S. Kh. Aranson, E. V. Zhuzhoma, Nonlocal Properties of Analytic Flows on Closed Orientable Surfaces,
Trudy Mat. Inst. Steklova, 2004, Volume 244, 6–22

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 244, с. 6–22

УДК 517.917+513.9

Нелокальные свойства аналитических потоков на замкнутых ориентируемых поверхностях[1]

©2004 г. С. Х. Арансон[2], Е. В. Жужома[3]

Поступило в феврале 2003 г.

Исследуются нелокальные асимптотические свойства аналитических потоков, заданных на замкнутых ориентируемых гиперболических поверхностях. Описываются асимптотические направления поднятий на универсальную накрывающую полутраекторий аналитических потоков с произвольным множеством точек покоя. Доказывается ряд предложений о свойствах аналитических потоков: 1) всюду плотность аналитических векторных полей в пространстве векторных полей, снабженном C^r-топологией; 2) ограниченность отклонения полутраекторий аналитических потоков от геодезических с тем же самым асимптотическим направлением. Исследуются свойства точек на абсолюте, достижимых и недостижимых поднятиями на универсальную накрывающую полутраекторий аналитических потоков.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Качественная структура векторных полей на плоскости и замкнутых поверхностях изучалась во многих работах, начиная с работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Идея исследования двумерных динамических систем с помощью нелокальных асимптотических свойств орбит принадлежит А. Вейлю и Д.В. Аносову (см. исторические замечания в [4, 16, 26]). В 60-х годах Д.В. Аносовым была сформулирована концепция о том, что топологическим ключом в нелокальной теории динамических систем и слоений на поверхностях являются изучение расположения на поверхностях незамкнутых кривых без самопересечений и исследование асимптотики поднятия этих кривых на универсальную накрывающую плоскость с помощью абсолюта этой плоскости. В 1987 г. для аналитических потоков на замкнутых поверхностях неположительной эйлеровой характеристики Аносов [1] доказал, что если накрывающая полутраектория не лежит в ограниченной части универсальной накрывающей, то она уходит в бесконечность в определенном асимптотическом направлении. Поэтому естественно рассмотреть вопрос о возможных (нелокальных) асимптотических направлениях полутраекторий аналитических векторных полей или аналитических потоков. Этот вопрос становится еще более актуальным, поскольку, как будет показано в данной работе, аналитические векторные поля, порожденные аналитическими потоками на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, всюду плотны в пространстве C^r-гладких векторных полей на M^2 для любого $0 \le r < \infty$ (см. теорему 2.1).

Для M^2 рода $p = 0$ (для сферы) вопрос о нелокальных асимптотических направлениях полутраекторий не только аналитических, но и топологических потоков не стоит, поскольку таких направлений нет. Для M^2 рода $p = 1$ (для тора) этот вопрос тривиален: все асимптотические направления реализуются полутраекториями аналитических (даже линейных) потоков.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке второго автора Российским фондом фундаментальных исследований (проект 02-01-00098).

[2] 2875 Cowley Way (1015), San Diego, CA 92110, USA.
E-mail: saranson@yahoo.com

[3] Кафедра прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

В настоящей работе рассматриваются нелокальные асимптотические направления поднятий на универсальную накрывающую полутраекторий аналитических потоков на замкнутой ориентируемой поверхности M^2 рода $p \geq 2$ (гиперболической поверхности).

Дадим необходимые определения. Пусть Δ — плоскость Лобачевского в виде модели Пуанкаре, т.е. Δ — единичный круг на комплексной z-плоскости, наделенный метрикой постоянной отрицательной кривизны, которая задается квадратичной формой $ds = 2|dz|/(1-|z|^2)$. Окружность $S_\infty = \partial\Delta = (|z| = 1)$ называется *абсолютом*. Геодезическими плоскости Δ являются дуги евклидовых окружностей, перпендикулярные абсолюту. Известно, что для любой ориентируемой замкнутой поверхности M рода $p \geq 2$ найдется фуксова группа Γ сохраняющих ориентацию изометрий плоскости Δ такая, что $\Delta/\Gamma \cong M$. Обозначим через $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma \cong M$ естественную проекцию, которая является универсальным накрывающим отображением. С метрикой, индуцируемой отображением π, M является ориентируемой *гиперболической поверхностью*.

Пусть $l = \{m(t) \in M : t \geq 0\}$ — полубесконечная непрерывная кривая без самопересечений на M и $\overline{l} = \{\overline{m}(t) \in \Delta \colon t \geq 0\}$ — ее поднятие на Δ. Предположим, что $\overline{l}$ стремится в евклидовой метрике на замкнутом диске $\Delta \cup S_\infty$ при $t \to +\infty$ ровно к одной точке σ абсолюта S_∞. Будем говорить в этом случае, что *кривая $\overline{l}$ имеет асимптотическое направление*, определяемое точкой σ (допуская некоторую вольность, будем говорить также, что l имеет асимптотическое направление), а точка σ *достигается* кривой $\overline{l}$.

Обозначим через $A_{\text{fl}}, A_\infty, A_{\text{an}} \subset S_\infty$ множества точек, достижимых полутраекториями топологических, C^∞-гладких и аналитических потоков на M соответственно. Согласно [2] (см. также [3]) $A_{\text{fl}} = A_\infty$.

Геодезическая ламинация есть семейство попарно не пересекающихся геодезических, каждая из которых не имеет трансверсальных самопересечений, и объединение всех геодезических образует замкнутое множество. Любая простая замкнутая геодезическая образует *тривиальную геодезическую ламинацию*. Обозначим через Λ_{triv} семейство тривиальных геодезических ламинаций на поверхности M. Ламинация называется *нетривиальной*, если она состоит из незамкнутых геодезических. Ламинация *минимальна*, если она не содержит собственных подламинаций. Нетривиальная минимальная ламинация G на M называется *неприводимой*, если любая замкнутая геодезическая на M пересекается с G.

Пусть G — геодезическая ламинация на M. Введем на геодезических G ориентацию. Введенная ориентация называется *согласованной*, если для любой геодезической $l \in G$ и любой точки $m \in l$ существует отрезок без контакта Σ такой, что m принадлежит внутренности Σ и все геодезические из G, пересекающие отрезок Σ, пересекают его с одинаковым индексом пересечения. Геодезическая ламинация называется *ориентируемой*, если на ее слоях можно ввести согласованную ориентацию.

Обозначим через Λ_{or} (соответственно Λ_{non}) множество нетривиальных минимальных ориентируемых (соответственно неориентируемых) геодезических ламинаций на M. Семейства Λ_{or}, Λ_{non} образуют множество нетривиальных минимальных геодезических ламинаций на M, $\Lambda = \Lambda_{\text{or}} \cup \Lambda_{\text{non}}$. В Λ_{non} выделим подмножество $\Lambda_{\text{non}}^{\text{irr}}$ неприводимых геодезических ламинаций.

Пусть G — геодезическая ламинация на гиперболической поверхности M. Ясно, что прообраз $\pi^{-1}(G) \overset{\text{def}}{=} \overline{G}$ является геодезической ламинацией на плоскости Δ. Обозначим через $G(\infty) \subset S_\infty$ множество точек абсолюта, достижимых ламинацией $\overline{G}$. Другими словами, $G(\infty)$ есть множество идеальных концевых точек всех геодезических из $\overline{G}$.

Основной результат данной работы содержится в следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть M — ориентируемая замкнутая гиперболическая поверхность и S_∞ — абсолют плоскости Лобачевского Δ, которая является универсальной накрывающей для M. Тогда*

1) *множество* A_{an} *точек, которое достигается на* S_∞ *поднятиями полутраекторий аналитических потоков на* M, *является континуальным и всюду плотным на* S_∞ *и имеет на* S_∞ *нулевую меру Лебега*;
2) *множество* A_{an} *включает в себя множество точек, достижимых поднятиями простых замкнутых геодезических* (*нижняя мажоранта*);
3) *множество* A_{an} *принадлежит множеству точек, достижимых поднятиями простых замкнутых геодезических и нетривиально рекуррентных геодезических из ориентируемых геодезических ламинаций* (*верхняя мажоранта*).

