I. M. Bakhilina, S. A. Stepanov, Synthesis of robust linear quadratic Gaussian controllers, *Avtomat. i Telemekh.*, 1998, Issue 7, 96–106

Автоматика и телемеханика, № 7, 1998

УДК 519.71

© 1998 г. **И.М. БАХИЛИНА, канд. техн. наук,**
С.А. СТЕПАНОВ, канд. техн. наук
(Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет)

СИНТЕЗ ГРУБЫХ ЛИНЕЙНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ГАУССОВСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассматривается задача синтеза грубых линейных квадратичных гауссовских регуляторов, оптимизирующих квадратичный критерий качества и гарантирующих H_∞-норму передаточной функции замкнутой системы, не превышающую заданное значение. Известные методы синтеза основаны на решении H_∞-уравнения Риккати (с квадратичным членом неопределенного знака). В работе показана монотонность зависимости стабилизирующего решения H_∞-уравнения Риккати от весовых матриц и множителей критерия качества. Предлагается итеративный алгоритм синтеза грубых линейных квадратичных гауссовских регуляторов, основанный на решении только линейного квадратичного гауссовского уравнения Риккати (с отрицательным квадратичным членом) и удобный для практического применения. Приводятся примеры.

1. Введение

При практическом синтезе систем управления широкое распространение получил метод квадратичной оптимизации. Достоинства этого метода заключаются, прежде всего, в линейной структуре регулятора, обеспечивающей простоту анализа промежуточных результатов и реализации системы, а также в простоте вычислительных процедур, опирающихся на развитый пакет программного обеспечения для синтеза линейных квадратических гауссовских (ЛКГ) регуляторов на ЦВМ. Недостатками метода являются, во-первых, неадекватность оптимизируемого критерия техническим требованиям, предъявляемым к системе (см., например, [1, гл. 12; 2, гл. 11]), и во-вторых, негарантированная грубость системы с ЛКГ-регулятором к неточностям математического описания объекта управления. Известно, что ЛКГ-регулятор, спроектированный для некоторого номинального объекта, не гарантирует устойчивости замкнутой системы с реальным объектом, даже если незамкнутый объект гарантированно устойчив (см. [3] и ссылки в ней). Интересным фактом является взаимосвязь отмеченных недостатков: грубость системы с ЛКГ-регулятором зависит от выбора критерия качества.

Один из первых методов достижения грубого качества ЛКГ-системы путем подходящего выбора весовых матриц критерия качества предложен в [4]. Авторы [4] назвали грубым ЛКГ-регулятором регулятор, сохраняющий свойство быть оптимальным (в смысле какого-либо квадратического критерия) при любых достаточно малых изменениях параметров объекта управления, и получили необходимые и достаточные условия грубой оптимальности в виде требований к структуре весовой матрицы при координатах в критерии качества. Метод [4] гарантирует грубость замкнутой системы лишь в малой окрестности расчетных параметров модели объекта, а не в заданной области варьирования отдельных параметров, как это требуется в большинстве технических проектов.

Метод синтеза линейных регуляторов, обеспечивающих подавление воздействия внешних возмущений на выход системы до заранее предписанного уровня, для множества объектов с заданным ограниченным разбросом параметров, предложен в [5, 6]. Этот метод использован в [3] для синтеза грубых ЛКГ-регуляторов для класса подвижных объектов. Авторы [3] аналитически показали, как выбор подходящей весовой матрицы при координатах в критерии придает грубое качество замкнутой системе. Методы синтеза грубых регуляторов в [3, 5, 6] основаны на решении модифицированного уравнения Риккати, встречающегося при синтезе субоптимальных H_∞-регуляторов [7, 8].

