

Общероссийский математический портал

О. В. Бородин, А. О. Иванова, Высоты младших граней в 3-многогранниках,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 2, 250–268

<https://www.mathnet.ru/smj7554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

30 апреля 2025 г., 09:06:34



ВЫСОТЫ МЛАДШИХ ГРАНЕЙ В 3-МНОГОГРАННИКАХ О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Известно, что каждый 3-многогранник содержит грань f степени $d(f)$ не больше 5, называемую *младшей*. Высота $h(f)$ грани f в 3-многограннике есть максимальная степень инцидентных грани f вершин. Тип грани f задается набором ограничений сверху на степени вершин, инцидентных f .

Из двойной n -пирамиды и полуправильного $(3, 3, 3, n)$ -многогранника следует, что $h(f)$ может быть произвольно большой для каждой f , если в 3-многограннике разрешаются грани типов $(4, 4, \infty)$ или $(3, 3, 3, \infty)$, называемые *пирамидальными*.

Через h обозначим минимальную высоту младших граней в заданном 3-многограннике. В 1996 г. Хорняк и Йендроль доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней имеет $h \leq 39$, и построили 3-многогранник с $h = 30$. В 2018 г. мы получили точную оценку $h \leq 30$.

В 1998 г. О. В. Бородин и Д. В. Лопарев доказали, что в любом 3-многограннике без пирамидальных граней и $(3, 5, \infty)$ -граней найдется грань f с $h(f) \leq 20$ при $d(f) = 3$ либо $h(f) \leq 11$ при $d(f) = 4$, либо $h(f) \leq 5$ при $d(f) = 5$, где границы 20 и 5 нелучшаемы.

В настоящей работе доказывается, что в каждом 3-многограннике без пирамидальных граней и $(3, 5, \infty)$ -граней найдется грань f с $h(f) \leq 20$ при $d(f) = 3$ либо $h(f) \leq 10$ при $d(f) = 4$, либо $h(f) \leq 5$ при $d(f) = 5$, где все границы 20, 10 и 5 нелучшаемы.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.202

Ключевые слова: граф, плоский граф, 3-многогранник, структурные свойства, младшая грань, степень, высота, вес.

1. Введение

Под 3-многогранником мы понимаем конечный выпуклый трехмерный многогранник. Как доказал Штейниц [1], 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике P есть число инцидентных ей ребер. k -*Вершина* и k -*грань* суть вершина и грань степени k , k^+ -*вершина* имеет степень не менее k , k^- -*грань* — степень не больше k , и т. д.

Говорят, что f является *гранью типа* (k_1, k_2, \dots) или просто (k_1, k_2, \dots) -*гранью*, если множество степеней инцидентных ей вершин мажорируется вектором (k_1, k_2, \dots) .

Высота $h(f)$ грани f в P есть максимальная степень вершин, инцидентных f . Через $h_i(P)$ и $h(P)$ обозначим минимальную высоту i -граней и младших граней в P соответственно.

Работа профинансирована Российским научным фондом (грант 16-11-10054).

Будем опускать аргумент функций от P , когда P понятен из контекста; например, можно писать h_i и h .

Вес $h(f)$ грани f в P есть сумма степеней ее граничных вершин, а $w(P)$, или просто w , — минимум весов 5^- -граней в P . Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в P соответственно.

Давно известно, что всякий 3-многогранник содержит 5^- -грань, называемую *младшей гранью*. Еще в 1940 г. Лебег [2] дал приближенное описание младших граней в 3-многогранниках.

Теорема 1 (Лебег [2]). *Каждый 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3, 6, \infty), (3, 7, 41), (3, 8, 23), (3, 9, 17), (3, 10, 14), (3, 11, 13), \\ (4, 4, \infty), (4, 5, 19), (4, 6, 11), (4, 7, 9), (5, 5, 9), (5, 6, 7), \\ (3, 3, 3, \infty), (3, 3, 4, 11), (3, 3, 5, 7), (3, 4, 4, 5), (3, 3, 3, 3, 5).$$

Классическая теорема 1 наряду с другими идеями Лебега [2] имеет многочисленные приложения к проблемам раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [3–5]).

Первое усиление теоремы Лебега получено лишь в 2002 г. О. В. Бородиным [6] (параметры, помеченные звездочкой, являются наилучшими из возможных).

Теорема 2 (О. В. Бородин [6]). *Каждый 3-многогранник содержит 5^- -грань одного из следующих типов:*

$$(3, 6, \infty^*), (3, 8^*, 22), (3, 9^*, 15), (3, 10^*, 13), (3, 11^*, 12), \\ (4, 4, \infty^*), (4, 5^*, 17), (4, 6^*, 11), (4, 7^*, 8), (5, 5^*, 8), (5, 6, 6^*), \\ (3, 3, 3, \infty^*), (3, 3, 4^*, 11), (3, 3, 5^*, 7), (3, 4, 4, 5^*), (3, 3, 3, 3, 5^*).$$

Однако за последние десятилетия получено немало точных результатов о строении младших граней для различных классов 3-многогранников. В частности, следующие точные описания получены в 2013–2019 гг. для 3-многогранников с $\delta \geq 4$, для плоских четырехангуляций, а также для 3-многогранников без вершин степени от 5 до 7.

Теорема 3 (О. В. Бородин, А. О. Иванова [7]). *Каждый 3-многогранник без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$(4, 4, \infty), (4, 5, 14), (4, 6, 10), (4, 7, 7), (5, 5, 7), (5, 6, 6),$$

где все параметры неуплучшаемы.

Теорема 4 (О. В. Бородин, А. О. Иванова, А. В. Косточка [8]). *Каждый триангулированный 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3, 4, 31), (3, 5, 21), (3, 6, 20), (3, 7, 13), (3, 8, 14), (3, 9, 12), (3, 10, 12), \\ (4, 4, \infty), (4, 5, 11), (4, 6, 10), (4, 7, 7), (5, 6, 6), (5, 5, 7),$$

где в каждом типе первые два параметра фиксированы, а третий параметр неуплучшаем.

Теорема 5 (О. В. Бородин, А. О. Иванова [9]). *Каждый 3-многогранник без вершин степени от 5 до 7 содержит грань одного из следующих типов:*

$$(4, 4, \infty), (3, 8, 14), (3, 9, 13), (3, 10, 12),$$

$$(3, 3, 3, \infty), (3, 3, 4, 11), (3, 4, 4, 4), (3, 3, 3, 3, 4),$$

где все параметры неупрощаемы.

Еще 1963 г. Коциг [10] доказал, что каждая плоская триангуляция с $\delta = 5$ удовлетворяет неравенству $w \leq 18$, и предположил, что $w \leq 17$. В 1989 г. эта гипотеза Коцига была подтверждена О. В. Бородиным [11] в более общем виде.

Теорема 6 (О. В. Бородин [11]). *Каждый 3-многогранник с $\delta = 5$ содержит $(5, 5, 7)$ -грань или $(5, 6, 6)$ -грань, где все параметры точны.*

Теорема 6 также подтвердила гипотезу Грюнбаума [12] 1975 г. о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, удаление которых из графа позволяет получить две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превышает 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [13] получена оценка 13).

Грани типов $(4, 4, \infty)$ и $(3, 3, 3, \infty)$ называются *пирамидальными*. Отметим, что в $(3, 3, 3, n)$ -архимедовом теле, получающемся из двойной $2n$ -пирамиды удалением каждого четного верхнего вертикального ребра и каждого нечетного нижнего вертикального ребра, каждая грань f пирамидальна и имеет $h(f) = n$, то же верно для двойной n -пирамиды.

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [14] в 1978 г. доказал, что $w \leq 39$, а О. В. Бородин [15] в 1992 г., подтвердив гипотезу Коцига [14] — что $w \leq 29$; эта оценка неупрощаема, как следует из конструкции, получаемой из икосаэдра двукратной вставкой 3-вершин во все грани.

О. В. Бородин [16] в 1998 г. показал, что $w \leq 29$ даже для любого триангулированного 3-многогранника без $(4, 4, \infty)$ -граней, откуда легко следует $h \leq 20$, и что для триангуляций без смежных 4-вершин имеет место точная оценка $w \leq 37$.

Недавно оценка $h \leq 10$ для четырехангулированных 3-многогранников без $(3, 3, 3, \infty)$ -граней, полученная в 1995 г. С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным [17], была доведена нами в [18] до точной оценки $h \leq 8$.

Для произвольных 3-многогранников теорема 1 влечет $w \leq \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорняк и Йендроль [19] усилили в 1996 г. эту оценку следующим образом: если нет ни $(4, 4, \infty)$ -граней, ни $(3, 3, 3, \infty)$ -граней, то $w \leq 47$. О. В. Бородин и Вудал [20] доказали, что запрет $(3, 3, 3, \infty)$ -граней влечет точную оценку $w \leq \max\{29, \Delta + 8\}$.

В 2017 г. мы [21], доведя результат Хорняка и Йендроля до точной оценки, доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней содержит грань (не обязательно младшую) высоты не более 20, а в [22] О. В. Бородин, М. А. Быков и А. О. Иванова еще уточнили этот результат, доказав, что в каждом 3-многограннике без пирамидальных граней найдется 10^- -грань высоты не более 20, причем оба параметра 20 и 10 неупрощаемы.

Хорняк и Йендроль [19] также доказали, что каждый 3-многогранник без пирамидальных граней имеет $h \leq 39$, и построили 3-многогранник с $h = 30$. В 2018 г. мы доказали [23] точную оценку $h \leq 30$.