Утверждения 2), 3) теоремы 1.1 можно записать в виде

$$\Lambda_{\mathrm{triv}}(\infty) \subset A_{\mathrm{an}} \subset \Lambda_{\mathrm{triv}}(\infty) \cup \Lambda_{\mathrm{or}}(\infty).$$

Теорема 1.2. *Пусть* M — *ориентируемая замкнутая гиперболическая поверхность и* S_∞ — *абсолют плоскости Лобачевского* Δ, *которая является универсальной накрывающей для* M. *Тогда*

1) *множество* $\Lambda_{\mathrm{non}}(\infty)$ *точек, которые достигаются неориентируемыми минимальными геодезическими ламинациями, является континуальным, всюду плотным на* S_∞ *и имеет нулевую меру Лебега на* S_∞;
2) *никакая точка из* $\Lambda_{\mathrm{non}}(\infty)$ *не достигается поднятием полутраектории никакого аналитического потока на* M;
3) *множество* $\Lambda_{\mathrm{non}}(\infty)$ *принадлежит множеству точек, достижимых поднятиями полутраекторий* C^∞*-гладких потоков на* M;
4) *любой* C^∞*-поток* f^t, *достигающий точку из* $\Lambda_{\mathrm{non}}(\infty)$, *содержит континуальное множество точек покоя. Более того, если* f^t *достигает точку из* $\Lambda^{\mathrm{irr}}_{\mathrm{non}}(\infty)$, *то* f^t *не имеет ни нетривиально рекуррентных полутраекторий, ни замкнутых негомотопных нулю циклов без контакта.*

Утверждения 2), 3) теоремы 1.2 можно записать в виде

$$\varnothing \neq \Lambda_{\mathrm{non}}(\infty) \subset A_\infty - A_{\mathrm{an}}.$$

Утверждения 1), 2) означают, что на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности имеется достаточно "большое" множество асимптотических направлений, которые реализуются полутраекториями C^∞-гладких потоков, но которые не могут быть реализованы полутраекториями никаких аналитических потоков (доказательство существования таких асимптотических направлений было основным результатом работы [10]).

Для доказательства теоремы 1.1 мы используем (и доказываем) факт об ограниченности отклонений полутраекторий аналитических потоков, который имеет самостоятельный интерес. Дадим необходимые определения.

Рассмотрим поднятие $\overline{l} = \{\overline{m}(t)\colon t \geq 0\}$ кривой l на Δ. Предположим, что $\overline{l}$ стремится к точке σ абсолюта S_∞. Пусть $\overline{g}$ — направленная к σ геодезическая с идеальной концевой точкой σ. Такая геодезическая называется *представителем* асимптотического направления σ. Кривая $\overline{l}$ обладает *свойством ограниченного* (соответственно *неограниченного*) *отклонения*, если для любой геодезической $\overline{g}$, представляющей асимптотическое направление σ, отклонение $\overline{l}$ от $\overline{g}$ ограниченно (соответственно неограниченно).

Ясно, что свойство ограниченного (или неограниченного) отклонения не зависит от выбора представителя асимптотического направления, а для фиксированной кривой l не зависит от выбора поднятия этой кривой. Поэтому можно говорить о свойстве ограниченного (или неограниченного) отклонения кривой l на M. Имеет место следующая

Теорема 1.3. *Пусть f^t — аналитический поток на замкнутой гиперболической ориентируемой поверхности M. Тогда любая полутраектория потока f^t, имеющая асимптотическое направление, обладает свойством ограниченного отклонения.*

Для плоских замкнутых поверхностей (тор и бутылка Клейна) аналогичная теорема была доказана Аносовым [3].

Авторы выражают глубокую благодарность Д.В. Аносову за постоянную поддержку данной тематики и полезные обсуждения. Второй автор работал над статьей во время визита в 2001 г. в университет г. Рен (Франция), поддержанного CNRS. Он благодарит А. Зорича, И. Итенберга и В. Каймановича за плодотворные дискуссии и теплый прием.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Метод Пуанкаре задания потока на поверхностях. Нам потребуется следующее задание потоков на ориентируемых поверхностях, восходящее к Пуанкаре [27]. Любую ориентируемую замкнутую поверхность можно задать аналитическим (даже полиномиальным) уравнением $F(x, y, z) = 0$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Например, уравнение

$$F(x, y, z) = f(x, y) + z^2 = 0,$$

где

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 16)\left[(x + 2)^2 + y^2 - 1\right]\left[(x - 2)^2 + y^2 - 1\right],$$

задает крендель (ориентируемая замкнутая поверхность рода 2). При этом можно считать вложение $M \subset \mathbb{R}^3$ регулярным, так что в каждой точке поверхности определен единичный нормальный вектор

$$\vec{n} = \frac{1}{\Phi}(F'_x, F'_y, F'_z),$$

где Φ — ограничение функции $\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$ на M.

Произвольному гладкому (или аналитическому) векторному полю $\vec{v} = (X, Y, Z)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ можно сопоставить его проекцию

$$\vec{v}_M = \vec{v} - (\vec{n}, \vec{v})\vec{n} \tag{1}$$

на M, которая индуцирует поток соответствующей гладкости на M. Соответствующая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = X - \Phi^{-1}(XF'_x + YF'_y + ZF'_z), \\ \dfrac{dy}{dt} = Y - \Phi^{-1}(XF'_x + YF'_y + ZF'_z), \\ \dfrac{dz}{dt} = Z - \Phi^{-1}(XF'_x + YF'_y + ZF'_z). \end{cases}$$

Поскольку $\Phi > 0$ — аналитическая функция, то гладкость при проекции векторного поля на поверхность не уменьшается. Обратно, произвольное векторное поле $\vec{v}_M$ гладкости C^r на M можно продолжить в $\mathbb{R}^3$, не уменьшая гладкости. Таким образом, описанным методом проекции векторных полей из пространства на поверхность можно получить всевозможные векторные C^r-поля и C^r-потоки на M.

О плотности аналитических векторных полей на поверхностях. Поскольку аналитические функции плотны в пространстве C^r-гладких функций, метод проекции Пуанкаре позволяет доказать следующую теорему о плотности аналитических векторных полей в пространстве C^r-гладких векторных полей на поверхностях. Предполагается, что поверхность является аналитическим двумерным многообразием.

Теорема 2.1. *Аналитические векторные поля всюду плотны в пространстве C^r-гладких векторных полей (наделенном C^r-топологией) на замкнутой ориентируемой поверхности произвольного конечного рода для любого конечного $r \geq 0$.*

Доказательство. Пусть M — замкнутая ориентируемая поверхность, наделенная структурой аналитического многообразия. Она, очевидно, гомеоморфна некоторой поверхности, вложенной в пространство $\mathbb{R}^3$, которую мы обозначим через M_0 и которую можно задать аналитическим уравнением $F(x, y, z) = 0$. Известно (см., например, [14]), что гомеоморфные друг другу аналитические двумерные многообразия аналитически диффеоморфны. Поэтому достаточно доказать теорему для поверхности M_0. Из плотности аналитических функций в пространстве функций на $\mathbb{R}^3$, наделенном C^r-топологией для любого конечного $r \geq 0$, и того, что при проекции (1) близкие векторные поля в $\mathbb{R}^3$ переходят в близкие векторные поля на M_0, вытекает требуемый результат для M_0. $\square$

Нетривиально рекуррентные траектории. Пусть f^t — поток на поверхности M. Траектория l потока f^t называется *ω-рекуррентной* (*α-рекуррентной*), если она принадлежит собственному ω-предельному (α-предельному) множеству, т.е. $l \subset \omega(l)$ (соответственно $l \subset \alpha(l)$). Траектория называется *рекуррентной*, если она одновременно ω- и α-рекуррентна. Рекуррентная траектория *нетривиальна*, если она не является ни точкой покоя, ни периодической траекторией. Топологическое замыкание нетривиально рекуррентной траектории называется *квазиминимальным множеством*.

Продолжение по Бендиксону относительно инвариантных множеств. Для положительной (отрицательной) полутраектории $l^{+(-)}$, являющейся ω-сепаратрисой (α-сепаратрисой) изолированной точки покоя, в работе [17] введено понятие продолжения, которое в дальнейшем стали называть продолжением по Бендиксону. Нам потребуется обобщение этого понятия на тот случай, когда ω-предельное (α-предельное) множество полутраектории $l^{+(-)}$ состоит из изолированной точки покоя и принадлежит некоторому инвариантному замкнутому множеству (у нас это множество будет, как правило, контуром, состоящим из сепаратрисных связей и дуг, заполненных точками покоя).

Будем для определенности рассматривать положительные полутраектории (для отрицательных все аналогично). Известно, что ω-предельное множество $\omega(l^+)$ любой полутраектории l^+ является замкнутым связным инвариантным множеством. Пусть F — замкнутое инвариантное множество, содержащее $\omega(l^+)$, и m_0 — начальная точка полутраектории l^+. По аналогии с [17] будем называть l^+ *ω-сепаратрисой относительно F*, если существуют окрестность $U(F)$ множества F и последовательность точек m_k такие, что

1) $m_k \to m_0$ при $k \to \infty$;
2) $m_0 \notin U(F)$, $m_k \notin U(F)$;
3) через каждую точку m_k проходит положительная полутраектория $l_k^+(m_k)$, которая при увеличении времени сперва входит в $U(F)$, а затем обязательно покидает $U(F)$.

Из теоремы о непрерывной зависимости полутраекторий от начальных условий вытекает, что если некоторая положительная полутраектория l^+ траектории l является ω-сепаратрисой относительно F, то любая положительная полутраектория траектории l также является ω-сепаратрисой относительно F. Поэтому можно говорить о том, что траектория l является ω-сепаратрисой относительно F.