В настоящей работе рассматривается задача синтеза грубого ЛКГ-регулятора, грубость которого понимается в смысле ограничения, наложенного на H_∞-норму передаточной функции от заданного входного вектора к заданному вектору выхода. Оптимизируется квадратичный критерий качества, весовая матрица при координатах в котором заранее не определена. Предлагается простой алгоритм синтеза грубых ЛКГ-регуляторов, напоминающий хорошо известную инженерам-практикам процедуру подбора весовых множителей при синтезе обычного ЛКГ-регулятора: на каждом шаге решается ЛКГ-уравнение Риккати и проверяется качество и грубость замкнутой системы. Однако при неудовлетворительных свойствах замкнутой системы изменяется не весовой множитель при цене на управление в критерии качества, а весовая матрица при координатах. Итеративный процесс сходится к синтезу субоптимального H_∞-регулятора, если такой регулятор существует. В противном случае коэффициенты последовательности грубых ЛКГ-регуляторов неограниченно возрастают аналогично возрастанию коэффициентов "дешевого" ЛКГ-регулятора при стремлении к нулю цены на управление в критерии качества.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейный многомерный объект

(1) $$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u,$$
(2) $$z = Cx + Du,$$

где $x \in \mathcal{X} := \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} := \mathbb{R}^{m_2}$, $w \in \mathcal{W} := \mathbb{R}^{m_1}$, $z \in \mathcal{Z} := \mathbb{R}^p$ – векторы состояния, управления, входных воздействий и выхода, соответственно; A, B_1, B_2, C, D – постоянные матрицы соответствующих размерностей. Вектор $B_1 w$ может рассматриваться либо как внешнее возмущение, либо как вектор, задающий направление неопределенности матрицы A в описании объекта.

Негрубость системы (1), (2) понимается в смысле ограничения H_∞-нормы передаточной функции от w к z

(3) $$\|\mathbb{G}(s)\|_\infty := \sup_\omega \sigma_{\max}[\mathbb{G}(j\omega)] \leqslant \gamma,$$

где $\mathbb{G}(s) := C(sI - A_з)^{-1}B_1 + D$, $\sigma_{\max}[\cdot]$ – максимальное сингулярное число матрицы, $A_з$ – матрица замкнутой системы, γ – скалярный параметр.

Качество системы характеризуется квадратичной нормой некоторого выходного заранее неизвестного отличного от z вектора z_2

(4) $$\mathbb{J}_2 := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T z_2^{\mathrm{T}}(t) z_2(t)\, dt,$$

где $z_2 = C_2 x + Du$ и матрица C_2 заранее не определена.

Вслед за [7] w понимается как произвольная ограниченная по $\mathcal{L}_2$ норме функция времени при определении H_∞-нормы (3) и как векторный гауссовский процесс при вычислении критерия (4).

Регуляторы, обеспечивающие выполнение условия (3) и оптимизирующие критерий (4), будем называть грубыми ЛКГ-регуляторами.

Принимаются следующие допущения:

I) (A, B_2) – стабилизируемая и (C, A), (C_2, A) – детектируемые пары;

II) все координаты объекта измеряются точно (задача с полной информацией о состоянии объекта);

III) $D^{\mathrm{T}}[C\ D] = [0\ D^{\mathrm{T}}D]$, $D^{\mathrm{T}}[C_2 D] = [0\ D^{\mathrm{T}}D]$;

IV) $D^{\mathrm{T}}D > 0$.

Первое и последнее допущения необходимы для существования решения рассматриваемой задачи, второе и третье введены для упрощения математических выкладок и сокращения объема статьи, причем допущение III не ограничивает общности результатов, так как выполнения этих условий всегда можно добиться с помощью подходящего выбора базисов пространств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{U}$.

Известно [8], что ограничение (3) выполняется тогда и только тогда, когда существует положительно полуопределенное (п.п.о.) решение уравнения Риккати с квадратичным членом неопределенного знака

$$(5)\qquad A^{\mathrm{T}}X + XA + XRX + C^{\mathrm{T}}C = 0,$$

обеспечивающее устойчивость матрицы $A_{cw} := A + RX$, где $R := \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$ и пара (A, R) предполагается стабилизируемой. П.п.о. решение (5), обеспечивающее устойчивость A_{cw}, называется стабилизирующим и ниже будет обозначаться X_+, а регулятор $u_\infty = -(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_+x$ авторами [8] назван центральным субоптимальным H_∞-регулятором с полной информацией.