В 1998 г. О. В. Бородин и Д. В. Лопарев [24] доказали, что для любого 3-многогранника без $(3, 5, \infty)$ -граней и пирамидальных граней выполняется хотя

бы одно из неравенств $h_3 \leq 20$, $h_4 \leq 11$ или $h_5 \leq 5$, причем оценки 20 и 5 неумлучшаемы.

Долгое время не было известно, является ли точной лебеговская оценка $h \leq 11$ для 3-многогранников без 3-граней. В 2015 г. мы [25] доказали, что $h \leq 10$ для таких 3-многогранников, и нашли конструкцию, подтверждающую точность этой оценки.

Цель данной работы — доказать следующую точную версию упомянутого выше результата О. В. Бородина и Д. В. Лопарева [24].

Теорема 7. *Всякий 3-многогранник без $(3, 5, \infty)$ -граней и пирамидальных граней содержит либо 3-грань высоты не более 20, либо 4-грань высоты не более 10, либо 5-грань высоты не более 5, где все границы 20, 10 и 5 неумлучшаемы.*

Еще ряд результатов о строении младших граней в 3-многогранниках можно найти в упомянутых выше работах, обзоре Йендроля и Фосса [26] и нашем обзоре [27], а также статьях [28–36].

2. Доказательство теоремы 7

Неумлучшаемость оценки $h_3 \leq 20$ подтверждается так. Вставив сначала в каждую грань икосаэдра по вершине и соединив каждую новую вершину со всеми граничными вершинами своей грани, получаем триангуляцию T со всеми гранями вида $(3, 10, 10)$. После вставки новых 3-вершин во все грани из T получаем триангуляцию, в которой имеются только грани вида $(3, 6, 20)$ и $(3, 20, 20)$.

Для доказательства неумлучшаемости оценки $h_4 \leq 10$ достаточно вставить конфигурацию из [25], показанную на рис. 1, в каждую грань икосаэдра, в результате чего получим 3-многогранник без треугольников и пирамидальных 4-граней, в котором каждая 4-грань имеет высоту 10. Неумлучшаемость оценки 5 следует из полуправильного $(3, 3, 3, 3, 5)$ -многогранника.

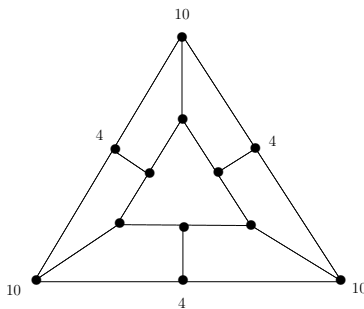


Рис. 1. Фрагмент конструкции с $h_4 = 10$ [25].

Теперь предположим, что 3-многогранник P' является контрпримером к верхним оценкам в теореме 7, имея $h_3 \geq 21$, $h_4 \geq 11$ и $h_5 \geq 6$. За конечное число шагов преобразуем P' в еще один контрпример P , следуя операциям в приведенных ниже замечаниях 1–3. При выполнении этих операций используется 3-связность 3-многогранника P' , вследствие которой добавление диагонали в 4^+ -грань не создает петель и кратных ребер (так как в P' нет разделяющих одно- и двухвершинных множеств) и не нарушает 3-связность (как и добавление любого ребра, не создающего петель и кратных ребер). Другими словами, все вершины в любой грани из P' попарно различны и никакие две из них не

смежны. Также 3-связность не нарушается при добавлении 3-вершины к трем вершинам из 3-границы в P' .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f = v_1v_2\dots$ — 4⁺-грань с $d(v_1) \geq 11$; тогда

- (a) $d(f) \leq 5$, так как иначе можно добавить диагональное ребро v_1v_4 внутрь f ;
- (b) если $d(v_1) \geq 21$, то $d(v_3) \leq 4$ по аналогичной причине.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Не существует 4-вершины v , инцидентной двум 4⁺-граням, каждая из которых содержит 21⁺-вершину, не смежную с v , так как иначе можно соединить v диагоналями с этими 21⁺-вершинами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Не существует 3-границы $f = v_1v_2v_3$ с $d(v_1) \geq 21$, $d(v_2) \geq 21$, $d(v_3) \geq 5$, поскольку иначе вставляем вершину внутрь f и соединяем ее с граничными вершинами грани f .

Нетрудно проверить, что применяемые в замечаниях 1–3 операции не создают запрещенных граней, т. е. пирамидальных, а также имеющих $h_3 \leq 20$, $h_4 \leq 10$ или $h_5 \leq 5$. Конечность числа шагов при построении P следует из того, что каждая из операций в замечаниях 1–3 применяется только к вершинам из исходного контрпримера P' , причем не более чем к трем и бесповторно.

2.1. Перераспределение зарядов. Из формулы Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P получаем

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2d(f) - 6) = -12, \quad (1)$$

где V , E и F суть множества вершин, ребер и граней в P .

Зададим *начальный заряд* $\mu(v) = d(v) - 6$ для каждой $v \in V$ и $\mu(f) = 2d(f) - 6$ для каждой $f \in F$, так что только 5⁻-вершины в V имеют отрицательный заряд. Используя свойства P как контрпримера, локально перераспределим заряды, сохранив их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов в соответствии с (1) равна -12 .

Сначала введем несколько определений и обозначений. Вершины, смежные с вершиной v в циклическом порядке, суть $v_1, v_2, \dots, v_{d(v)}$. *Граница* $\partial(f)$ грани f есть цикл $v_1v_2\dots v_{d(f)}$ из вершин, инцидентных f . Грани, инцидентные вершине v по циклу, обозначим через $f_1 = \dots v_1vv_2, f_2 = \dots v_2vv_3, \dots, f_{d(v)} = \dots v_{d(v)}vv_1$. Вершина *симплициальна*, если не инцидентна ни одной 4⁺-грани.

4-Грань $f = v_1v_2v_3v_4$ с $d(v_1) \geq 11$ назовем *особой*, если $4 \leq d(v_2) \leq 5$ и $d(v_3) = d(v_4) = 3$, а *острой*, если $4 \leq d(v_3) \leq 5$ и $d(v_2) = d(v_4) = 3$.

11-Вершина v есть 11_{bad}-вершина, если каждая грань при v либо особая, либо острая, либо это 3-грань, инцидентная 5⁻-вершине.

Теперь опишем правила R1–R6 перераспределения зарядов (см. рис. 2–5) на P , после применения которых новый заряд $\mu'(x)$ каждой вершины или грани x становится неотрицательным вопреки (1).

R1. Каждая 5⁺-грань f отдает 1 каждой инцидентной 5⁻-вершине, за следующими двумя исключениями:

(R1ex1) если $d(v_1) \geq 6$, $d(v_2) \leq 5$, а $d(v_3) \geq 6$, то f отдает заряд 2 вершине v_2 ;

(R1ex2) если $d(v_1) \geq 6$, $d(v_2) \leq 5$, $d(v_3) \leq 5$, $d(v_4) \leq 5$, а $d(v_5) \geq 6$, то f отдает 2 вершине v_3 .

R2. Каждая 4-грань f отдает каждой инцидентной 5⁻-вершине v_1 :

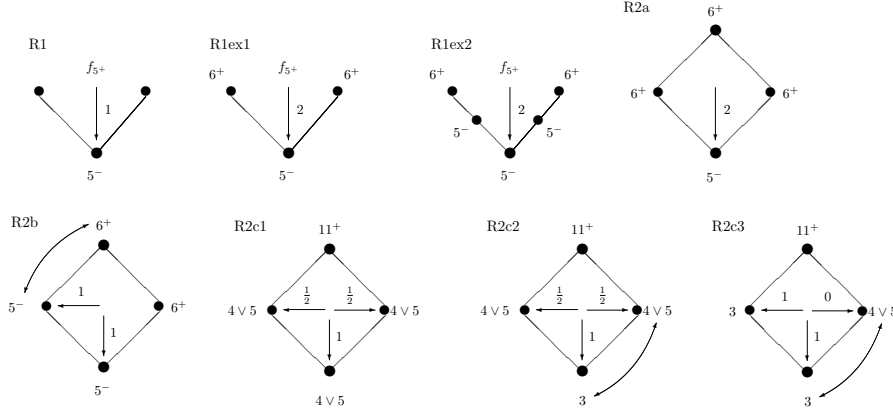


Рис. 2. Правила R1 и R2 перераспределения зарядов.

(a) 2, если эта единственная 5^- -вершина в $\partial(f)$;
 (b) 1, если $\partial(f)$ содержит ровно две 5^- -вершины;
 (c) пусть $\partial(f)$ содержит 5^- -вершины v_1, v_2, v_3 (а значит, $d(v_4) \geq 11$), среди которых точно n_3 вершин имеют степень 3 (здесь $n_3 \leq 2$, так как в P нет пирамидальных граней); тогда

- (c1) 1 отдается вершине v_2 и $\frac{1}{2}$ каждой из v_1 и v_3 при $n_3 = 0$;
- (c2) 1 отдается 3-вершине и $\frac{1}{2}$ каждой из 4^+ -вершин при $n_3 = 1$;
- (c3) 1 каждой 3-вершине и 0 третьей вершине при $n_3 = 2$.

R3. Пусть v — 3-вершина.

(a) Если v симплицальна с $d(v_1) \geq 21$ и $d(v_2) \geq 21$, то v получает через каждую инцидентную грань от каждой смежной 11^+ -вершины:

- (a1) $\frac{3}{4}$, когда $d(v_3) \leq 10$,

или

- (a2) $\frac{1}{2}$ в противном случае.