Окрестность $U(F)$, которая фигурирует в определении, будем называть *отталкивающей* для близких к l^+ полутраекторий. Ясно, что любая окрестность множества F, лежащая в $U(F)$, также является отталкивающей.

Полностью аналогично случаю, когда F — изолированная точка покоя, вводятся понятия продолжения по Бендиксону (справа или слева) для ω-сепаратрисы относительно множества F и фиксированной отталкивающей окрестности $U(F)$ для близких к l^+ полутраекторий. Показывается, что для фиксированной $U(F)$ существует продолжение по Бендиксону (справа или слева) ω-сепаратрисы l^+, которое является α-сепаратрисой относительно множества F.

Соасимптотические геодезические. Возьмем поднятие $\bar{l}$ некоторой траектории l потока f^t. Предположим, что $\alpha(\bar{l}) \neq \omega(\bar{l})$ и $\alpha(\bar{l}), \omega(\bar{l}) \in S_\infty$. Тогда существует геодезическая $\overline{g}(\bar{l})$ с идеальными концевыми точками $\alpha(\bar{l})$, $\omega(\bar{l})$, ориентированная от $\alpha(\bar{l})$ к $\omega(\bar{l})$. Эта геодезическая $\overline{g}(\bar{l})$ называется *соасимптотической* для $\bar{l}$. Геодезическая $\pi(\overline{g}(\bar{l})) \overset{\mathrm{def}}{=} g(l)$ называется *соасимптотической для траектории* l. Можно показать, что она не имеет трансверсальных самопересечений. Полностью аналогично можно определить соасимптотическую геодезическую для произвольной кривой, которая имеет различные асимптотические направления в положительную и отрицательную стороны.

Напомним, что группа Γ накрывающих преобразований ориентируемой замкнутой гиперболической поверхности $M \cong \Delta/\Gamma$ состоит из гиперболических дробно-линейных преобразований, каждое из которых имеет две неподвижные точки, принадлежащие абсолюту. Эти точки называются *рациональными*. Остальные точки абсолюта называются *иррациональными*. Если полубесконечная непрерывная кривая достигает рациональную (иррациональную) точку абсолюта, то говорят, что она имеет *рациональное* (соответственно *иррациональное*) *асимптотическое направление*.

Известно [8], что любая нетривиально рекуррентная траектория l имеет соасимптотическую геодезическую $g(l)$. Ее топологическое замыкание $\mathrm{clos}[g(l)]$ является минимальной нетривиальной геодезической ламинацией, которая называется *геодезическим каркасом квазиминимального множества* $\mathrm{clos}(l) \overset{\mathrm{def}}{=} Q$ и обозначается через $\mathrm{clos}[g(l)] \overset{\mathrm{def}}{=} G(Q)$. Любой геодезический луч, принадлежащий геодезической из $G(Q)$, имеет иррациональное асимптотическое направление.

Множество точек покоя аналитического потока. Для ссылок сформулируем в виде леммы описание множества точек покоя аналитического потока из работы Аносова [1, с. 38–39].

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathrm{Fix}\, f^t$ *— множество точек покоя аналитического потока* f^t *на* M. *Тогда* $\mathrm{Fix}\, f^t$ *содержит конечное число изолированных точек и конечное число изолированных простых замкнутых кривых. В оставшемся подмножестве множества* $\mathrm{Fix}\, f^t$ *имеется конечное число точек* N, *разбивающих это подмножество на конечное число попарно не пересекающихся простых дуг с концевыми точками* N. *Вне* N *все кривые из* $\mathrm{Fix}\, f^t$ *аналитические.*

Используя эту лемму, нетрудно получить следующее описание возможных ω-предельных множеств индивидуальной положительной полутраектории аналитического потока, которая имеет асимптотическое направление.

Лемма 2.2. *Пусть* l^+ *— положительная полутраектория аналитического потока* f^t *на* M, *и пусть* $\bar{l}^+$ *— ее поднятие на универсальную накрывающую. Тогда* $\bar{l}^+$ *имеет асимптотическое направление, если и только если* ω*-предельное множество* $\omega(l^+)$ *полутраектории* l^+ *принадлежит одному из следующих типов*:

1) $\omega(l^+)$ *— периодическая негомотопная нулю траектория*;
2) $\omega(l^+)$ *— гомотопически нетривиальный односторонний контур, образованный дугами, состоящими из точек покоя, и сепаратрисными связями* (*некоторые из которых могут быть петлями сепаратрис*);
3) $\omega(l^+)$ *— квазиминимальное множество.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 множество $\operatorname{Fix} f^t$ разбивается на три подмножества (некоторые, возможно, пустые), которые мы обозначим через A, B, C следующим образом: 1) подмножество A состоит из конечного множества изолированных точек; 2) подмножество B состоит из конечного множества аналитических изолированных простых замкнутых кривых; 3) подмножество C состоит из конечного множества аналитических попарно не пересекающихся простых дуг и конечного множества точек N, являющихся концевыми точками этих простых дуг.

Пусть K — компонента множества $M - \operatorname{Fix} f^t$, содержащая l^+. Согласно лемме 2.1 K есть открытая топологическая поверхность конечного рода с конечным числом проколов и дыр, соответствующих точкам и кривым из указанных подмножеств A, B, C. При этом проколы соответствуют изолированным точкам покоя потока f^t, т.е. некоторому подмножеству $A_0 \subset A$, а дыры соответствуют кривым, заполненным точками покоя, принадлежащим подмножествам $B_0 \subset B$, $C_0 \subset C$. Компактифицируем K, заклеив проколы точками множества A_0 и добавив дуги B_0, C_0. В результате получим компактную поверхность, которую обозначим через K_0. Объявим каждую точку добавленного множества $A_0 \cup B_0 \cup C_0$ состоянием равновесия. Тогда исходный поток будет индуцировать на K_0 топологический поток, изолированные точки покоя которого совпадают с A_0, а неизолированные точки покоя образуют границу поверхности K_0. Каждую граничную компоненту стянем в точку и объявим ее состоянием равновесия. Тогда мы получим топологический поток с конечным числом точек покоя на замкнутой поверхности. Требуемый результат теперь следует из [16, Theorem 2.2], где получено аналогичное описание предельных множеств для потоков с конечным числом точек покоя. $\square$

3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОТКЛОНЕНИЯ

В этом разделе доказывается теорема 1.3. Сперва, используя лемму 2.2, докажем лемму о связи между возможными предельными множествами индивидуальной полутраектории и ее асимптотическим направлением.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия леммы* 2.2, *и пусть* l^+ — *непериодическая траектория. Тогда*

1) $\bar{l}^+$ *имеет рациональное асимптотическое направление, если и только если* $\omega(l^+)$ *есть либо периодическая негомотопная нулю траектория, либо гомотопически нетривиальный односторонний контур, состоящий из сепаратрисных связей и дуг* (*возможно, тривиальных*), *образованных точками покоя*;
2) $\bar{l}^+$ *имеет иррациональное асимптотическое направление, если и только если* $\omega(l^+)$ *есть квазиминимальное множество.*

Доказательство. Если $\omega(l^+)$ — либо периодическая траектория, либо односторонний контур, то очевидно, что $\bar{l}^+$ имеет рациональное асимптотическое направление. Поэтому в силу леммы 2.2 если $\bar{l}^+$ имеет иррациональное асимптотическое направление, то $\omega(l^+)$ — квазиминимальное множество. Осталось доказать, что если $\omega(l^+)$ является квазиминимальным множеством, то $\bar{l}^+$ имеет иррациональное асимптотическое направление. Действительно, в $\omega(l^+)$ всюду плотны нетривиально рекуррентные траектории [12]. Если l^+ — нетривиально рекуррентная полутраектория, то требуемый результат следует из [8], где доказано, что любая нетривиально рекуррентная полутраектория имеет иррациональное асимптотическое направление. Рассмотрим случай, когда полутраектория l^+ не является нетривиально рекуррентной. Тогда в ее предельном множестве имеется нетривиально рекуррентная траектория, скажем l_0. Поэтому существует замкнутая трансверсаль C, которую l^+ пересекает бесконечное множество раз. Так как $\omega(l^+)$ является квазиминимальным множеством, то пересечение $C \cap \omega(l^+)$ есть канторовское множество, при этом l^+ пересекает C по смежным интервалам множества $C \cap \omega(l^+)$. Согласно [21] отображение последования, которое индуцируется потоком на C, полусопряжено транзитивному перекладыванию отрезков на окружности, причем полусопрягающее отображение переводит каждый смежный интервал в точку. Отсюда вытекает, что l^+ пересекает C по различным смежным интервалам и в силу леммы 2.1 начиная с некоторого момента времени через концевые точки смежных интервалов, пересекаемых полутраекторией l^+, проходят нетривиально рекуррентные полутраектории. Эти нетривиально рекуррентные полутраектории имеют одинаковое асимптотическое направление с l^+, поскольку длины смежных интервалов, которые последовательно пересекает l^+, стремятся к нулю. Отсюда и из [8] получаем требуемый результат. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Пусть l^+ — положительная полутраектория потока f^t, поднятие которой на универсальную накрывающую имеет асимптотическое направление. Обозначим через l траекторию, содержащую l^+, $l^+ \subset l$.