Оптимизация критерия (4) основана на решении обычного (с отрицательным квадратичным членом) уравнения Риккати

$$(6)\qquad A^{\mathrm{T}}X_2 + X_2A - X_2B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_2 + C_2^{\mathrm{T}}C_2 = 0.$$

Такое уравнение при выполнении допущения I всегда имеет единственное п.п.о. решение [9], которое обозначим X_{2+}, а регулятор $u_2 = -(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_{2+}x$ – оптимальный ЛКГ-регулятор.

Сравнение уравнений (5) и (6) показывает, что любой центральный H_∞-регулятор является грубым ЛКГ-регулятором, если весовая матрица C_2 в (4) выбрана таким образом, что

$$C_2^{\mathrm{T}}C_2 = \gamma^{-2}X_+B_1B_1^{\mathrm{T}}X_+ + C^{\mathrm{T}}C.$$

С другой стороны, любой регулятор, обеспечивающий выполнение условия (3), является субоптимальным H_∞-регулятором. Таким образом, множество грубых ЛКГ-регуляторов совпадает с множеством субоптимальных H_∞-регуляторов, и синтез грубой ЛКГ-системы может быть основан на решении уравнения (5). Однако, весовые матрицы C и D вектора выхода, матрица B_1, определяющая направление неопределенности модели объекта, и скалярный параметр γ, не могут быть определены однозначно из технических требований к системе, что приводит к необходимости многократного решения (5) и поиску таких значений C, D, B_1 и γ, при которых оптимальный регулятор обеспечивает удовлетворительное динамическое качество замкнутой системы, невыход на упоры исполнительных механизмов реального регулятора и т.д., а также устойчивость и гарантированное качество системы при отклонениях параметров объекта от расчетных (аналогичные многократные расчеты проводятся при синтезе обычных ЛКГ-регуляторов [1, 2]). В некоторых случаях возможно упрощение процедуры синтеза путем фиксирования матриц C, D и B_1 и введения в уравнение вектора выхода весовых множителей α и β:

$$z = \alpha Cx + \beta Du.$$

Уравнение (5) в этом случае принимает вид

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + X(\gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - \beta^{-2}B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}})X + \alpha^2C^{\mathrm{T}}C = 0, \tag{7}$$

а поиск подходящего регулятора осуществляется на множестве скалярных параметров α, β и γ.

Однако в отличие от уравнения (6), уравнения типа (5) и (7) с квадратичным членом неопределенного знака имеют стабилизирующее решение не при всех значениях матричных и скалярных параметров C, D, B_1, α, β и γ, а иногда могут иметь несколько п.п.о. решений, из которых стабилизирующим является только одно [7], что значительно усложняет синтез грубых регуляторов. Облегчить процедуру подбора параметров может знание характера зависимости стабилизирующего решения уравнений типа (5), (7) от матричных и скалярных параметров. Поэтому первой задачей настоящей работы является исследование зависимости стабилизирующего решения уравнений (5)–(7) от весовых матриц D, C, матрицы B_1 и весовых множителей α, β и γ. Так как $B_1B_1^{\mathrm{T}}$ и $B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$ входят в квадратичный член уравнения (5) аддитивно, то удобнее анализировать X_+ как функцию матричных параметров R и C: $X_+(R, C)$.

Следующей задачей является разработка итеративного алгоритма синтеза грубых ЛКГ-регуляторов, достаточно простого и удобного для решения практических задач синтеза систем управления.

