})].$$

Теорема доказана.

В случае односвязных непересекающихся областей $D_k$ неравенство (17) (с указанием всех случаев равенства) получено Е.Г.Емельяновым в работе [10]. В [10] получены также некоторые приложения этого неравенства. В частности, из него вытекает оценка трансфинитного диаметра континуума [1]. Указанные приложения можно было бы дополнить. Вместе с тем следует отметить, что эффективность применения неравенства (17) сдерживается двумя обстоятельствами. Во-первых, существенными являются ограничения на величины противоположных углов двуугольников. Во-вторых, число двуугольников порой превышает число особенностей данной задачи, что ведет к искусственному увеличению объема вычислений. В связи с этим представляется полезным наряду с двуугольниками рассмотреть односвязные области с тремя и большим количеством вершин. Такой путь прослеживается при доказательстве теорем 4 и 6, где плоскость разбивается на односвязные области с тремя (теорема 4) или четырьмя (теорема 6) отмеченными граничными элементами. Простейщий пример разбиения плоскости на "четырехугольники" можно получить, если применить разделяющее преобразование из доказательства теоремы 3 к ситуации, описанной в теореме 3 работы [10] (при $n \geqslant 2$ ). Неравенство (3) нашей работы совместно с известным результатом З.Нехари [17, с.279] дает обобщение указанной теоремы из [10] на случай областей произвольной связности.

Отметим, что для простоты изложения во втором параграфе рассматриваются лишь попарно непересекающиеся области. Легко видеть, что способ доказательства теорем 3 - 6 позволяет выделить некоторые зоны, в которых возможно налегание областей друг на друга. Например, теорема 4 верна и в том случае, когда для любых соседних точек $a_{k'}, a_{k''}$ на окружности $|z|=1$ области $D_0, D_{k'}$ и $D_{k''}$ пересекаются в части плоскости, ограниченной лучами $\arg z = \arg a_{k'}$, $\arg z = \arg a_{k''}$ и содержащей другие точки $a_k$ . Если же точки $a_{k'}$ и $a_{k''}$ разделены на окружности $|z|=1$ остальными точками $a_k$, то области $D_{k'}$ и $D_{k''}$ могут пересекаться в любой части плоскости. Возможность налегания другого рода вытекает из применения симметризации Штейнера. Так, способом работы [5] можно показать, что неравенство (17) имеет место и в том случае, когда объединение областей $D_k$, $k=1,\dots,n$, не содержит ни одной траектории'двуугольников из $\{P\}$.

В заключение укажем, что теорема 2 обнаруживает зависимость между некоторыми задачами об экстремальном разбиении и граничным поведением функций. Следующий результат является простым примером такой зависимости.

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция $w=f(z)$ конформно и однолистно отображает круг $|z|<1$ на некоторую область на $\overline{\mathbb{C}}_w$ , ограниченную конечным числом кусочно-аналитических кривых, и пусть в окрестности некоторых точек $z_k$, $|z_k|=1, k=1,\dots,n$, выполняются асимптотические равенства

$$|f(z)-f(z_k)| \sim c_k |z-z_k|^2, \quad z \to z_k, \; k=1,\dots,n,$$

где $c_k$, $k=1,\dots,n$, - положительные постоянные. Тогда для любых попарно непересекающихся областей $D_k$, $f(z_k) \in D_k$, $k=1,\dots,n$, $n>1$, имеет место оценка

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, f(z_k)) \leqslant \prod_{k=1}^{n} (16 c_k / n^2).$$

Для доказательства этого утверждения необходимо к каждой области $D_K$ применить разделяющее преобразование относительно функции $z = f^{-1}(w)$, после чего воспользоваться неравенством (2) и теоремой 3.

## Литература


1. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации и трансфинитный диаметр. – Сиб. мат.журн., 1986, т.27, № 2, с.39–46.
2. Л е б е д е в Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М., 1975.
3. К у з ь м и н а Г.В. Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы. – Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1980, т.139, 240 с.
4. К у з ь м и н а Г.В. Геометрическая теория функций: методы и результаты. – Изв. вузов.Математика, 1986, № 10, с.17–33.
5. Д у б и н и н В.Н. Метод симметризации в задачах о неналегающих областях. – Мат.сб., 1985, т.128, № 1, с.110–123.
6. Г о л ь д ш т е й н В.М., Р е ш е т н я к Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
7. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-ое изд. М., 1966.
8. Б а х т и н а Г.П. Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях. – Автореф. канд. дисс., Киев, 1975, 12 с.
9. Д у б и н и н В.Н. О произведении внутренних радиусов "частично неналегающих" областей. – В кн.: Вопросы метрической теории отображений и ее применение. Киев, 1978, с.24–31.
10. Е м е л ь я н о в Е.Г. О связи двух задач об экстремальном разбиении. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1987, т.160, с.91–98.
11. Д у б и н и н В.Н. Об изменении гармонической меры при симметризации. – Мат. сб., 1984, т.124, № 2, с.272–279.
12. К о л б и н а Л.И. Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении. – Докл. АН СССР, 1952, т.84, № 5, с.865–868.
13. К у з ь м и н а Г.В. К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 3. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.100, с.131–145.
14. Б а х т и н а Г.П. О конформных радиусах симметричных неналегающих областей. – В кн.: Современные вопросы вещественного и комплексного анализа. Сб. научн.тр. Ин-т мат. АН УССР, Киев,

I5. К у з ь м и н а Г.В. Об экстремальных свойствах квадратичных дифференциалов с полосообразными областями в структуре траекторий. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I54, с.II0 – I29.
I6. Е м е л ь я н о в Е.Г. К задачам об экстремальном разбиении. – В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций.7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I54, с.76–89.
17. N e h a r i Z. Some inequalities in the theory of functions. – Trans.Amer.Math.Soc., 1953, vol.75, N 2, p.256–286.