Если $l = \pi(\bar{l})$ — периодическая траектория или ω-предельное множество $\omega(l^+)$ полутраектории l^+ есть либо периодическая траектория, либо односторонний контур, то доказательство тривиальное и повторяет дословно соответствующее рассуждение в доказательстве теоремы 1 из [9]. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда $\omega(l^+)$ — квазиминимальное множество. Имеются три возможности:

1) l^+ принадлежит нетривиально рекуррентной траектории l;
2) l^+ является нетривиально рекуррентной полутраекторией (в положительном направлении), но принадлежит траектории l, которая не является нетривиально рекуррентной в отрицательном направлении;
3) l^+ не является нетривиально рекуррентной полутраекторией.

Последние две возможности сводятся к первой аналогично тому, как это сделано в [9]. Поэтому далее мы рассматриваем только случай, когда l^+ принадлежит нетривиально рекуррентной траектории l. Местами доказательство повторяет рассуждения в [9]. Для удобства читателя мы приводим основную канву доказательства, схематично рассматривая повторяющиеся с [9] места и тщательно рассматривая новые (напомним, что в [9] аналогичная теорема была доказана для топологических потоков с конечным числом точек покоя).

Пусть $\bar{l}$ — поднятие траектории l на плоскости Лобачевского Δ. Тогда предельное множество $\bar{l}$ состоит из двух точек $\sigma^+ = \omega(\bar{l}), \sigma^- = \alpha(\bar{l}) \in S_\infty$. Пусть $\overline{g}(\bar{l})$ — соответствующая траектории $\bar{l}$ геодезическая (т.е. геодезическая с концевыми точками σ^+, σ^-). Обозначим через $\overline{m}(t) \in \bar{l}$ текущую точку на траектории $\bar{l}$, соответствующую времени t. Будем считать, что $\overline{m}(t) \to \sigma^{+(-)}$, когда $t \to +\infty(-\infty)$. Пусть $[\overline{m}(t); \overline{m}_0(t)]$ — перпендикуляр, опущенный из точки $\overline{m}(t) \in \bar{l}$ на геодезическую $\overline{g}(\bar{l})$, где $\overline{m}_0(t) \in \overline{g}(\bar{l})$. Обозначим через $\overline{d}(t)$ неевклидову длину перпендикуляра $[\overline{m}(t); \overline{m}_0(t)]$. Мы должны доказать, что функция $\overline{d}(t)$ ограничена.

Предположим противное. Тогда существует последовательность t_n такая, что $\overline{d}(t_n) \to +\infty$ при $t_n \to +\infty$. Перейдя, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что последовательность $\pi(\overline{m}_0(t_n)) \in M_g^2$ сходится к некоторой точке $m_0 \in M_g^2$. Возьмем произвольную точку $\overline{m}_0 \in \pi^{-1}(m_0)$. Так как последовательность $\pi(\overline{m}_0(t_n))$ сходится к m_0, то существует последовательность изометрий $\gamma_k \in \Gamma$ такая, что

$$\gamma_k(\overline{m}_0(t_k)) \overset{\text{def}}{=} \overline{m}_k \to \overline{m}_0 \qquad \text{при} \quad t_k \to +\infty.$$

Напомним, что геодезическая $g(l) = \pi(\overline{g}(\bar{l}))$, соответствующая траектории l, является незамкнутой геодезической без самопересечений. Обозначим через $G(Q)$ геодезическую ламинацию $\operatorname{clos} g(l)$. Так как геодезическая ламинация есть замкнутое множество, то точка m_0 принадлежит $G(Q)$ и через нее проходит геодезическая $g_0 \in G(Q)$. Следовательно, через точку $\overline{m}_0$ проходит геодезическая $\overline{g}_0 \in \overline{G}(\overline{Q})$, накрывающая g_0, к которой приближаются в евклидовом смысле геодезические

$$\gamma_k(\overline{g}(\overline{l})) \overset{\text{def}}{=} \overline{g}_k \to \overline{g}_0 \qquad \text{при} \quad k \to \infty$$

(напомним, что сходимость геодезических в евклидовом смысле означает, что идеальные концевые точки σ_k^+, σ_k^- геодезических $\overline{g}_k$ приближаются в евклидовой метрике на окружности S_∞ к соответствующим идеальным концевым точкам σ_0^+, σ_0^- геодезической $\overline{g}_0$).

Так как геодезические $g(l), g_0 \in G(Q)$ незамкнуты, то, не уменьшая общности, можно считать, что точки $\overline{m}_k$ попарно различны, ни одна из них не совпадает с точкой $\overline{m}_0$ и, более того, геодезические $\overline{g}_k$ также попарно различны.

Обозначим через Δ^+, Δ^- открытые полуплоскости, на которые $\overline{g}_0$ разбивает плоскость Δ. Для определенности будем считать, что $\overline{m}_k \in \Delta^-$. Обозначим через $\overline{g}_\perp$ геодезическую, проходящую через точку $\overline{m}_0$ перпендикулярно геодезической $\overline{g}_0$, и через $\overline{p}_+, \overline{p}_- \in S_\infty$ концевые точки геодезической $\overline{g}_\perp$. Очевидно, точки σ_0^+, σ_0^-, $\overline{p}_+, \overline{p}_-$ разделены на абсолюте S_∞. Поэтому для достаточно больших k точки σ_k^+, σ_k^-, $\overline{p}_+, \overline{p}_-$ также будут разделены на абсолюте. Не уменьшая общности, можно считать, что это выполняется для всех k. Геодезический сегмент

$$\gamma_k([\overline{m}(t_k); \overline{m}_0(t_k)]) \overset{\text{def}}{=} \overline{p}_k$$

является перпендикуляром, восстановленным в точке $\overline{m}_k$ к геодезической $\overline{g}_k$. Так как

$$\overline{m}_k \to \overline{m}_0 \qquad \text{и} \qquad \overline{d}(t_k) \to +\infty,$$

то для достаточно большого k конец $\gamma_k(\overline{m}(t_k)) \overset{\text{def}}{=} \overline{m}_k^+$ перпендикуляра $\overline{p}_k$ должен лежать в Δ^+. Поэтому геодезический луч

$$[\overline{m}_0; \overline{p}_+] \overset{\text{def}}{=} \overline{g}_\perp^+,$$

принадлежащий $\overline{g}_\perp$, лежит в полуплоскости Δ^+.

Обозначим через $\overline{K}$ топологический предел траекторий $\overline{l}_n$ на пополненной плоскости Лобачевского, т.е. на $\Delta \cup S_\infty$. По определению топологического предела точка $\overline{x}$ принадлежит множеству $\overline{K}$, если имеется последовательность точек $\overline{x}_n \in \overline{l}_n$, сходящаяся в евклидовой метрике на $\Delta \cup S_\infty$ к $\overline{x}$, когда $n \to \infty$. Очевидно, $\sigma_0^-, \sigma_0^+, \overline{p}_+ \in \overline{K}$ и, более того, $\overline{K} \subset \Delta^+ \cup S_\infty$. Множество $\overline{K}$ связно как топологический предел линейно связных дуг. Так как каждая траектория $\overline{l}_k$ разбивает плоскость Лобачевского, то $\overline{K}$ нигде не плотно. Это множество замкнуто (и, следовательно, компактно) на $\Delta \cup S_\infty$ в силу теоремы о непрерывной зависимости траекторий от начальных условий.

Полностью аналогично [9] показывается, что пересечение $\overline{K}$ с S_∞ не содержит нетривиальных интервалов (см. также [16]). Отсюда и из связности множества $\overline{K}$ вытекает, что $\overline{K} \cap \Delta \overset{\text{def}}{=} \overline{K}_\Delta \neq \varnothing$. Отметим, что множество $\pi(\overline{K}_\Delta)$ лежит в предельном множестве траектории l. Не уменьшая общности, можно считать, что $\pi(\overline{K}_\Delta)$ лежит в ω-предельном множестве $\omega(l)$ траектории l,

$$\pi(\overline{K}_\Delta) \subset \omega(l) = \operatorname{clos} l \overset{\text{def}}{=} Q.$$

Покажем, что $\pi(\overline{K}_\Delta)$ содержит нетривиально рекуррентную в положительном направлении траекторию.

Точки σ_0^+, σ_0^- разбивают абсолют на два интервала. Обозначим через $I_+ \subset S_\infty$ тот интервал, который содержит точку $\overline{p}_+$. Так как $\overline{p}_+ \in \overline{K}$ и $\overline{K} \cap S_\infty$ не содержит нетривиальных интервалов, то существует связное инвариантное подмножество $K \subset \overline{K}_\Delta$, замыкание которого в евклидовой метрике на $\Delta \cup S_\infty$ содержит точку $k_1 \in I_+$. В частности, $k_1 \neq \{\sigma_0^+, \sigma_0^-\}$.