3. Свойства уравнения Риккати

Допустим, что при $B_1 = B_{10}$, $B_2 = B_{20}$, $R_0 := \gamma_0^{-2}B_{10}B_{10}^{\mathrm{T}} - B_{20}B_{20}^{\mathrm{T}}$ и $C = C_0$ уравнение (5) имеет стабилизирующее решение $X_{+0} := X_+(R_0, C_0)$. Следующая теорема устанавливает монотонный характер зависимости стабилизирующего решения X_+ (5) от матричных параметров R и $C^{\mathrm{T}}C$, определяя тем самым, в каком направлении можно изменять матричные параметры B_1, D и C, не рискуя выйти из области существования стабилизирующего решения.

Теорема 1. *Пусть при $R = R_0$, $C = C_0$ существует стабилизирующее решение $X_{+0} := X_+(R_0, C_0)$ уравнения (5). Тогда*

1) *стабилизирующее решение (5) существует по крайней мере в области*

$$\mathcal{P} := \{(R, C) \mid R \leqslant R_0,\ C^{\mathrm{T}}C \leqslant C_0^{\mathrm{T}}C_0,\ (C, A) \text{ – детектируемая пара}\},$$

2) *выполняются следующие соотношения монотонности:*

а) $X_+(R_1, C) \leqslant X_+(R_2, C)$, если $R_1 \leqslant R_2$ и пара $(R_2, C) \in \mathcal{P}$; б) $X_+(R, C_1) \leqslant X_+(R, C_2)$, если $C_1^{\mathrm{T}}C_1 \leqslant C_2^{\mathrm{T}}C_2$, пара (C_1, A) детектируемая и $(R, C_2) \in \mathcal{P}$.

Доказательство теоремы приводится в Приложении.

Замечание. Пусть $R_1 = \gamma_1^{-2}B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}} - B_{21}(D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}B_{21}^{\mathrm{T}}$, $R_2 = \gamma_2^{-2}B_{12}B_{12}^{\mathrm{T}} - B_{22}(D_2^{\mathrm{T}}D_2)^{-1}B_{22}^{\mathrm{T}}$. Тогда неравенство $R_1 \leqslant R_2$ достигается, если $\gamma_1^{-2}B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}} \leqslant \gamma_2^{-2}B_{12}B_{12}^{\mathrm{T}}$ и (или) $B_{21}(D_1^{\mathrm{T}}D_1)^{-1}B_{21}^{\mathrm{T}} \geqslant B_{22}(D_2^{\mathrm{T}}D_2)^{-1}B_{22}^{\mathrm{T}}$, что гарантирует стабилизируемость пар (A, B_{21}) и (A, R_1), если пары (A, B_{22}) и (A, R_2) стабилизируемые.

Следствие 1. *В частном случае при $B_1 = 0$ уравнение (5) превращается в обычное ЛКГ-уравнение Риккати (6), которое при принятых в разделе 2 допущениях всегда имеет стабилизирующее решение. В этом случае из теоремы 1 следует, что $X_{2+}(B_2, C)$ является монотонно невозрастающей функцией $B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$ и монотонно неубывающей функцией $C^{\mathrm{T}}C$.*

Этот результат согласуется с результатами, полученными в [10].

Следствие 2. *$X_{2+}(B_2, C) \leqslant X_+(B_1, B_2, C)$, так как $-B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}} \leqslant \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} - B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}$ при любых значениях γ и D.*

Допустим далее, что матрицы B_1, D, C заданы, а при синтезе регулятора настраиваются скалярные параметры α, β и γ. В этом случае справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Одновременное умножение α, β и γ на положительное число $k > 1$ (< 1) приводит к увеличению (уменьшению) стабилизирующего решения X_+ уравнения (7) в k^2 раз. При этом оптимальный регулятор $u_0 := -\beta^{-2} \times \times (D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_2$ остается без изменения.* ■

Доказательство предложения 1 приводится в Приложении.