(b) Если v инцидентна в точности одной 4^+ -грань $f_1 = v_1 v v_2 \dots$, где $d(v_1) \leq d(v_2)$ (как помним, $6 \leq d(v_1) \leq d(v_2) \leq 20$ по замечанию 1, а значит, $d(v_3) \geq 21$), то v получает через грани f_2 и f_3 :

- (b1) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_3 , когда $d(v_2) \leq 10$,
- (b2) $2 \times \frac{3}{4}$ от v_3 и $\frac{1}{2}$ от v_2 , когда $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_2) \geq 11$,

либо

- (b3) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_3 и $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_2 , когда $d(v_1) \geq 11$.

(c) Если v инцидентна в точности одной 3-грань $f_1 = v_1 v v_2$, где $d(v_2) \geq 21$, то v получает:

- (c1) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ от v_2 через грани f_1 и f_2 соответственно, когда $d(v_1) \leq 10$,

либо

(c2) $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_2 через f_1 , когда $d(v_1) \geq 11$, а v_1 не является 11_{bad} -вершиной;

- (c3) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ от v_1 и v_2 через f_1 , когда v_1 есть 11_{bad} .

R4. Каждая 4-вершина v получает от 11^+ -вершины:

- (a) $\frac{1}{2}$ от v_1 через 3-грань $f_4 = v_4 v v_1$, за следующими исключениями:

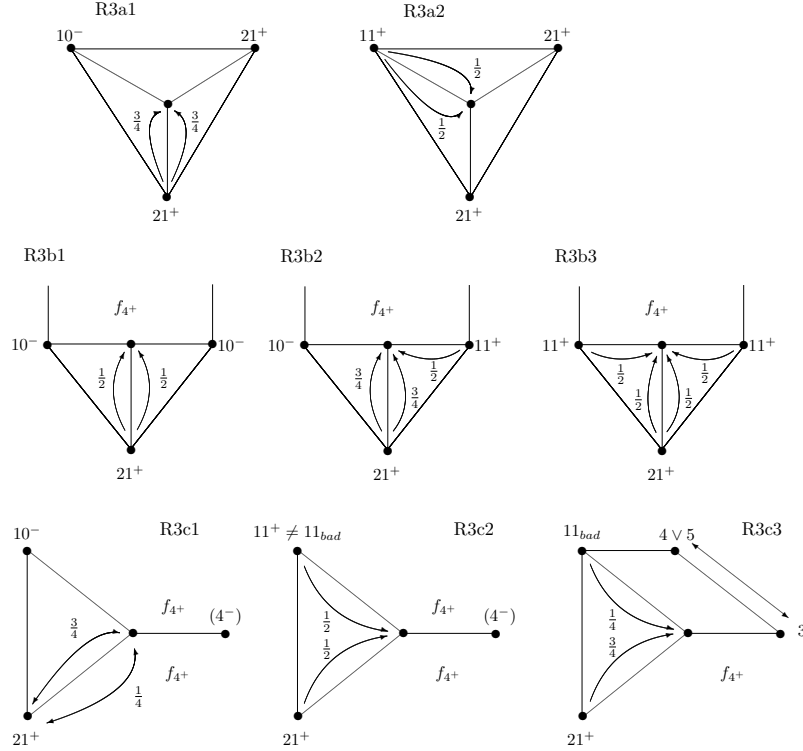


Рис. 3. Правило R3 перераспределения зарядов.

(R4ex1a) если $f_1 = vv_1zv_2$ есть особая 4-грань, f_4 смежна с 4^+ -гранью по ребру vv_4 , а v_1 является 11_{bad} , то v получает $\frac{1}{4}$ от v_1 и $\frac{3}{4}$ от 21^+ -вершины v_4 через грань f_4 ;

(b) $\frac{1}{2}$ через особую грань $f_1 = vv_1yv_2$ с $d(v_1) \geq 11$, за следующим исключением, при котором v_1 отдает 0:

(R4ex1b) $d(v_1) \geq 21$, $d(v_4) \geq 11$ и существуют 3-грани v_1xy с $d(x) \leq 10$ и vv_1v_4 ;

(c) $\frac{1}{2}$ через острую грань $f_4 = vv_1zv_4$, за следующими исключениями, при которых заряд вершиной z не отдается:

(R4ex1c) $d(z) \geq 11$, а f_4 смежна особой или острой грани по ребрам v_1z и v_4z ;

(R4ex2c) $d(z) \geq 21$, а f_4 смежна с 3-гранью v_1zz_1 , у которой $d(z_1) \leq 10$, а также с особой или острой гранью по ребру v_4z ;

(R4ex3c) $d(z) \geq 21$, а f_4 смежна с 3-гранью v_1zz_1 , у которой $d(z_1) \leq 10$, и v_4zz_4 .

R5. Каждая 5-вершина v получает $\frac{1}{2}$ от 11^+ -вершины:

(a) от вершины v_1 через 3-грань $f_5 = vv_1v_5$ с $d(v_5) \geq 6$, за следующими исключениями:

(R5ex1a) если $f_1 = vv_1zv_2$ является особой 4-гранью, f_5 смежна с 4^+ -гранью по ребру vv_5 , а v_1 — 11_{bad} -вершина, то v получает $\frac{1}{4}$ от v_1 и $\frac{3}{4}$ от 21^+ -вершины v_5 ;

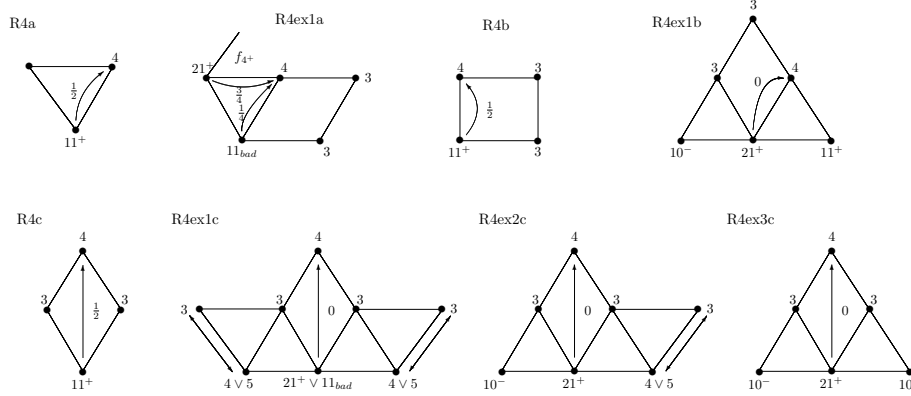


Рис. 4. Правило R4 перераспределения зарядов.

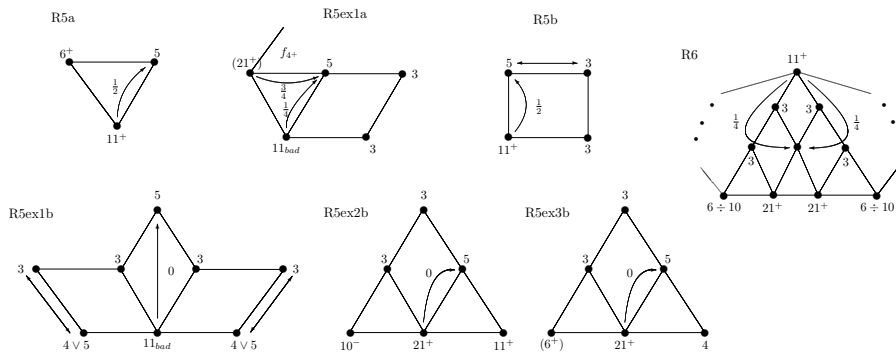


Рис. 5. Правила R5 и R6 перераспределения зарядов.

(b) через острую или особую грань f_1 , за следующими исключениями, при которых v получает 0 через f_1 :

(R5ex1b) $f_1 = vv_1zv_2$, где $d(v_1) = d(v_2) = 3$, а z — 11_{bad} -вершина;

(R5ex2b) $f_1 = vv_1yv_2$, где $d(v_1) \geq 21$, $d(y) = d(v_2) = 3$, $d(v_5) \geq 11$ и существуют 3-грани v_1xy с $d(x) \leq 10$ и vv_1v_5 ;

(R5ex3b) $f_1 = vv_1yv_2$, где $d(v_1) \geq 21$, $d(y) = d(v_2) = 3$, $d(v_5) = 4$ и существуют 3-грани v_1xy (с $d(x) \geq 6$) и vv_1v_5 .

R6. Если 11^+ -вершина v лежит в острой грани $f_2 = vv_2zv_3$ с $4 \leq d(z) \leq 5$, причем f_2 смежна с гранями $f_1 = \dots vv_2x_2y_2$ и $f_3 = \dots vv_3x_3y_3$ такими, что $d(x_i) = 3$ и $d(y_i) \geq 6$ при $2 \leq i \leq 3$, то v посылает $\frac{1}{4}$ вершине z через каждую из граней f_1 и f_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На самом деле на рис. 5 изображена более конкретная ситуация, чем описанная в R6; а именно, это заключительная ситуация в доказательстве случая R4ex1b леммы 8. Кроме того, правило R6 применяется в конце доказательства леммы 9 (см. ниже).