Ясно, что $\pi(K)$ принадлежит квазиминимальному множеству $\omega(l)$. Поэтому $\pi(K)$ не может быть замкнутой траекторией или односторонним контуром, на который навивается траектория l. Отсюда и из леммы 2.1 вытекает, что K содержит хотя бы одну одномерную траекторию, скажем $\bar{l}_0$. При этом $l_0 \subset \omega(l)$ и l приближается неограниченно близко к траектории $\pi(\bar{l}_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} l_0$ справа или слева.

Наша ближайшая цель — показать, что K содержит одномерную траекторию, которая проектируется в нетривиальную ω-рекуррентную траекторию. Если $\omega(l_0)$ содержит одномерные траектории, то в силу теоремы 1 из [12] l_0 — нетривиальная ω-рекуррентная траектория и доказывать нечего. Предположим, что ω-предельное множество траектории l_0 не содержит одномерных траекторий. Так как $l_0 \subset \omega(l)$, то l попадает в любую окрестность множества $\operatorname{Fix} f^t$. С другой стороны, из лемм 2.1, 3.1 и иррациональности асимптотического направления траектории l вытекает, что существует окрестность множества $\operatorname{Fix} f^t$, которую l должна покидать. Следовательно, l является ω-сепаратрисой относительно $\operatorname{Fix} f^t$ с отталкивающей окрестностью, которую мы обозначим через $N(\operatorname{Fix} f^t)$. Будем для определенности считать, что l приближается к l_0 неограниченно близко слева. Тогда l_0 имеет продолжение по Бендиксону слева в положительном направлении (обозначим его через l_1) относительно окрестности $N(\operatorname{Fix} f^t)$. При этом $\alpha(l_1) \subset \operatorname{Fix} f^t$, $l_1 \subset \omega(l)$ и l_1 покидает $N(\operatorname{Fix} f^t)$ хотя бы раз. Нетрудно видеть, что l_1 принадлежит $\pi(\overline{K}_\Delta)$. Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий следует, что l приближается к l_1 неограниченно близко слева. Если ω-предельное множество траектории l_1 не содержит одномерных траекторий, то l_1 имеет продолжение по Бендиксону слева в положительном направлении (обозначим его через l_2) относительно окрестности $N(\operatorname{Fix} f^t)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность одномерных траекторий $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots$ таких, что

- l_k есть продолжение по Бендиксону слева в положительном направлении траектории l_{k-1} для всех $k = 1, \dots$ относительно окрестности $N(\operatorname{Fix} f^t)$;
- $\alpha(l_k) \subset \operatorname{Fix} f^t$, $k \geq 1$;
- $l_k \subset \omega(l)$, $k \geq 1$;
- l_k^+ покидает окрестность $N(\operatorname{Fix} f^t)$ хотя бы раз.

Так как асимптотическое направление траектории l иррационально, то последовательность l_k не может быть периодической.

Покажем, что последовательность l_k, $k \geq 1$, конечна. Предположим противное. Поскольку каждая траектория l_k лежит в предельном множестве нетривиально рекуррентной траектории l, $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ не могут быть замкнутыми кривыми и односторонними контурами. Отсюда и из аналитичности потока вытекает, что каждое множество $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ есть точка покоя.

Рассмотрим траекторию l_k, для которой множества $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ лежат в одной компоненте связности множества $\operatorname{Fix} f^t$. В силу леммы 2.1 компонента связности множества $\operatorname{Fix} f^t$ линейно связна. Поэтому точки $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ можно соединить кратчайшим путем, лежащим в $\operatorname{Fix} f^t$ (если кратчайших путей несколько, то выбираем произвольный). Для каждой такой l_k построим петлю, образованную l_k и кратчайшим путем, лежащим в $\operatorname{Fix} f^t$, и обозначим эту петлю через $l_k \cup [\operatorname{Fix} f^t]$.

Покажем сперва, что негомотопных нулю петель вида $l_k \cup [\operatorname{Fix} f^t]$ конечное число. Действительно, так как все l_k лежат в предельном множестве нетривиально рекуррентной траектории l, то согласно теореме Пуанкаре–Бендиксона для каждой петли $l_k \cup [\operatorname{Fix} f^t]$ имеется не более одной гомотопной ей петли того же вида. Отсюда и из конечности рода поверхности M следует, что негомотопных нулю петель вида $l_k \cup [\operatorname{Fix} f^t]$ конечное число.

Теперь рассмотрим гомотопные нулю петли $l_k \cup [\operatorname{Fix} f^t]$. Если существует бесконечное множество таких петель, ограничивающих непересекающиеся области, то входящие в окрестность $N(\operatorname{Fix} f^t)$ и выходящие из окрестности $N(\operatorname{Fix} f^t)$ точки соответствующих траекторий l_k накапливаются к некоторой точке, лежащей на границе $\partial N(\operatorname{Fix} f^t)$, и эта точка должна быть точкой покоя, что невозможно. Если имеются петли, которые ограничивают пересекающиеся области, то в силу теоремы Пуанкаре–Бендиксона пересечение этих областей ограничено кривыми, составленными из точек покоя. Таких кривых согласно лемме 2.1 конечное число. Таким образом, траекторий l_k, для которых множества $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ лежат в одной компоненте связности множества $\mathrm{Fix}\, f^t$, конечное число.

Рассмотрим теперь траекторию l_k, для которой множества $\alpha(l_k)$ и $\omega(l_k)$ лежат в разных компонентах связности множества $\mathrm{Fix}\, f^t$. Обозначим эти компоненты через F_1, F_2. Пусть имеется траектория l_j, у которой предельные множества лежат также в F_1, F_2, $\alpha(l_j) \cup \omega(l_j) \subset F_1 \cup F_2$. Достроим l_k и l_j до замкнутой кривой с помощью путей, лежащих в F_1, F_2 и соединяющих их предельные множества (напомним, что предельные множества суть точки линейно связных множеств F_1, F_2). Аналогично предыдущему показывается, что таких замкнутых кривых может быть только конечное число. Так как множество $\mathrm{Fix}\, f^t$ согласно лемме 2.1 имеет конечное число компонент связности, то это доказывает конечность последовательности l_k, $k \geq 1$.

Таким образом, последовательность l_k, $k \geq 1$, заканчивается траекторией (обозначим ее через l_*), которая не стремится в положительном направлении к точке покоя. Следовательно, ω-предельное множество l_* содержит хотя бы одну одномерную траекторию. Теперь воспользуемся теоремой Майера [12, теорема 1] (см. также [15, Theorem 2.2] или [26, Theorem 2.4.4]), в которой утверждается, что если незамкнутая траектория лежит в предельном множестве некоторой траектории и содержит в своем ω-предельном множестве одномерные траектории, то данная траектория является нетривиально рекуррентной в положительном направлении. Из этой теоремы Майера следует, что l_* — нетривиально рекуррентная в положительном направлении траектория. Следовательно, существует поднятие $\bar{l}_*$ полутраектории l_*, принадлежащее K. Как поднятие нетривиально рекуррентной полутраектории, положительная полутраектория траектории $\bar{l}_*$ имеет асимптотическое направление. Так как l неограниченно близко подходит к l_* слева, то это асимптотическое направление определяется точкой k_1.

Известно (см., например, [15]), что существует простая замкнутая трансверсаль C, пересекающаяся с l_*, $C \cap l_* \neq \varnothing$. В силу нетривиальной рекуррентности l_* C негомотопна нулю и l_* счетное множество раз пересекает C. Поэтому $\bar{l}_*$ пересекает счетное семейство поднятий $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots$ кривой C. Из разрывности группы накрывающих преобразований вытекает, что идеальные концевые точки кривых $\overline{C}_i$ сходятся в евклидовой метрике на S_∞ к точке k_1. Поэтому существует кривая $\overline{C} \in \pi^{-1}(C)$, которая пересекает $\bar{l}_*$ и идеальные концевые точки которой принадлежат интервалу $I_+ \subset S_\infty$. Следовательно, для достаточно больших k траектория $\gamma_k(\bar{l}) = \bar{l}_k$ пересекает $\overline{C}$ по крайней мере дважды, что невозможно, так как $\overline{C}$ есть трансверсаль накрывающего потока $\overline{f}^t$ и никакая полутраектория не может пересекать трансверсаль $\overline{C}$ более чем в двух точках. Это противоречие доказывает теорему. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательство утверждений основных теорем 1.1, 1.2 мы разобьем на леммы. Следующая лемма есть в точности утверждение 1) теоремы 1.1.