Следствие. *Одновременное увеличение (уменьшение) пары параметров (α, β) ((α, γ) или (β, γ)) в k раз приводит к тому же закону управления, что и уменьшение (увеличение) в k раз параметра γ (β или α).*

Теорема 2. *Пусть стабилизирующее решение уравнения (7) существует при некоторых фиксированных значениях параметров $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$: $X_{+0} := X_+(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Тогда стабилизирующее решение $X_+(\alpha, \beta, \gamma)$ существует по крайней мере в области*

$$\mathcal{S} := \{\alpha, \beta, \gamma \,|\, 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0,\ \gamma_0 \leqslant \gamma < \infty\}$$

и является непрерывной монотонно неубывающей функцией параметров α, β и непрерывной монотонно невозрастающей функцией γ в $\mathcal{S}$, с частными производными, удовлетворяющими неравенствам $DX_\alpha \geqslant 0$, $DX_\beta \geqslant 0$, $DX_\gamma \leqslant 0$, где $DX_* := \partial X_+(\alpha, \beta, \gamma)/\partial *$, $* \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$. ■

Существование и монотонность функции $X_+(\alpha, \beta, \gamma)$ в области $\mathcal{S}$ следуют непосредственно из теоремы 1. Доказательство непрерывности и знакоопределенности частных производных стандартно (см., например, аналогичное доказательство в [11]) и опускается для сокращения объема статьи.

4. Алгоритм синтеза грубых ЛКГ-регуляторов

Рассмотрим семейство m объектов с параметрической неопределенностью аддитивного типа: динамика каждого объекта описывается уравнением (1), для номинального объекта $A = A_0$, для k-го объекта $A = A_k$, $k = 1, \ldots, m$, причем $|(A_0)_{ij} - (A_k)_{ij}| \leqslant |(\Delta A)_{ij}|$, $i, j = 1, \ldots, n$, где $(\cdot)_{ij}$ – i, j-й элемент матрицы и ΔA – матрица, характеризующая разброс параметров семейства объектов. Как и в стандартной процедуре синтеза обычного ЛКГ-регулятора, выберем некоторые начальные значения весовых матриц C_0 и D_0 в уравнении выхода (2). Так как устойчивая ненаблюдаемая подсистема пары (C_0, A) остается неизменяемой при любом ЛКГ- или субоптимальном H_∞-законе управления (см., например, [11]), то матрицу C_0 следует выбирать таким образом, чтобы сужение матрицы A на ненаблюдаемое подпространство пары (C_0, A_0) не имело неопределенностей. Рассмотрим следующий итеративный алгоритм

Алгоритм.

Шаг 1. Полагаем $k = 0$ и решаем ЛКГ-уравнение Риккати

$$A^{\mathrm{T}}X_0 + X_0A - X_0B_2(D_0^{\mathrm{T}}D_0)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_0 + Q_0 = 0, \text{ где } Q_0 := C_0^{\mathrm{T}}C_0.$$

Шаг 2. Выбираем матрицу B_1, задающую направление неопределенности объекта, таким образом, чтобы $(B_1B_1^{\mathrm{T}}X_0)_{ij} \neq 0$, если $(\Delta A)_{ij} \neq 0$. Такой выбор возможен, так как $\mathrm{Ker}(X_0) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(C_0A_0^{i-1})$ и сужение матрицы A на ненаблюдаемое подпространство пары (C_0, A_0) не имеет неопределенностей.

Шаг 3. Задаемся некоторым значением параметра $\gamma_0 > 0$.

Шаг 4. Переходим к следующей итерации $k \Leftarrow k + 1$.

Шаг 5. Вычисляем k-е значение весовой матрицы при координатах в критерии качества

$$Q_k = Q_0 + \gamma_0^{-2} X_{k-1} B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_{k-1}.$$

Шаг 6. Решаем ЛКГ-уравнение Риккати

$$A^{\mathrm{T}} X_k + X_k A - X_k B_2 (D_0^{\mathrm{T}} D_0)^{-1} B_2^{\mathrm{T}} X_k + Q_k = 0. \tag{8}$$

Шаг 7. Анализируем с помощью имитационной модели динамическое качество и свойства грубости замкнутой ЛКГ-системы

$$\dot{x} = A_{\text{з}k} x, \quad \text{где} \quad A_{\text{з}k} = (A - B_2 (D_0^{\mathrm{T}} D_0)^{-1} B_2^{\mathrm{T}} X_k).$$

Шаг 8. При неудовлетворительных свойствах замкнутой системы возвращаемся к шагу 4.