2.2. Проверка того, что $\mu'(f) \geq 0$ для любой грани f в P . Сначала рассмотрим 6^+ -грань f . Можно расчленить ее передачи величиной 2 на 5^- -вершины в границе $\partial(f)$ согласно правилам R1ex1, R1ex2, перебросив по $\frac{1}{2}$ на соседние 6^+ -вершины в $\partial(f)$. В результате такого усреднения каждая вершина

в $\partial(f)$ будет получать не более 1 или $2 \times \frac{1}{2}$. С учетом передач в 1 согласно правилу R1, это рассуждение влечет $\mu'(f) \geq 2d(f) - 6 - d(f) \times 1 \geq 0$.

Пусть $d(f) = 5$. Вспомним, что $\partial(f)$ содержит по меньшей мере одну 6^+ -вершину по условию теоремы. Если f инцидентна четырем 5^- -вершинам, то $\mu'(f) \geq 4 - 4 \times 1 = 0$ по правилу R1; если не более чем двум, то $\mu'(f) \geq 4 - 2 \times 2 = 0$ согласно R1-R1ex2. Если в $\partial(f)$ имеются в точности три 5^- -вершины, то f отдает 2 не более одного раза, а 1 — не более двух раз, поэтому снова $\mu'(f) \geq 0$.

Далее предположим, что $d(f) = 4$. Вспомним, что $\partial(f)$ содержит 11^+ -вершину и не более двух 3-вершин. Если f не инцидентна 5^- -вершинам, то $\mu'(f) = \mu(f) = 2$ ввиду того, что f не участвует в правиле R2. Если в границе f имеется в точности одна 5^- -вершина, то $\mu'(f) = 2 - 2 = 0$ согласно R2a. Если f инцидентна ровно двум 5^- -вершинам, то $\mu'(f) = 2 - 2 \times 1 = 0$ по R2b.

Остается предположить, что $\partial(f)$ содержит три 5^- -вершины. Тогда если в $\partial(f)$ нет 3-вершин или имеются в точности одна или две 3-вершины, то получаем $\mu'(f) = 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ по R2c1, $\mu'(f) = 2 - 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0$ по R2c2, либо $\mu'(f) = 2 - 2 = 0$ по R2c3 соответственно.

Наконец, при $d(f) = 3$ имеем $\mu'(f) = \mu(f) = 0$.

2.3. Проверка того, что $\mu'(v) \geq 0$ для любой вершины v в P . Пусть v смежна с вершинами $v_1, v_2 \dots v_{d(v)}$ по циклу, и пусть f_i — грань $v_i v v_{i+1} \dots$, где $1 \leq i \leq d(v)$ (сложение по модулю $d(v)$).

Вспомним, что наш контрпример P не содержит $(3, 3, 3, \infty)$ -граней, $(4, 4, \infty)$ -граней и $(3, 5, \infty)$ -граней, а каждая его 3-грань инцидентна 21^+ -вершине.

СЛУЧАЙ 1. $d(v) = 3$.

ПОДСЛУЧАЙ 1.1. Вершина v инцидентна трем 3-граням. Заметим, что v имеет по меньшей мере двух 21^+ -соседей, скажем v_1 и v_2 . Если $d(v_3) \geq 11$, то $\mu'(v) = d(v) - 6 + 6 \times \frac{1}{2}$ по правилу R3a2. В противном случае $\mu'(v) = -3 + 4 \times \frac{3}{4}$ по R3a1.

ПОДСЛУЧАЙ 1.2. Предположим, что $f_1 = v_1 v v_2 \dots$ — единственная 4^+ -грань при v , и пусть $d(v_1) \leq d(v_2)$. Согласно замечанию 1(b) имеем $d(v_3) \geq 21$ и $d(v_2) \leq 20$.

Заметим, что f_1 дает 2 на v при $d(f_1) \geq 5$ (согласно R1ex1), а также если $d(f_1) = 4$ и $d(v_2) \leq 10$ (по R2b1). В обоих вариантах v получает не менее $\frac{1}{2}$ от v_3 через каждую из граней f_2, f_3 по R3b1-R3b3, откуда получаем $\mu'(v) \geq -3 + 2 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Остается допустить, что $d(f_1) = 4$ и $d(v_2) \geq 11$. Теперь v получает не меньше 1 от f_1 по R2a или R2b, а также $4 \times \frac{1}{2}$ либо $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4}$ от своих соседей по правилам R3b2, R3b3. Поэтому снова имеем $\mu'(v) \geq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 1.3. Грань $f_1 = v_1 v v_2$ есть единственная 3-грань при v , где $d(v_1) \leq d(v_2)$. По замечанию 1(b) имеем $d(v_2) \geq 21$ и $d(v_3) \leq 4$.

Заметим, что каждая из граней $f_2 = v_2 v v_3 \dots$ и $f_3 = v_1 v v_3 \dots$ дает не меньше 1 вершине v по R1, R2. Если $d(v_1) \leq 10$, то v получает $\frac{3}{4}$ через f_1 и $\frac{1}{4}$ через f_2 от v_2 по R3c1, откуда $\mu'(v) \geq 0$. В противном случае имеем $d(v_1) \geq 11$ и $\mu'(v) \geq -3 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3c2, R3c3.

ПОДСЛУЧАЙ 1.4. Вершина v не инцидентна 3-граням. Здесь $\mu'(v) \geq -3 + 3 \times 1 = 0$ согласно R1, R2.

СЛУЧАЙ 2. $d(v) = 4$.

Лемма 8. Если 4-вершина v не получает $\frac{1}{2}$ через особую грань согласно R4ex1b или через острую грань по R4ex1c–R4ex4c, то все равно $\mu'(v) \geq 0$.

Доказательство. Пусть v подчиняется одному из исключений R4ex1b–R4ex3c из правила R4.

Случай R4ex1b. В добавление к обозначениям, введенным при описании R4ex4b, рассмотрим грани $f_1^* = \dots xyv_2z$, $f_2 = \dots zv_2vv_3$ и $f_3 = \dots v_3vv_4$.

Заметим, что v_3 получает $2 \times \frac{1}{2}$ через 3-грань f_4 по R4a, за исключением случая, когда v_4 является 11_{bad} -вершиной, а грань f_3 — особая, и тогда v_3 получает $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ через f_4 согласно R4ex1a. Тогда требуемое уже следует из R1, кроме варианта $d(f_2) = 4$ и $d(f_3) \leq 4$.

Сначала пусть $d(f_3) = 3$. Если $d(y) \geq 11$, то f_3 также приносит $\frac{1}{2}$ вершине v по тем же причинам. Если $d(y) \leq 10$, то $d(y) \geq 5$ ввиду отсутствия $(4, 4, \infty)$ -граней, а это значит, что v_3 получает $\frac{1}{2}$ от v_4 через f_3 по R4a и $\frac{1}{2}$ от f_2 по R2c2 (как помним, $d(v_2) = 3$).

Остается допустить, что $d(f_3) = 4$. Если $d(v_3) \geq 4$, то v_3 получает не менее $2 \times \frac{1}{2}$ от f_2 и f_3 по R1, R2c1, и R2c2, что и требовалось.

Наконец, предположим $d(v_3) = 3$. Отсюда следует, что грань $f_2zv_2vv_3$ является острой и приносит $\frac{1}{2}$ вершине v согласно R4c, поскольку исключения из правила R4c здесь не применимы ввиду наличия 4^+ -грани $f'_1 = yxv_2z \dots v_1v_2x$, имеющей $6 \leq d(y) \leq 10$, $d(x) = d(v_2) = 3$, и $d(z) \geq 11$.

Таким образом, уже доказано $\mu'(v_3) \geq 0$ ввиду вкладов $1 + \frac{1}{2}$ от f_4 и f_2 , кроме варианта, когда f_3 подчиняется правилу R4ex1b (как и грань f_1).

Но тогда $d(v_4) \geq 21$ и, более того, приходим к симметричной конфигурации, в которой имеется грань $f_3^* = \dots y'x'v_3z$ с $d(x') = 3$, $6 \leq d(y') \leq 10$, а также 3-грань $v_4x'y'$.

Здесь острая грань $f_2 = xv_3yz$ подчиняется правилу R6, проводя $2 \times \frac{1}{4}$ через 4^+ -грани f_1^* и f_3^* , которые не являются ни острыми, ни особыми, поэтому исключения R4ex1c–R4ex3c не применимы к f_2 (см. также R6 на рис. 5). В сочетании с 1, полученной через грань f_4 , и $\frac{1}{2}$ от 11^+ -вершины z через f_2 согласно R4c это дает $\mu'(v) = 0$, что и требовалось.

Случай R4ex1c. Пусть имеется 11^+ -вершина z , инцидентная особым граням $f_1 = zz_1z'_1v_1$, $f_2 = zv_1vv_4$, причем $d(v_1) = d(v_4) = 3$ и $f_3 = zz_4z'_4v_4$. Пусть $f'_1 = z'_1v_1vv_2 \dots$ и $f'_4 = z'_4v_4vv_3 \dots$ — грани, смежные с f_2 по ребрам vv_1 и vv_4 соответственно, а $f'_2 = v_2vv_3 \dots$ — четвертая грань при вершине v .

Понятно, что f'_1 и f'_3 являются 4^+ -гранями. Если $d(f'_1) \geq 5$ и $d(f'_3) \geq 5$, то v получает не менее 1 от каждой из f'_1 и f'_3 согласно R1, а значит, $\mu'(v) \geq -2 + 2 \times 1 = 0$.