Лемма 4.1. *Множество A_{an} точек, которое достигается поднятиями полутраекторий аналитических потоков на M, является континуальным и всюду плотным на S_∞ и имеет на S_∞ нулевую меру Лебега.*

Доказательство. Известно [18], что в квазиминимальном множестве любого потока имеется континуальное множество нетривиально рекуррентных траекторий. Согласно [8] все, кроме, быть может, счетного подмножества, поднятия нетривиально рекуррентных траекторий из квазиминимального множества достигают различные точки на абсолюте. Поэтому для доказательства континуальности и всюду плотности множества A_{an} на S_∞ достаточно показать существование аналитического потока на M с квазиминимальным множеством. Такой аналитический поток на поверхности M рода $p = 2$ можно построить, отталкиваясь от двух аналитических потоков Черри [19] на торе с квазиминимальными множествами. Можно считать, что один поток Черри имеет отталкивающую грубую точку покоя, а другой притягивающую (например, второй поток получается из первого обращением времени). Удалив достаточно малые окрестности указанных точек покоя и отождествив граничные компоненты полученных дыр с помощью аналитического диффеоморфизма, получим требуемый поток на гиперболической ориентируемой поверхности рода $p = 2$. Если в качестве исходных взять аналитические потоки типа Черри с несколькими грубыми притягивающими и отталкивающими точками покоя (о существовании таких потоков, которые задаются тригонометрическими полиномами, см. в [20]), то аналогичным образом строится требуемый поток на M произвольного рода $p \geq 2$.

Покажем, что A_{an} имеет на S_∞ нулевую меру Лебега. Отметим, что множество рациональных точек на S_∞ счетное и, следовательно, имеет нулевую меру Лебега. Согласно лемме 3.1 полутраектория аналитического потока достигает иррациональную точку тогда и только тогда, когда ее предельное множество является квазиминимальным. В силу [5, 6] такие полутраектории даже топологических потоков достигают на абсолюте множество нулевой меры Лебега. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Следующая лемма эквивалентна утверждению 2) теоремы 1.1.

Лемма 4.2. *Для любой точки $\sigma \in \Lambda_{\mathrm{triv}}$ существует аналитический поток f^t на M, достигающий σ.*

Доказательство. Так как $\sigma \in \Lambda_{\mathrm{triv}}$, то существует ось A_σ некоторой гиперболической изометрии с идеальной концевой точкой σ. Более того, A_σ проектируется в простую замкнутую геодезическую $g = \pi(A_\sigma)$. Достаточно построить аналитический поток с периодической траекторией, которая свободно гомотопна g.

Поверхность M можно задать аналитическим уравнением $F(x, y, z) = 0$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (см. разд. 2). Так как g простая, то существует аналитическая функция $G(x, y, z)$ такая, что система

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

определяет простую замкнутую кривую l, свободно гомотопную g на M. При этом можно считать, что поверхности, определяемые каждым из равенств (2), трансверсально пересекаются вдоль l. Положим $Q(x, y, z) = F^2(x, y, z) + G^2(x, y, z)$ и рассмотрим аналитическую систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Q'_x \overset{\mathrm{def}}{=} X(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q'_z \overset{\mathrm{def}}{=} Y(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = -Q'_x + Q'_y \overset{\mathrm{def}}{=} Z(x, y, z), \end{cases}$$

индуцируемую векторным полем $\vec{v} = (X, Y, Z)$ в $\mathbb{R}^3$. Нетрудно видеть, что l является периодической траекторией поля $\vec{v}$. Поэтому проекция поля $\vec{v}$, определяемая (1), дает аналитическое векторное поле на M с периодической траекторией l. $\square$

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество рациональных точек абсолюта.

Лемма 4.3. $A_{\mathrm{an}} \cap \mathcal{R} = \Lambda_{\mathrm{triv}}$.

Доказательство. Пусть $\xi \in S_\infty$ — рациональная точка, $\xi \in \mathcal{R}$. Тогда существует гиперболическая изометрия $\gamma_\xi \in \Gamma$, для которой ξ — неподвижная точка. Не уменьшая общности, можно считать, что ξ — отталкивающая точка. Существует ось A_ξ изометрии γ_ξ с идеальной концевой точкой ξ. Обозначим через η идеальную концевую точку A_ξ, отличную от ξ. Геодезическая $\pi(A_\xi)$ есть замкнутая геодезическая на M.

Предположим, что ξ достигается некоторым аналитическим потоком f^t. Покажем, что геодезическая $\pi(A_\xi)$ простая. Предположим противное. Тогда существует $\gamma \in \Gamma$ такая, что $A_\xi \cap \gamma(A_\xi) \neq \varnothing$ и пара точек (ξ,η) разбивает пару $(\gamma(\xi),\gamma(\eta))$ на S_∞. Существует положительная полутраектория l^+ накрывающего потока $\overline{f}^t$, которая имеет асимптотическое направление, определяемое точкой ξ. В силу теоремы 1.3 имеется положительное число E такое, что $\bar{l}^+$ лежит в неевклидовой E-окрестности (которую мы обозначим через $\aleph$) оси A_ξ. Так как γ_ξ — изометрия, то $\gamma_\xi^n(\bar{l}^+)$ принадлежит $\aleph$ для любого целого n.

Существуют евклидовы окрестности U_1, U_2 точек $\gamma(\xi)$, $\gamma(\eta)$ соответственно на $\Delta \cup S_\infty$ такие, что $U_1 \cap \aleph = \varnothing$, $U_2 \cap \aleph = \varnothing$, поскольку $\gamma(\xi) \notin \aleph$, $\gamma(\eta) \notin \aleph$. Известно, что γ непрерывно продолжается на $\Delta \cup S_\infty$. Поэтому существуют евклидовы окрестности U_ξ, U_η точек ξ, η соответственно, которые отображаются под действием γ в U_1, U_2. Так как η — притягивающая точка для γ_ξ, то $\gamma_\xi^{n_0}(m_0) \in U_\eta$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, где m_0 — начальная точка $\bar{l}^+$. Следовательно, $\gamma(\gamma_\xi^{n_0}(m_0)) \in U_2$. Напомним, что $\gamma(\xi) \in U_1$. Поэтому $\gamma_\xi^{n_0}(\bar{l}^+)$ должна пересекать $\gamma(\gamma_\xi^{n_0}(\bar{l}^+))$, поскольку полутраектория $\gamma_\xi^{n_0}(\bar{l}^+)$ лежит в неевклидовой E-окрестности $\aleph$ оси A_ξ. Но это невозможно. $\square$

Из леммы 4.3 вытекает, что все рациональные точки множества A_{an} совпадают с Λ_{triv}. Исследуем теперь иррациональные точки множества A_{an}.

Лемма 4.4. *Пусть аналитический поток f^t на M имеет положительную полутраекторию l^+, у которой поднятие $\bar{l}^+$ имеет асимптотическое направление, определяемое иррациональной точкой σ. Тогда $\sigma \in \Lambda$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1 $\omega(l^+)$ — квазиминимальное множество. Поэтому существует негомотопная нулю замкнутая трансверсаль C, пересекающаяся с l^+ бесконечное множество раз. Следовательно, имеется последовательность незамкнутых трансверсалей $\overline{C}_n \in \pi^{-1}(C)$ с идеальными концевыми точками на S_∞ такая, что топологический предел $\overline{C}_n$ есть σ и $\bar{l}^+$ пересекает последовательно $\overline{C}_n$ при $n \to \infty$. Если l^+ не является нетривиально ω-рекуррентной полутраекторией, то $\bar{l}^+$ пересекает каждую $\overline{C}_n$ в некотором открытом интервале множества $\overline{C}_n - \pi^{-1}(\omega(l^+))$. Начиная с некоторого индекса n через концевые точки этих интервалов проходят поднятия нетривиально ω-рекуррентных полутраекторий. Следовательно, всегда можно считать, что σ достигается поднятием нетривиально ω-рекуррентной полутраектории. Будем считать l^+ нетривиально ω-рекуррентной полутраекторией.

Зафиксируем некоторую трансверсаль $\overline{C}$. Согласно [12] l^+ лежит в ω-предельном множестве некоторой нетривиально рекуррентной (в обе стороны) траектории из квазиминимального множества $\omega(l^+)$. Следовательно, существует последовательность поднятий нетривиально рекуррентных траекторий $\bar{l}_k$ таких, что $\bar{l}_k \cap \overline{C}$ стремится к $\bar{l}^+ \cap \overline{C}$ при $k \to \infty$. Поэтому точки $\omega(\bar{l}_k)$ стремятся в евклидовой метрике на S_∞ к σ при $k \to \infty$.

Напомним, что геодезический каркас $G(\omega(l^+))$ множества $\omega(l^+)$ является минимальной нетривиальной геодезической ламинацией и соасимптотические геодезические $\overline{g}(\bar{l}_k)$ принадлежат $\pi^{-1}(G(\omega(l^+)))$. Так как носитель геодезической ламинации есть замкнутое множество, то точка σ достигается ламинацией $G(\omega(l^+))$. $\square$

Таким образом, иррациональные точки множества A_{an} принадлежат дизъюнктному объединению $\Lambda_{\mathrm{non}} \cup \Lambda_{\mathrm{or}}$. В лемме 4.7 будет доказано (наряду с другими фактами) равенство $A_{\mathrm{an}} \cap \Lambda_{\mathrm{non}} = \varnothing$, что завершит доказательство теоремы 1.1. Сейчас мы рассмотрим неориентируемые минимальные геодезические ламинации и свойства множества Λ_{non}.