Докажем, что при $k \to \infty$ $X_k \to X_+$, где X_+ – стабилизирующее решение уравнения (5) с параметрами B_1, B_2, D_0, C_0 и γ_0, если такое решение существует. Действительно, согласно следствию 1 из теоремы 1, из $Q_1 \geqslant Q_0$ следует $X_1 \geqslant X_0$. Тогда $Q_2 \geqslant Q_1$ и $X_2 \geqslant X_1$, и далее $Q_{k+1} \geqslant Q_k$ и $X_{k+1} \geqslant X_k$. Таким образом, последовательность решений уравнений Риккати является монотонно возрастающей. Эта последовательность ограничена сверху стабилизирующим решением X_+ уравнения (5), которое является стационарной точкой итерационного процесса и среди всех п.п.о. решений (5) минимально [7]. Следовательно, итерационный процесс сходится к решению X_+ [1, предложение 0.6]. Если стабилизирующее решение уравнения (5) при выбранных матричных параметрах не существует, то непрерывное увеличение весовой матрицы при координатах в критерии качества приведет к неограниченному возрастанию коэффициентов обратных связей регулятора. Аналогично возрастают коэффициенты обратных связей в так называемом "дешевом" регуляторе при стремлении к нулю цены на управление в критерии качества.

Пример 1.

Рассмотрим модифицированное уравнение Риккати 1-го порядка

$$2ax - (b_2^2 - b_1^2)x^2 + c^2 = 0,$$

где $a = 1$, $\gamma = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $c = 1$. Тогда $x_+ = 1$ и $a_{cw} = a + b_1^2 x_+ - b_2^2 x_+ = -2$ – устойчивая матрица.

Итеративное решение по описанной выше схеме дает: $x_0 = 0{,}819$, $x_1 = 0{,}94$, $x_2 = 0{,}98, \ldots, x_6 = 0{,}99976, \ldots$ Таким образом, за 6 циклов алгоритм сошелся к предельному значению с точностью до 0,025%.

Для многомерных объектов сходимость алгоритма вблизи стабилизирующего решения уравнения типа (5) может оказаться медленной. Однако, для синтеза грубого ЛКГ-регулятора совсем необязательно стремиться к достижению предела итеративного процесса (т.е. к синтезу субоптимального H_∞-регулятора): уже на первых шагах алгоритма синтезируется некоторый грубый ЛКГ-регулятор, независимо от того, существует или нет субоптимальный H_∞-регулятор при выбранных значениях параметров. Действительно, из $\mathrm{Ker}(X_k) \subseteq \mathrm{Ker}(Q_k) \subseteq \mathrm{Ker}(Q_{k-1})$ следует, что всегда найдется такое положительное число $\gamma > \gamma_0$, что $\gamma_0^{-2} X_{k-1} B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_{k-1} - \gamma^{-2} X_k B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_k \geqslant 0$. Тогда уравнение (8) может быть представлено в виде

$$A_{\text{з}k}^{\mathrm{T}} X_k + X_k A_{\text{з}k} + \gamma^{-2} X_k B_3 B_3^{\mathrm{T}} X_k + S_k^{\mathrm{T}} S_k = 0,$$