Поэтому можно в дальнейшем считать, что $d(f'_1) = 4$. Нетрудно видеть, что $d(v_2) \geq 11$ и v получает $\frac{1}{2}$ от или через f'_1 . Действительно, это следует из R2b, когда f'_1 не является особой, так что пусть она особая, и заметим, что $d(z'_1) = 3$.

Если $d(v_2) \leq 20$, то v_2 посылает $\frac{1}{2}$ вершине v через f'_1 по R4b (очевидно, что R4ex1b не применимо к f'_1). То же верно, когда $d(v_2) \geq 21$, но здесь R4ex1b не применимо, поскольку f'_1 смежна с 4^+ -гранью $\dots v_2z'_1z_1$, где $d(z_1) \leq 5$, а f_1 является особой по предположению.

Если к тому же $d(f'_3) = 4$, то ввиду симметрии $d(v_3) \geq 11$ и v получает $\frac{1}{2}$ от или через грань f'_3 . Нетрудно видеть, что тогда z получает не менее 1 от или через f'_2 . Действительно, это следует из R1 при $d(f'_2) \geq 5$, из R2a,b при $d(f'_2) = 4$ и из R4a или R4ex1a при $d(f'_2) = 3$.

Таким образом, остается допустить, что $d(f'_3) \geq 5$, а это означает, что v собирает не менее $\frac{1}{2} + 1$ от f'_1 и f'_3 , т. е. v требуется еще $\frac{1}{2}$ от или через f'_2 . Если f'_2 — неособая 4^+ -грань, то f'_2 дает не менее $\frac{1}{2}$ вершине v по R1, R2.

Заметим, что v_2 посылает $\frac{1}{2}$ на v также и через грань f'_2 , если та особая. Опять-таки это ясно при $d(v_2) \leq 20$, а в противном случае R4ex1b не может применяться к f'_2 из-за присутствия 4^+ -грани f'_1 .

Наконец, если $d(f'_2) = 3$, то 21^+ -вершина из грани f'_2 уже посылает не менее $\frac{1}{2}$ через f'_2 на v согласно R4a, так что снова $\mu'(v) \geq -2 + 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

СЛУЧАЙ R4ex2c. В основном сохраним обозначения из предыдущего случая, но теперь имеем также 3-грань $f_1 = zz_1v_1$ с $6 \leq d(z_1) \leq 10$. Заметим, что v получает не менее 1 от неособой 4^+ -грани $f'_1 = vv_1z_1 \dots$ по правилам R1, R2. Это означает, что остается допустить, что f'_3 является 4-гранью, откуда следует, что $d(v_3) \geq 11$.

Рассуждая аналогично случаю R4ex1c, видим, что v получает не менее $\frac{1}{2}$ или от v_3 через f'_3 , когда f'_3 является особой, или от самой f'_3 в противном случае. С учетом не менее $\frac{1}{2}$, полученной вершиной v от f'_2 , когда f'_2 является неособой 4^+ -гранью, либо от v_3 через f'_2 в противном случае, это влечет $\mu'(v) \geq 0$.

СЛУЧАЙ R4ex3c. Имеем 3-грани $f_1 = zz_1v_1$ с $6 \leq d(z_1) \leq 10$ и $f_3 = zz_4v_4$ с $d(z_4) \geq 6$.

Если $d(z_4) \leq 10$, то v получает не менее 1 от каждой из 4^+ -граней f'_1 и f'_3 , откуда $\mu'(v) \geq 0$, так что можно далее считать, что $d(z_4) \geq 11$.

Если $d(f'_3) \geq 5$, то v по-прежнему получает не менее 1 от каждой из f'_1 и f'_3 , так что пусть $d(f'_3) = 4$. Если $d(v_3) \geq 4$, то v получает не менее $\frac{1}{2}$ от f'_3 , а кроме того, не менее $\frac{1}{2}$ от f'_2 , когда $d(f'_2) \geq 4$, либо от 21^+ -вершины в грани f'_2 через f'_2 в противном случае, что и требовалось.

Поэтому дополнительно предположим, что $d(v_3) = 3$, а это означает, что грань f'_3 острая. Мы знаем из замечания 1(b), что $d(z_4) \leq 20$, поэтому f'_3 не подчиняется правилу R4ex1c ввиду наличия смежной 3-грани f_3 .

Отсюда следует, что v получает $\frac{1}{2}$ через f'_3 . Остается рассмотреть случай, когда v не получает ничего от или через f'_2 , но тогда f'_2 должна быть особой или острой гранью.

Однако особая f'_2 не подчиняется ни одному из исключений R4ex1b, R4ex1c и R4ex2c ввиду своей смежности с не подходящей для этих целей 4^+ -гранью f'_1 . Следовательно f'_2 также приносит $\frac{1}{2}$ вершине v , что и требовалось.

Наконец, пусть $f'_2 = vv_2xv_3$ — острая грань, откуда $d(v_2) = 3$ и $d(x) \geq 11$. Снова имеем $d(x) \leq 20$ согласно замечанию 1(b), а поэтому опять R4ex1c и R4ex2c не применимы к f'_2 из-за присутствия «неуклюжей» 4^+ -грани f'_1 . Это дает $\mu'(v) \geq 0$. \square

Ввиду леммы 8 можно уже считать, что 4-вершина v не участвует в исключениях к правилу R4, касающихся острых и особых граней. Теперь v получает не менее $\frac{1}{2}$ согласно R1, R2 от каждой инцидентной 4^+ -грани, не являющейся ни острой, ни особой, а также $\frac{1}{2}$ через любую инцидентную 3-грань и особую или острую 4-грань от 11^+ -вершины в этой грани по правилам R4a, R4b или R4c, откуда $\mu'(v) \geq -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

СЛУЧАЙ 3. $d(v) = 5$.

Лемма 9. Если 5-вершина v получает 0 через острую или особую грань по R5ex1b–R5ex3b, то все равно $\mu'(v) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что v получает 0 через острую грань $f_2 = vv_2zv_3$ от 11^+ -вершины z согласно исключению R5ex1b. Ввиду симметрии между f_1 и f_3 достаточно заметить, что грань $f_1 = v_1vv_2z^* \dots$ приносит не менее $\frac{1}{2}$ вершине v . Отметим, что $d(z^*) \leq 5$ в R5ex1b, поэтому $d(f_1) \geq 4$.

Ввиду R1 и R2, нам уже нечего доказывать, кроме случая особой грани f_1 , в котором $d(z^*) = 3$ и $d(v_1) \geq 11$. Кроме того, f_1 должна подчиняться R5ex2b, т. е. давать 0 вершине v через f_1 . Если так, то $d(v_1) \geq 21$, но f_1 смежна с 4^+ -гранью $f'_1 = v_1z^*z^{**} \dots$ при вершине v_1 , поскольку $d(z^{**}) \leq 5$ ввиду участия грани f_2 в R5ex1b; противоречие.

Пусть теперь v получает 0 через грань $f_1 = vv_1yv_2$ согласно R5ex2b; тогда $d(v_1) = d(z) = 3$, $d(v_2) \geq 21$, $d(v_3) \geq 11$ и существует 3-грань $f_2 = vv_2v_3$. Теперь для доказательства $\mu'(v) \geq 0$ достаточно заметить, что v получает $2 \times \frac{1}{2}$ от v_2 и v_3 через f_2 согласно R5a, когда v_3 не является 11_{bad} -вершиной, либо $\frac{1}{2}$ от v_2 через f_2 по R5ex1a и $\frac{1}{2}$ от v_3 по R5b.

Наконец, пусть v получает 0 от или через $f_1 = vv_1yv_2$ согласно R5ex3b; тогда $d(v_1) = d(y) = 3$, $d(v_2) \geq 21$, $d(v_3) = 4$ и существуют 3-грани $f'_1 = xyv_2$ и $f_2 = vv_2v_3$. Заметим, что ни R5ex1b, ни R5ex2b не применимо к грани f_3 . Если применимо R5ex3b, то $d(v_5) \geq 21$ и $d(v_4) = 4$, и тогда v получает 1 от f_3 по R2c1.

Так что уже можно считать, что v получает не менее $\frac{1}{2}$ от или через f_1 . Остается только исключить вариант, когда v получает 0 от или через каждую из граней f_3 и f_4 . Такое может случиться, лишь если R5ex3b применимо к f_4 , но это означает, что $d(v_4) \geq 21$, $d(v_5) = 3$, $d(f_3) = 3$, f_4 является особой и имеется 3-грань $v_5x'y'$ с $d(x') \geq 6$. В этом случае v получает либо 1 согласно R1 от f_5 при $d(f_5) \geq 5$, либо $\frac{1}{2}$ через острую грань f_5 по R5b и $2 \times \frac{1}{4}$ по R6 через грани f_1 и f_4 , поэтому $\mu'(v) = 0$, что и требовалось доказать. \square

Теперь из леммы 9 в сочетании с правилами R1, R2 и R5 следует, что $\mu'(v) \geq 5 - 6 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$, если наша v инцидентна не менее чем двум 4^+ -граням.

С другой стороны, v должна быть инцидентна хотя бы одной 4^+ -грани, так как иначе у симплицальной вершины v найдутся два последовательных 21^+ -соседа ввиду нечетности, что противоречит замечанию 3.

Остается предположить, что $f_1 = v_1vv_2 \dots$ — единственная 4^+ -грань при v . Заметим, что $d(v_1) \geq 4$ и $d(v_2) \geq 4$. Ввиду замечания 1(b) и симметрии можно считать, что $d(v_1) \leq 20$. Отсюда получаем $d(v_5) \geq 21$, $d(v_4) \leq 20$, $d(v_3) \geq 21$ и $d(v_2) \leq 20$.