Согласно [11, 24] (см. также [23]) $\Lambda_{\mathrm{non}} \neq \varnothing$. Ламинация ориентируема, если можно снабдить каждый слой ориентацией таким образом, что для любой точки произвольного слоя существует трансверсальный отрезок, проходящий через данную точку, который пересекается слоями в одном направлении (разумеется, трансверсальный отрезок должен быть снабжен нормальной ориентацией и пересечение в одном направлении означает, что индекс пересечения слоев с этим отрезком один и тот же). Поэтому неориентируемость ламинации означает, что, как бы ни ориентировать слои, всегда найдется точка (эта точка в силу замкнутости носителя ламинации лежит на некотором слое) такая, что произвольный трансверсальный отрезок, проходящий через данную точку, пересекается некоторыми слоями в противоположных направлениях.

Замечание. Более общее понятие ориентируемости семейства кривых F, заполняющих локально компактное метрическое пространство Ω со счетной базой, было введено в 1932 г. Уитни [28] (см. также [13]). В [28] показано, что если это семейство, кроме ориентируемости, обладает также свойством регулярности, то это семейство вкладывается в поток без состояний равновесия на Ω, причем совокупность условий ориентируемости и регулярности является необходимой и достаточной для вложения F в поток на Ω. В нашей ситуации для геодезической ламинации G на M имеем $G = F$, причем G обладает свойством регулярности по Уитни, а пространство Ω, заполненное семейством геодезических G, является частью M, но не совпадает с M. Учитывая эту специфику относительно G и $\Omega \subset M$, мы ввели понятие ориентируемости для $G = F$, отличное от того, которое было введено в [28]. Однако можно показать, что понятие ориентируемости для G, введенное авторами выше, влечет в данном случае ориентируемость по Уитни, и наоборот. Поэтому из [28] имеем, что если G обладает свойством ориентируемости, то G вкладывается в поток f_0^t без точек покоя на $\Omega \subset M$. Однако из [28] не следует, что в этом случае f_0^t можно продолжить до потока f^t на все M, при этом f^t имеет точки покоя. Этот вопрос рассматривался в [6, 7].

Лемма 4.5. *Пусть $\mathcal{L}$ — неориентируемая минимальная нетривиальная геодезическая ламинация и Σ — геодезический сегмент, трансверсально пересекающийся с $\mathcal{L}$ во внутренних точках,* $\operatorname{int}\Sigma \cap \mathcal{L} \neq \varnothing$. *Тогда любая направленная геодезическая $g \in \mathcal{L}$ пересекает Σ в противоположных направлениях.*

Доказательство. Так как любая геодезическая из $\mathcal{L}$ всюду плотна в $\mathcal{L}$, то достаточно показать, что существует хотя бы одна геодезическая из $\mathcal{L}$, пересекающая Σ в противоположных направлениях. Предположим, что все геодезические из $\mathcal{L}$ пересекают Σ в одном направлении. Введем на геодезических из $\mathcal{L}$ ориентацию, считая положительным то направление, которое соответствует положительному направлению в трансверсальной ориентации отрезка Σ. По предположению такое задание ориентации корректно и определяет ориентацию каждой геодезической из $\mathcal{L}$, поскольку все геодезические из $\mathcal{L}$ пересекают Σ. В силу неориентируемости ламинации $\mathcal{L}$ существует геодезическая $g_* \in \mathcal{L}$, проходящая через некоторую точку $x_* \in g_*$, такая, что любой трансверсальный отрезок Σ_0, проходящий через x_*, пересекается некоторыми геодезическими из $\mathcal{L}$ в противоположных направлениях. Геодезическая g_* пересекает Σ. Из теоремы о непрерывной зависимости слоев от начальных условий следует, что Σ также должен пересекаться некоторыми геодезическими из $\mathcal{L}$ в противоположных направлениях. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Следующая лемма, которая составляет утверждение 3) теоремы 1.2, вытекает из теоремы Аносова [2] о вложении простой полубесконечной непрерывной кривой в гладкий поток.

Лемма 4.6. $\Lambda_{\text{non}} \subset A_\infty$.

Доказательство. Для произвольной точки $\sigma \in \Lambda_{\text{non}}$ существует поднятие $\overline{g}$ геодезической g с идеальной концевой точкой σ. При этом g принадлежит некоторой неориентируемой геодезической ламинации и, следовательно, не имеет трансверсальных самопересечений. Согласно [2] существует C^∞-поток f^t, у которого есть траектория, поднятие $\overline{l}$ которой находится на конечном (даже произвольно малом) расстоянии Фреше от $\overline{g}$. Поэтому $\bar{l}$ имеет асимптотическое направление, определяемое точкой σ. Следовательно, f^t достигает σ и $\sigma \in A_\infty$. $\square$

Отметим, что упомянутый в доказательстве леммы 4.6 поток f^t можно построить с предписанной заранее гладкой инвариантной мерой [3]. Следующая лемма эквивалентна утверждениям 2), 4) теоремы 1.2.

Лемма 4.7. *Предположим, что поток f^t на M имеет положительную полутраекторию l^+, поднятие $\bar{l}^+$ которой имеет асимптотическое направление, определяемое точкой из Λ_{non}. Тогда f^t неаналитический и имеет континуальное множество точек покоя. Более того, если $\omega(\bar{l}^+)$ принадлежит $\Lambda_{\mathrm{non}}^{\mathrm{irr}}$, то f^t не имеет ни нетривиально рекуррентных полутраекторий, ни замкнутых трансверсалей, негомотопных нулю.*

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Lambda_{\mathrm{non}}$ — точка, достижимая полутраекторией $\bar{l}^+$, $\sigma = \omega(\bar{l}^+)$. Существует неориентируемая минимальная нетривиальная геодезическая ламинация $\mathcal{L}$, достигающая σ, т.е. имеется геодезическая

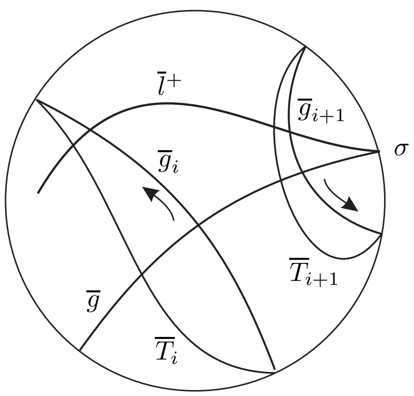
$$\overline{g} \in \overline{\mathcal{L}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi^{-1}(\mathcal{L}),$$

стремящаяся в положительном направлении к σ.

Предположим, что f^t аналитический. Так как точка σ иррациональная, то в силу леммы 3.1 $\omega(l^+)$ есть квазиминимальное множество. Следовательно, существует простая замкнутая трансверсаль T, которая пересекается l^+ бесконечное множество раз [15]. Поэтому T негомотопна нулю и существует простая замкнутая геодезическая g_0, свободно гомотопная T. Тогда для любого поднятия $\overline{T} \in \pi^{-1}(T)$ трансверсали T имеется поднятие $\overline{g}_0 \in \pi^{-1}(g_0)$ геодезической g_0, которое мы обозначим через $\overline{g}_0(\overline{T})$ и которое имеет те же самые идеальные концевые точки (т.е. $\overline{g}_0(\overline{T})$ — соответствующая геодезическая для $\overline{T}$). Так как $\bar{l}^+$ стремится к σ и l^+ пересекает T бесконечное множество раз, то σ есть топологический предел поднятий T. Поэтому σ есть также топологический предел поднятий геодезической g_0. Отсюда вытекает, что $\overline{g}$ должна пересекать бесконечно много поднятий геодезической g_0 и, следовательно, g должна пересекать g_0 бесконечное множество раз.

Зафиксируем естественную параметризацию $\theta\colon \mathbb{R} \to g$. Согласно лемме 4.5 существует возрастающая последовательность параметров $t_i \in \mathbb{R}$ такая, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$, $\theta(t_i) \cap g_0 \neq \varnothing$ и индекс пересечения $g \cap g_0$ в точке $\theta(t_i)$ равен $(-1)^i$, $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, существует последовательность $\overline{g}_i$ поднятий геодезической g_0, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\overline{g}$ пересекает $\overline{g}_i$ ровно в одной точке, скажем $\overline{m}_i$;
2) топологический предел геодезических $\overline{g}_i$ равен σ;
3) индекс пересечения $\overline{g} \cap \overline{g}_i$ в $\overline{m}_i$ равен $(-1)^i$ (см. рисунок).



Так как g_0 свободно гомотопна T, то каждое $\overline{g}_i$ соасимптотично некоторому поднятию $\overline{T}_i$ трансверсали T, т.е. $\overline{g}_i$ и $\overline{T}_i$ имеют одни и те же идеальные концевые точки на S_∞. В силу условия 2) $\overline{l}^+$ пересекает все $\overline{T}_i$ начиная с некоторого индекса $i \geq i_0$. Согласно условию 3) индекс пересечения $\overline{l}^+ \cap \overline{T}_i$ равен $(-1)^i$, $i \geq i_0$. Следовательно, l^+ должна пересекать T в противоположных направлениях, что невозможно. Полученное противоречие означает, что поток f^t неаналитический.