где $B_3 := (\gamma^2 B_2 (D_0^{\mathrm{T}} D_0)^{-1} B_2^{\mathrm{T}} + B_1 B_1^{\mathrm{T}})^{1/2}$, $A_{\text{з}k} := A - B_2 (D_0^{\mathrm{T}} D_0)^{-1} B_2^{\mathrm{T}} X_k$, $S_k := (Q_k + (\gamma_0^{-2} X_{k-1} B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_{k-1} - \gamma^{-2} X_k B_1 B_1^{\mathrm{T}} X_k))^{1/2}$. Так как последнее уравнение имеет п.п.о. решение $X_k \geqslant 0$ и матрица $A_{\text{з}k}$ устойчивая, то $\|\mathbb{G}_*(s)\|_\infty \leqslant \gamma$, где $\mathbb{G}_*(s) := S_k(sI - A_{3k})^{-1}B_3$ [7, лемма 1]. Обозначим $\mathbb{G}_k(s) := C_0(sI - A_{3k})^{-1}B_1$. Тогда из $C_0^{\mathrm{T}}C_0 \leqslant S_k^{\mathrm{T}}S_k$ и $B_1B_1^{\mathrm{T}} \leqslant B_3B_3^{\mathrm{T}}$ следует $\|\mathbb{G}_k(s)\|_\infty \leqslant \|\mathbb{G}_*(s)\|_\infty \leqslant \gamma$ и, следовательно, условие грубости (3) выполнено.

Проиллюстрируем работу алгоритма на примере, взятом из [3].

Пример 2. Три массивных элемента связаны двумя пружинами. Коэффициенты упругости k_1, k_2 определены неточно. Органы управления создают усилия, действующие на два первых элемента, цель управления – стабилизация положения 3-го элемента. Система описывается уравнениями (1), (2), в которых

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & k_1 & 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & 0 & -d_3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \in [0{,}5, 2],$$

$d_1 = d_2 = d_3 = d = 0{,}001$. Так как разброс имеют коэффициенты k_1, k_2, то

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ \Delta A_{21} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}, \text{ где } 0_{3\times3} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_{21} = \begin{bmatrix} \delta k_1 & \delta k_1 & 0 \\ \delta k_1 & \delta k_1 + \delta k_2 & \delta k_2 \\ 0 & \delta k_2 & \delta k_2 \end{bmatrix}.$$

Выберем матрицы C_0, D_0, B_1 так, чтобы $C_0^{\mathrm{T}}C_0 = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0\right\}$, $D_0^{\mathrm{T}}D_0 = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}$, $B_1B_1^{\mathrm{T}} = \operatorname{diag}\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$.

Вычислив X_0, убедимся, что $(B_1B_1^{\mathrm{T}}X_0)_{ij} \neq 0$, если $(\Delta A)_{ij} \neq 0$. Пусть $\gamma_0 = 0{,}8$. За 10 итераций получим закон управления с матрицей обратных связей

$$L_{10} = \begin{bmatrix} 6{,}08 & 0{,}69 & -0{,}37 & 3{,}51 & 0{,}24 & -0{,}53 \\ 2{,}43 & 24{,}70 & 3{,}02 & 0{,}24 & 8{,}34 & 36{,}15 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\gamma = 1$. Расчеты показывают, что $\Delta Q := \gamma_0^{-2}X_9B_1B_1^{\mathrm{T}}X_9 - \gamma^{-2}X_{10}B_1B_1^{\mathrm{T}} \times X_{10} \geqslant 0$ и, следовательно, $X_{10} > 0$ удовлетворяет уравнению

$$A^{\mathrm{T}}X_{10} + X_{10}A + \gamma^{-2}X_{10}B_1B_1^{\mathrm{T}}X_{10} - X_{10}B_2(D_0^{\mathrm{T}}D_0)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_{10} + (C_0^{\mathrm{T}}C_0 + \Delta Q) = 0,$$

откуда $\|(C_0^{\mathrm{T}}C_0 + \Delta Q)^{1/2}(sI - (A - B_2(D_0^{\mathrm{T}}D_0)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_{10}))^{-1}B_1 + D_0\|_\infty \leqslant \gamma$. Тогда $\|C_0(sI - (A - B_2(D_0^{\mathrm{T}}D_0)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_{10}))^{-1}B_1 + D_0\|_\infty \leqslant \gamma$ и условие грубости (3) замкнутой системы выполнено.