Если $d(f_1) \geq 5$, то v получает не менее 1 от f_1 по R1, и тогда $\mu'(v) \geq -1 + 1 = 0$. Так что пусть далее $d(f_1) = 4$. Если $d(v_1) \geq 11$, то v_1 не является 11_{bad} -вершиной, поскольку грань f_1 не является ни острой, ни особой, а значит, v получает $2 \times \frac{1}{2}$ от v_1 и v_5 через грань f_5 по R5a, что и требовалось.

Ввиду симметрии пусть $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_2) \leq 10$. Это означает, что $\partial(f_1)$ содержит 11^+ -вершину, лежащую напротив вершины v , поэтому v получает не менее 1 от f_1 по правилам R2a, R2b и R2c1, что снова дает $\mu'(v) \geq 0$.

СЛУЧАЙ 4. $6 \leq d(v) \leq 10$. Поскольку начальный заряд $\mu(v) = d(v) - 6$ вершины v неотрицателен и никакие положительные заряды вершина v по правилам R1–R6 не теряет, имеем $\mu'(v) \geq 0$.

СЛУЧАЙ 5. $11 \leq d(v) \leq 20$. Поскольку v посылает не более $\frac{1}{2}$ через каждую инцидентную грань согласно R1–R6, получаем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times$

$\frac{1}{2} = \frac{d(v)-12}{2}$. Таким образом, остается рассмотреть вариант $d(v) = 11$ и покрыть дефицит в $\frac{1}{2}$.

Можно считать, что v инцидентна хотя бы одной 4^+ -грани, скажем f_2 , так как иначе v будет инцидентна 3-грани с двумя 21^+ -вершинами в границе, а это дает $\mu'(v) \geq 5 - (11 - 1) \times \frac{1}{2} = 0$.

Если грань f_2 участвует в правиле R6, то $4 \leq d(f_1) \leq 5$ согласно замечанию 1(a), причем f_1 не острая и не особая. Это означает, что f_1 забирает от v в точности $\frac{1}{4}$. То же самое верно для грани f_3 , что влечет $\mu'(v) \geq 5 - (11 - 2) \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$, так как такая вершина v не посылает больше $\frac{1}{2}$ через инцидентную грань согласно R3–R5.

Далее пусть v не участвует в R6. Заметим, что наличие хотя бы одной неособой и неострой 4^+ -грани при v , не проводящей заряда от v по R1–R6, уже дает $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$.

Таким образом, можно считать, что v полностью окружена острыми и особыми 4-гранями, а также 3-гранями, инцидентными 5^- -вершинам; другими словами, v является 11_{bad} -вершиной.

Теперь предположим, что v инцидентна хотя бы одной 3-грани; тогда заметим, что v имеет четное число инцидентных 3-граней, поскольку каждая 3-грань при v содержит 21^+ -соседа и 5^- -соседа вершины v . Более того, всякий 21^+ -сосед вершины v входит в две 3-грани при v .

Рассмотрим любую максимальную цепь P_{2n} из 3-граней при v ; понятно, что P_{2n} ограничена с обоих концов 5^- -соседами вершины v , так как v уже 11_{bad} -вершина.

Поскольку каждая концевая 3-грань в P_{2n} смежна с острой или особой 4-гранью при v , а значит, забирает не более $\frac{1}{4}$ от v по правилам R3c3, R4ex1a или R5ex1a, получаем $\mu'(v) \geq 5 - (11 - 2) \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$.

Наконец, пусть v полностью окружена острыми и особыми 4-гранями. Тогда v смежна лишь с 5^- -вершинами, причем не имеет двух последовательных 4^+ -соседей. Из нечетности $d(v)$ следует, что у v найдутся два 3-соседа рядом, пусть v_1 и v_2 . Но v не посылает заряда через острую грань $f_1 = \dots v_1 v v_2$ ввиду исключений R4ex1c и R5ex1b, поэтому $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$, что и требовалось доказать.

СЛУЧАЙ 6. $d(v) \geq 21$. Сначала отметим, что v посылает не более $\frac{3}{4}$ через любую грань $f_2 = v_2 v v_3 \dots$ по правилам R3–R6. Действительно, при $d(f_2) = 3$ это сразу следует из R3–R5. Пусть $d(f_2) \geq 4$. Тогда v посылает $\frac{1}{4}$ вершине v_2 по R3c1, когда $d(v_2) = 3$ и имеется 3-грань $v_1 v v_2$ с $d(v_1) \leq 10$. То же верно для v_3 . Кроме того, f_2 может посылать $\frac{1}{2}$ вершине степени 4 или 5, если f_2 есть острая или особая 4-грань. Поэтому если f_2 не является ни острой гранью, ни особой, то v посылает не более $2 \times \frac{1}{4}$, а если f_2 острая, то v не может посылать сразу $\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4}$ ввиду исключения R4ex3c.

Поскольку $\mu' \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{3}{4} = \frac{d(v)-24}{4}$, уже доказано требуемое для $d(v) \geq 24$. Чтобы доказать $\mu' \geq 0$ при $21 \leq d(v) \leq 23$, надо найти одну или несколько граней при v , уводящих менее $\frac{3}{4}$ от v .

Доход $\sigma(v_i, v_{i+1})$ от грани $f_i = v_i v v_{i+1}$ (сложение здесь и далее по модулю $d(v)$) есть (неотрицательная) разность между $\frac{3}{4}$ и зарядом, посылаемым вершиной v через f_i по правилам R3–R6. А *доход* $\sigma(v)$ вершины v есть суммарный доход от всех граней, инцидентных v . Таким образом надо проверить, что $\sigma(v)$ не менее $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ при $d(v) = 23$, $d(v) = 22$ и $d(v) = 21$ соответственно.

p-Получателем S_p будем называть такую последовательность из $p + 1$ подряд идущих вершин $v_{i+1} \dots v_{i+p+1}$ при v , что $d(v_{i+1}) \geq 6$, $d(v_{i+k}) \leq 5$ при любых $2 \leq k \leq p - 1$, а $d(v_{i+p}) \geq 6$. Таким образом, f_k , где $1 \leq k \leq p$, есть k -я грань $v_{i+k}vv_{i+k+1} \dots$ при получателе S_p . Ввиду симметрии можно в дальнейшем считать, что $d(v_{i+1}) \leq d(v_{p+i+1})$.

Очевидно, что множество граней при v разбито 6^+ -соседями вершины v на получатели. Пусть $\sigma(S_p)$ — суммарный доход от всех граней получателя S_p . Стало быть, $\sigma(S_p) \geq 0$ для любого S_p , а $\sigma(v)$ есть сумма всех $\sigma(S_p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если вершина v участвует в правиле R6, то $\sigma(v) \geq \frac{5}{4}$. В самом деле, тогда v посылает $\frac{1}{2}$ через острую грань f_2 по R4c, R5b, а также по $\frac{1}{4}$ через каждую из неострых и неособых смежных 4^+ -граней f_1 и f_3 (которые фактически являются 5^- -гранями ввиду замечания 1(a)). Таким образом, f_1 , f_2 и f_3 уже приносят суммарный доход $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ вершине v , что и требовалось.

Поэтому в дальнейшем можно считать, что v не участвует в R6. Отсюда следует, что v может посылать $\frac{1}{4}$ через 4^+ -грань только по правилу R3c1; а именно, на 3-вершину v_1 , лежащую в 3-гранн v_1vv_2 , где $d(v_2) \leq 10$.

Следующая лемма описывает некоторые получатели $S_p = v_1 \dots v_{p+1}$, дающие ненулевой доход $\sigma(S_p)$, с учетом величины p и степеней их граничных вершин (см. также рис. 6, на котором 6^+ - и 5^- -вершины изображены соответственно черными и белыми кружками).

Лемма 10. Доход $\sigma(S_p)$ от получателя $S_p = v_1 \dots v_{p+1}$ с $d(v_1) \leq d(v_p)$ составляет:

- (a) $\sigma(S_1) = \frac{3}{4}$;
- (b1) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ при $d(v_3) \leq 10$ или $d(v_1) \geq 11$;
- (b2) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{4}$, если $d(v_1) \leq 10$, а v_3 не является 11_{bad} -вершиной;
- (b3) $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ при $d(v_1) \geq 11$;
- (c1) если $d(v_4) \leq 10$, то $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$;
- (c2) $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ при $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_4) \geq 11$, если v_4 не является 11_{bad} -вершиной, либо $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$ в противном случае;
- (c3) если $d(v_1) \geq 11$, то $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$, когда обе v_1 и v_4 являются 11_{bad} -вершинами, $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$, когда в точности одна из v_1 и v_4 является 11_{bad} , и $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$, когда ни v_1 , ни v_4 не является 11_{bad} -вершиной;
- (d) пусть $d(v_5) \geq 11$; тогда $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{2}$, если v_5 не является 11_{bad} -вершиной, и $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{4}$ в противном случае;
- (e1) $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$ при $d(v_6) \leq 10$;
- (e2) $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$, когда $d(v_6) \geq 11$, а v_6 не является 11_{bad} -вершиной;
- (e3) $\sigma(S_5) \geq \frac{1}{2}$, когда v_6 является 11_{bad} -вершиной;
- (f) $\sigma(S_6) \geq \frac{1}{2}$;
- (g) $\sigma(S_p) \geq \frac{3}{4}$ при всех $p \geq 7$.