Анализ приведенного рассуждения показывает, что в действительности мы доказали, что l^+ не может бесконечное множество раз пересекать никакую замкнутую негомотопную нулю трансверсаль.

Покажем, что f^t имеет континуальное множество точек покоя. Предположим противное. Так как l^+ имеет асимптотическое направление, то ω-предельное множество $\omega(l^+)$ полутраектории l^+ не может состоять из одной точки и содержит по крайней мере две точки. Из связности ω-предельного множества любой полутраектории и нашего предположения о противном вытекает, что $\omega(l^+)$ содержит одномерную траекторию, скажем l_1. Пусть S_1 — трансверсальный отрезок, проходящий через некоторую точку $a \in l_1$, $a \in \operatorname{int} S_1$. Тогда l^+ пересекает S_1 бесконечное множество раз, поскольку $a \in \omega(l^+)$. В силу следствия 1.1.2 из [15] существует простая замкнутая трансверсаль T, пересекающаяся с l^+. Так как $\overline{l}^+$ имеет асимптотическое направление, то T негомотопна нулю, что невозможно.

Теперь рассмотрим случай, когда точка $\sigma = \omega(\overline{l}^+)$ достижима неприводимой неориентируемой геодезической ламинацией $\mathcal{L}$. Воспользуемся предыдущими обозначениями. Докажем, что f^t не имеет ни нетривиально рекуррентных полутраекторий, ни замкнутых негомотопных нулю трансверсалей. Так как существование нетривиально рекуррентных полутраекторий влечет существование замкнутых негомотопных нулю трансверсалей, то достаточно показать, что последних у потока f^t не существует. Предположим противное. Пусть T_0 — гомотопически нетривиальная замкнутая трансверсаль. Тогда существует замкнутая геодезическая g_0, свободно гомотопная T_0. Из неприводимости геодезической ламинации вытекает, что геодезическая g бесконечное множество раз пересекает g_0. Так как существует поднятие геодезической g, которое стремится к σ, то существует последовательность поднятий геодезической g_0, топологический предел которых есть σ. Следовательно, $\overline{l}^+$ должна пересекать бесконечно много поднятий трансверсали T_0. Поэтому l^+ пересекает T_0 бесконечное множество раз, что согласно доказанному выше невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось показать, что Λ_{non} является континуальным всюду плотным на S_∞ множеством и имеет нулевую меру Лебега. Следуя [22], будем называть геодезическую $\overline{g} \subset \Delta$ *транзитивной*, если для любых интервалов $U_1, U_2 \subset S_\infty$ существует накрывающее преобразование $\gamma \in \Gamma$ такое, что одна идеальная концевая точка геодезической $\gamma(\overline{g})$ лежит в U_1, а другая в U_2. Обозначим через $\mathrm{TR}(\Gamma) \subset S_\infty$ множество точек $a \in S_\infty$ со следующим свойством: любая геодезическая с идеальной концевой точкой a и направленная к a является транзитивной. Мирберг [25] доказал, что лебегова мера множества $\mathrm{TR}(\Gamma)$ равна лебеговой мере абсолюта S_∞. В частности, $S_\infty - \mathrm{TR}(\Gamma)$ имеет нулевую меру Лебега. Поэтому нам достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 4.8. *Множество Λ_{non} всюду плотно на абсолюте, и $\Lambda_{\mathrm{non}} \subset S_\infty - \mathrm{TR}(\Gamma)$. В частности, Λ_{non} имеет нулевую меру Лебега на S_∞.*

Доказательство. Поскольку множество Λ_{non} инвариантно относительно действия группы накрывающих преобразований, а эта группа для ориентируемой замкнутой гиперболической поверхности является фуксовой группой первого рода, то Λ_{non} всюду плотно на абсолюте (орбита любой точки под действием фуксовой группы первого рода всюду плотна на абсолюте).

Докажем включение $\Lambda_{\mathrm{non}} \subset S_\infty - \mathrm{TR}(\Gamma)$. Предположим, что существует точка $\sigma \in \Lambda_{\mathrm{non}} \cap \cap \mathrm{TR}(\Gamma)$. Тогда σ есть идеальная концевая точка поднятия $\overline{g}$ некоторой геодезической $g \in \Lambda_{\mathrm{non}}$

без трансверсальных самопересечений. С другой стороны, $\overline{g}$ транзитивна в силу определения множества TR(Γ). Поэтому g имеет трансверсальные самопересечения. Мы получили противоречие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д.В.* О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях. 1 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, №1. С. 16–43.
2. *Аносов Д.В.* О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях. 2 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, №3. С. 451–478.
3. *Аносов Д.В.* О поведении траекторий на плоскости Евклида или Лобачевского, накрывающих траектории потоков на замкнутых поверхностях. 3 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1995. Т. 59, №2. С. 63–96.
4. *Аносов Д.В., Жужома Е.В.* Асимптотическое поведение накрывающих кривых на универсальных накрытиях поверхностей // Тр. МИАН. 2002. Т. 238. С. 5–54.
5. *Арансон С.Х.* О некоторых арифметических свойствах динамических систем на двумерных многообразиях // ДАН СССР. 1975. Т. 222, №2. С. 265–268.
6. *Арансон С.Х.* Топологическая классификация слоений с особенностями и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях. Ч. 1: Слоения. Горький, 1988. 194 с. Деп. ВИНИТИ, №6887 В-88.
7. *Арансон С.Х., Гореликова И.А., Жужома Е.В.* О влиянии абсолюта на локальные и гладкие свойства слоений и гомеоморфизмов с инвариантными слоениями на замкнутых поверхностях // Докл. РАН. 2001. Т. 379, №2. С. 154–157.
8. *Арансон С.Х., Гринес В.З.* О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных динамических систем) // Мат. сб. 1973. Т. 90, №3. С. 372–402.
9. *Арансон С.Х., Гринес В.З., Жужома Е.В.* О геометрии и топологии потоков и слоений на поверхностях и проблеме Аносова // Мат. сб. 1995. Т. 186, №8. С. 25–66.
10. *Арансон С.Х., Жужома Е.В.* О свойствах абсолюта, влияющих на гладкость потоков на замкнутых поверхностях // Мат. заметки. 2000. Т. 68, №6. С. 819–829.
11. *Жиров А.Ю.* Перечисление гиперболических аттракторов на ориентируемых поверхностях и применения к псевдоаносовским гомеоморфизмам // Докл. РАН. 1993. Т. 330, №6. С. 683–686.
12. *Майер А.Г.* О траекториях на ориентируемых поверхностях // Мат. сб. 1943. Т. 12, №1. С. 71–84.
13. *Немыцкий В.В.* Топологические вопросы теории динамических систем // УМН. 1949. Т. 4, №6. С. 91–153.
14. *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
15. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to the qualitative theory of dynamical systems on surfaces. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr.; V. 153).
16. *Aranson S., Grines V., Zhuzhoma E.* On Anosov–Weil problem // Topology. 2001. V. 40. P. 475–502.
17. *Bendixson I.* Sur les courbes définiés par les equations différentielles // Acta math. 1901. V. 24. P. 1–88.
18. *Cherry T.* Topological properties of solutions of ordinary differential equations // Amer. J. Math. 1937. V. 59. P. 957–982.
19. *Cherry T.* Analytic quasi-periodic curves of discontinuous type on a torus // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1938. V. 44. P. 175–215.
20. *Dos Anjos A.G.* Polynomial vector fields on the torus // Bol. Soc. Brasil. Mat. 1986. V. 17, N 2. P. 1–22.
21. *Gutierrez C.* Smoothing continuous flows on 2-manifolds and recurrences // Ergod. Theory and Dyn. Syst. 1986. V. 6. P. 17–44.
22. *Hedlund G.* Two-dimensional manifolds and transitivity // Ann. Math. 1936. V. 37, N 3. P. 534–542.
23. *Hubbard J., Masur H.* Quadratic differentials and foliations // Acta math. 1979. V. 142. P. 221–274.
24. *Masur H., Smillie J.* Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms // Comment. Math. Helv. 1993. V. 68. P. 289–307.
25. *Myrberg P.J.* Ein Approximationssatz für die Fuchsschen Gruppen // Acta math. 1931. V. 57. P. 389–409.
26. *Nikolaev I., Zhuzhoma E.* Flows on 2-dimensional manifolds. Berlin etc.: Springer, 1999. (Lect. Notes Math.; V. 1705).
27. *Poincare H.* Sur les courbes définies par les equations differentielles. Pt. 4 // J. math. pures et appl. Sér. 4. 1886. V. 2. P. 151–217. Рус. пер.: *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. Мемуар IV. С. 192–263. (Классики естествознания).
28. *Whitney H.* Regular families of curves // Ann. Math. 1933. V. 34, N 2. P. 244–270.