Доказательство. (A) При $p = 1$ утверждение $\sigma(S_1) = \frac{3}{4}$ прямо следует из просмотра правил R1–R5.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пусть $p \geq 2$.

(a) Если $d(f_1) \geq 4$, то f_1 не является ни острой, ни особой и может забирать не более $\frac{1}{4}$ от v по R3–R5 (фактически $\frac{1}{4}$ может отдаваться через f_1 лишь по R3c1). Поэтому такого вида S_p имеет $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$ и $\sigma(S_p) \geq \frac{3}{4}$ при всех $p \geq 3$, что верно и для грани f_p .

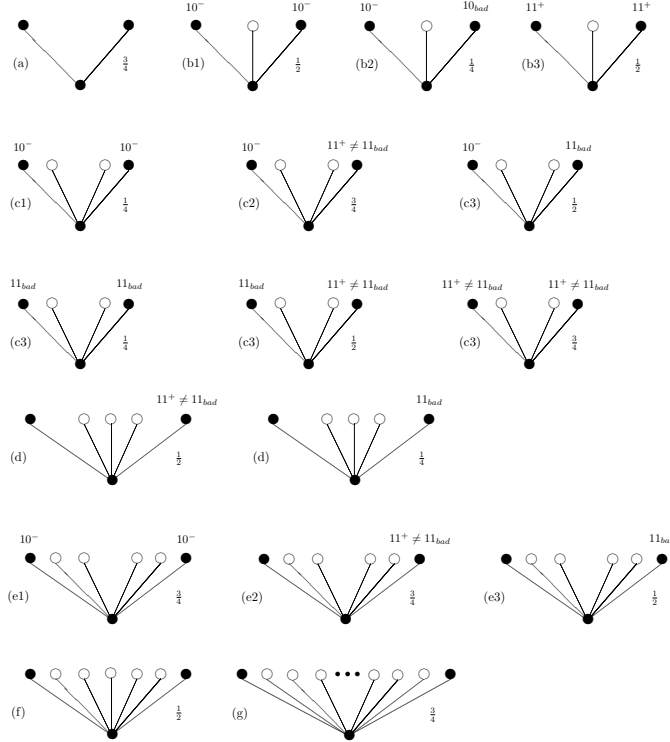


Рис. 6. Получатели и минимальные доходы от них согласно лемме 10.

(b) Если $d(f_1) = 3$, то f_1 уводит $\frac{3}{4}$ от v только по R3a1, R3b2, R3c1 и R3c3 при $d(v_2) = 3$, либо по R4ex1a или R5ex1a при условии, что $4 \leq d(v_2) \leq 5$, v_1 является 11_{bad} -вершиной, а $d(f_2) \geq 4$; в остальных случаях f_1 уводит $\frac{1}{2}$ от v .

(B) При доказательстве леммы 10(b) можно считать ввиду замечания 6(a), что $d(f_1) = d(f_2) = 3$, так как иначе доказывать уже нечего.

Теперь если $d(v_3) \leq 10$ (а значит, $d(v_1) \leq 10$ в соответствии с принятым ранее допущением), как в п. (b1), то v посылает не более $\frac{1}{2}$ вершине v_2 через каждую из граней f_1, f_2 согласно R3b1, R4a и R5a, откуда следует требуемое $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$.

Далее пусть $d(v_1) \leq 10$, а v_3 является 11_{bad} -вершиной, как в (b2). Отметим, что $d(v_3) \neq 3$, поскольку иначе v_2 инцидентна 4^+ -границе, не являющейся ни острой, ни особой, вопреки определению вершины v_3 . Поэтому v посылает не более $\frac{1}{2}$ через каждую из 3-граней f_1 и f_2 , а этого достаточно.

Наконец, пусть $d(v_1) \geq 11$ (так что и $d(v_3) \geq 11$). Теперь v по-прежнему отдает $\frac{1}{2}$ через каждую из 3-граней f_1, f_2 по одному из правил R3a2, R3b3, R4a или R5a, поскольку R4ex1a и R5ex1a неприменимы здесь, а значит, такой S_2 тоже имеет $\sigma(S_2) \geq \frac{1}{2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При $p \geq 3$ ввиду замечания 6(a) можно считать, что $d(f_1) = d(f_p) = 3$, поскольку иначе уже имеем $\sigma(v) \geq \frac{3}{4}$. Посмотрим, сколько заряда может быть послано через f_2 .

(a) Если $d(f_2) \geq 4$, то грань f_2 проводит согласно R3c1 не более $\frac{1}{4}$ при $p \geq 4$ и не более $2 \times \frac{1}{4}$ при $p = 3$; кроме того, острая или особая грань f_2 проводит $\frac{1}{2}$ по R4b, R4c и R5b, если к ней не применяются исключения из этих правил.

(b) Если $d(f_2) = 3$, то $4 \leq d(v_2) \leq 5$, а значит, ввиду R4a и R5a, грань f_1 проводит заряд $\frac{1}{2}$, тогда как f_2 проводит не более $\frac{1}{2}$.

(C) Обратимся к доказательству леммы 10(c). Если $d(f_2) = 3$, то $d(v_2) \neq 3 \neq d(v_3)$ и по меньшей мере одна из v_2, v_3 является 5-вершиной, поэтому v посылает не более $\frac{1}{2}$ через каждую из граней f_1, f_2, f_3 согласно R4a и R5a, что дает $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$. Итак, далее можно считать, что $d(f_2) \geq 4$.

Сначала пусть $d(v_4) \leq 10$. Если $d(v_2) \neq 3$, то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_1 и не более $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ через f_2 , что объяснялось в замечаниях 6 и 7, откуда $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$, как и требуется в лемме 10(c1). Из-за симметрии можно считать, что $d(v_2) = d(v_3) = 3$. Ввиду R4ex3c вершина v посылает не более $2 \times \frac{1}{4}$ через f_2 , откуда снова следует $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$.

Далее предположим, что $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_4) \geq 11$. Если $d(v_2) \neq 3$, то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_1 и не более $\frac{1}{2}$ через f_2 , поскольку исключение R3c1 не применимо к v_3 . Если вершина v_4 не является 11_{bad} , то v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_3 по R3c2 или R4a, откуда $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$, как в лемме 10(c2). В случае 11_{bad} -вершины v_4 получаем требуемое условие $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$.

Пусть теперь $d(v_2) = 3$. Правила R4b и R5b здесь не применимы к f_2 ввиду исключений R4ex1b, R4ex3c и R5ex2b, поэтому v посылает через f_2 лишь $\frac{1}{4}$ вершине v_2 по R3c1. Через грань f_3 наша вершина v посылает $\frac{1}{2}$ по R3c2, R4a, и R5a, когда v_4 не является 11_{bad} -вершиной, а иначе не более $\frac{3}{4}$, что дает оценки $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ либо $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$ соответственно, требуемые в лемме 10(c2).

Наконец, пусть $d(v_1) \geq 11$ (как помним, $d(v_4) \geq d(v_1)$). Теперь v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_2 , так как R3c1 неприменимо. Через f_1 вершина v посылает $\frac{1}{2}$, когда v_1 не является 11_{bad} . По симметрии это же верно для граней f_3 и v_4 . Отсюда $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$, когда и v_1 , и v_4 являются 11_{bad} -вершинами, $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$, когда в точности одна из v_1 и v_4 является таковой, либо $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$, когда ни одна из вершин v_1 и v_4 не является 11_{bad} соответственно, что и утверждается в лемме 10(c3).

(D) Предположим, что $d(v_5) \geq 11$; тогда v посылает не более $\frac{1}{2}$ через f_3 . Через f_4 вершина v посылает не более $\frac{1}{2}$, когда v_1 не является 11_{bad} -вершиной. Это приводит к тому, что $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{2}$, когда v_5 не является 11_{bad} -вершиной, либо $\sigma(S_4) \geq \frac{1}{4}$ в противном случае, что и утверждается в лемме 10(d).

(E) Заметим, что грань f_3 проводит не более $\frac{1}{2}$. Ввиду замечания 7 можно считать, что $d(f_1) = 3$ и $d(f_5) = 3$. Если $d(f_2) = 3$, то каждая из граней f_1, f_2 приносит доход не менее $\frac{1}{4}$, поэтому все грани f_1, f_2, f_3 вместе уже дают требуемый доход $\frac{3}{4}$. Так что можно принять по симметрии, что $d(f_2) \geq 4$ и $d(f_4) \geq 4$.

Если $d(f_3) = 3$, то $d(v_3) \geq 4$ и $d(v_4) \geq 4$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое. Ввиду симметрии будем считать, что $d(v_3) = 5$. Если и $d(v_3) = 5$, то f_3 не проводит зарядов и уже нечего доказывать. Так что пусть далее $d(v_3) = 4$. Ввиду ранее сделанных предположений грань f_2 является особой, а значит, подчиняется правилу R5ex3b. Тогда f_2 может проводить лишь $\frac{1}{4}$ по R3c1, откуда $\sigma(f_2) \geq \frac{1}{2}$. Стало быть, f_2, f_3 вместе дают требуемый доход $\frac{3}{4}$.

Далее можно считать, что каждая из граней f_2, f_3, f_4 острая либо особая. Здесь наше доказательство разветвляется на подслучаи.

Сначала пусть $d(v_6) \leq 10$ (а значит, $d(v_1) \leq 10$), т. е. рассмотрим утверждение леммы 10(e1).

Ввиду исключений R4ex1b и R5ex1b уже нечего доказывать при $d(v_3) = d(v_4) = 3$, поскольку тогда $\sigma(f_3) = \frac{3}{4}$, поэтому можно с учетом симметрии считать, что $4 \leq d(v_3) \leq 5$ и $d(v_4) = 3$. Если $d(v_5) \geq 4$, то каждая из граней f_4, f_5 также приносит доход не менее $\frac{1}{4}$, откуда $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$. Остается допустить, что $d(v_5) = 3$, т. е. $f_4 = v_4 v v_5 z$, где $d(z) = 4$ согласно замечанию 1(b). Благодаря правилу R4ex1b грань f_4 дает доход $\frac{1}{2}$, поэтому снова $\sigma(S_5) \geq \frac{3}{4}$.

Наконец, пусть $d(v_6) \geq 11$; тогда v получает доход $\frac{1}{4}$ от каждой из граней f_3, f_4 . Если вершина v_6 не является 11_{bad} , то v экономит $\frac{1}{4}$ также и на грани f_5 . Отсюда получаются доходы $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ вершины v , заявленные в лемме 10(e2) и лемме 10(e3) соответственно.

(F) Поскольку v получает доход $\frac{1}{4}$ от каждой из граней f_3, f_4 , имеем $\sigma(S_6) \geq \frac{1}{2}$, что и требовалось.

(G) При $p \geq 7$ вершина v экономит $\frac{1}{4}$ на каждой из граней f_3, f_4, f_5 , откуда $\sigma(S_p) \geq \frac{3}{4}$, чем и завершается доказательство леммы 10. \square

Следствие 11. $\sigma(S_{2k-1}) \geq \frac{1}{4}$ при любых $k \geq 1$. \square

Следствие 12. Если v имеет одного или не менее двух 11_{bad} -соседей, то $\sigma(v) \geq \frac{1}{2}$ или $\sigma(v) \geq \frac{3}{4}$ соответственно.

Доказательство. Ввиду следствия 11 достаточно проверить по формулировке леммы 10, что если v_{2k+1} является 11_{bad} -вершиной, то $\sigma(S_{2k}) \geq \frac{1}{4}$ при любых $k \geq 1$. \square

Подслучай 6.1. $d(v) = 23$. Поскольку вершина v имеет не менее одного нечетного получателя, а тот приносит ей доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 11, то $\mu'(v) \geq 23 - 6 - \frac{1}{2} - (23 - 1) \times \frac{3}{4} = 0$, что и требовалось.

Подслучай 6.2. $d(v) = 22$. Число получателей S_{2k-1} с $k \geq 1$ четно. Если число S_{2k-1} не менее двух, то $\mu'(v) \geq 16 - 2 \times \frac{1}{2} - 20 \times \frac{3}{4} = 0$ согласно следствию 11, поэтому пусть далее v не имеет получателей S_{2k-1} .

Наличие получателя S_p с $\sigma(S_p) \geq \frac{1}{2}$ уже влечет $\mu'(v) \geq 16 + \frac{1}{2} - 22 \times \frac{3}{4} = 0$, поэтому можно далее считать согласно лемме 10 в сочетании со следствием 12, что окружение вершины v не содержит 11_{bad} -вершин и состоит лишь из 2-получателей S_2 с $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_3) \geq 11$, а также 4-получателей S_4 с $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_5) \leq 10$.

Тогда 2-получателей S_2 при v можно разбить на пары, составляющие блоки из четырех граней, ограниченные 10^- -вершинами, а каждый S_4 сам является таким блоком. Однако последнее невозможно ввиду неделимости 22 на 4, т. е. снова получаем $\mu'(v) \geq 0$.

Подслучай 6.3. $d(v) = 21$. Число получателей вида S_{2k-1} нечетно. Если v имеет не менее трех нечетных получателей S_{2k-1} , то $\mu'(v) \geq 15 + 3 \times \frac{1}{4} - 21 \times \frac{3}{4} = 0$ согласно следствию 11, поэтому остается предположить, что у вершины v есть в точности один получатель S_{2k-1} .

Если $k = 1$ или $k \geq 4$, то этот S_{2k-1} уже дает требуемый доход $\frac{3}{4}$ по лемме 10, поэтому наше дальнейшее доказательство разбивается на варианты $k = 2$ и $k = 3$.

Подслучай 6.3.1. Единственный нечетный получатель при v есть S_3 .

Сначала пусть $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_4) \leq 10$. Здесь $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{4}$ по лемме 10(c1), поэтому остается собрать суммарный доход не менее $\frac{1}{2}$ с 18 граней при v , не

входящих в S_3 . Это можно сделать в точности так же, как в подслучае 6.2, поскольку 18 не делится на 4.

Теперь пусть $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_4) \geq 11$. Если вершина v_4 не является 11_{bad} , то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(c2), и уже нечего доказывать. В противном случае имеем $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$ по лемме 10(c2), а четный получатель $v_4v_5 \dots$ приносит вершине v доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 12, но этого достаточно.

Наконец, пусть $d(v_1) \geq 11$ и $d(v_4) \geq 11$. Если ни v_1 ни v_4 не является 11_{bad} -вершиной, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(c3), что и требовалось. Если лишь v_4 является 11_{bad} , то $\sigma(S_3) \geq \frac{1}{2}$, а получатель $v_4v_5 \dots$ приносит $\frac{1}{4}$ по следствию 12, так что снова $\mu'(v) \geq 0$.

Остается предположить, что v_1 и v_4 являются 11_{bad} -вершинами. Тогда S_3 и два смежных с ним получателя приносят доход не менее чем по $\frac{1}{4}$ по следствию 12, откуда $\mu'(v) \geq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 6.3.2. Единственный нечетный получатель при v есть S_5 . Если $d(v_1) \leq 10$ и $d(v_6) \leq 10$, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(e1), что и требовалось доказать.

Поэтому пусть далее $d(v_6) \geq 11$. Если v_6 не является 11_{bad} -вершиной, то $\sigma(S_3) \geq \frac{3}{4}$ по лемме 10(e2). Остается предположить, что v_6 есть 11_{bad} -вершина, откуда $\sigma(S_5) \geq \frac{1}{2}$ по лемме 10(e3). Поскольку v также имеет доход не менее $\frac{1}{4}$ согласно следствию 12 от соседнего с S_5 получателя $v_6v_7 \dots$, то и теперь $\mu'(v) \geq 0$.

Итак, доказано, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, а значит, вытекающее из (1) противоречие $-12 \geq 0$ завершает доказательство теоремы 7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. math. Wiss. (Geometrie), 3AB. 1922. V. 12. P. 1–139.
2. Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. Borodin O.V. Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
4. Plummer M. D., Toft B. Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.
5. Ore O., Plummer M. D. Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics. New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
6. Бородин О. В. Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
7. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
8. Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V. Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.
9. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing faces in 3-polytopes with no vertices of degree from 5 to 7 // Discrete Math. 2019. V. 342, N 11. P. 3208–3215.
10. Kotzig A. From the theory of Eulerian polyhedra // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–31.
11. Бородин О. В. Решение задач Кошига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. Т. 46, № 5. С. 9–12.
12. Grünbaum B. Polytopal graphs // Studies in graph theory. MAA Studies in Mathematics. 1975. V. 12. P. 201–224.
13. Plummer M. D. On the cyclic connectivity of planar graphs // Graph theory and applications. Proceedings of the Conference at Western Michigan University. 1972. V. 303. P. 235–242.
14. Kotzig A. Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
15. Бородин О. В. Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.

16. Borodin O. V. Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
17. Августиневич С. В., Бородин О. В. Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.
18. Borodin O. V., Ivanova A. O. Low edges in 3-polytopes // Discrete Math. 2015. V. 338, N 12. P. 2234–2241.
19. Horňák M., Jendrol' S. Unavoidable sets of face types for planar maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.
20. Бородин О. В., Вудал Д. Р. Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 5. С. 648–657.
21. Бородин О. В., Иванова А. О. Высота граней 3-многогранников // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 48–55.
22. Borodin O. V., Vykov M. A., Ivanova A. O. More about the height of faces in 3-polytopes // Discuss. Mat. Graph Theory. 2018. V. 38, N 2. P. 443–453.
23. Borodin O. V., Ivanova A. O. Low minor faces in 3-polytopes // Discrete Math. 2018. V. 341, N 12. P. 3415–3424.
24. Бородин О. В., Лопарев Д. В. Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.
25. Бородин О. В., Иванова А. О. Высота малых граней в 3-многогранниках без треугольников // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 982–988.
26. Jendrol' S., Voss H.-J. Light subgraphs of graphs embedded in the plane — a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
27. Borodin O. V., Ivanova A. O. New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1907, N 1. P. 030051.
28. Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J. Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44, N 4. P. 261–295.
29. Jendrol' S. Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.
30. Бородин О. В. Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
31. Borodin O. V., Ivanova A. O. The height of edge in 3-polytope // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2014. V. 11. P. 457–463.
32. Borodin O. V., Woodall D. R. Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Combin. 1999. V. 15. P. 267–277.
33. Ferencová B., Madaras T. On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight // Acta Univ. M. Belii Math. 2005. V. 12. P. 13–18.
34. Ferencová B., Madaras T. Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.
35. Kotzig A. Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1995. V. 5. P. 101–113.
36. Madaras T., Škrekovski R. Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.

Поступила в редакцию 31 августа 2020 г.

После доработки 14 ноября 2020 г.

Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Бородин Олег Вениаминович, Иванова Анна Олеговна
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
 brdnoleg@math.nsc.ru, shmgnanna@mail.ru