Замкнутая система с номинальным объектом имеет полюса:

$$\lambda_{1,2} = -1{,}79 \pm j\cdot 1{,}96, \quad \lambda_{3,4} = -1{,}45 \pm j\cdot 2{,}43, \quad \lambda_5 = -4{,}24, \quad \lambda_6 = -1{,}11.$$

Полюса замкнутых систем с объектами, имеющими коэффициенты упругости $k_1 = k_2 = 2$ и $k_1 = k_2 = 0{,}5$, имеют, соответственно, следующие значения: $\{\lambda_{1,2} = -1{,}74 \pm j \cdot 2{,}22,\ \lambda_{3,4} = -1{,}07 \pm j \cdot 3{,}42,\ \lambda_5 = -5{,}34,\ \lambda_6 = -0{,}88\}$ и $\{\lambda_{1,2} = -3{,}75 \pm j \cdot 2{,}24,\ \lambda_{3,4} = -1{,}72 \pm j \cdot 1{,}87,\ \lambda_{5,6} = -0{,}45 \pm j \cdot 0{,}74\}$.

Анализ переходных процессов и сравнение их с аналогичными, приведенными в [3], показывает, что замкнутая система с матрицей обратных связей L_{10} имеет приблизительно такие же характеристики, как и система, полученная в [3]. Однако, в предлагаемом нами методе синтеза решается только ЛКГ-уравнение Риккати, а не уравнения с квадратичными членами неопределенного знака типа (5) или (7), как в [3], что значительно проще с вычислительной точки зрения. Простота расчетов позволяет проанализировать большое количество вариантов с различными весовыми матрицами C, D и B_1. Кроме того, за k циклов расчетов по алгоритму мы получаем k грубых ЛКГ-регуляторов, динамические характеристики и свойства грубости которых можно сравнивать.

Если выбрать

$$C_0 = \begin{bmatrix} -0{,}866 & 0{,}866 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}866 & 0{,}866 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}866 & 0 \\ -0{,}866 & 0{,}866 \\ 0 & -0{,}866 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1,$$

то приблизительно за 16 итераций с точностью до 5% получим субоптимальный H_∞-регулятор, совпадающий с рассчитанным в [3].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1 требует предварительных результатов.

Рассмотрим двойственные уравнения Риккати

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + XRX + Q = 0, \tag{П.1}$$

$$Y(-A^{\mathrm{T}}) + (-A)Y + YQY + R = 0, \tag{П.2}$$

где $R = R^{\mathrm{T}}$ – симметричная матрица и пара (Q, A) наблюдаемая.

Лемма. *Уравнение* (П.1) *имеет стабилизирующее решение X_+ тогда и только тогда, когда существует отрицательно определенное решение $Y_- < 0$ уравнения* (П.2), *такое, что матрица $-A + Y_-Q$ устойчивая. При этом $X_+ = -Y_-^{-1}$ и матрицы $(A + RX_+)$ и $(-A + Y_-Q)$ подобны.*

Доказательство леммы 1. (Тогда) Пусть существует решение (П.2) $Y_- < 0$ такое, что $(-A + Y_-Q)$ устойчивая. Умножая (П.2) слева и справа на $-Y_-^{-1}$ убедимся, что $X_* := -Y_-^{-1}$ является решением (П.1).

Определим матрицы $T_1 := \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X_* & I \end{bmatrix}$, $T_2 := \begin{bmatrix} I & Y_- \\ 0 & I \end{bmatrix}$ и вычислим произведения $T_2 H T_2^{-1}$ и $T_2 T_1^{-1}(T_1 H T_1^{-1}) T_1 T_2^{-1}$, где

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

– гамильтониан, ассоциированный с уравнением (П.1):

$$T_2HT_2^{-1} = \begin{bmatrix} -(-A+Y_-Q) & 0 \\ -Q & (-A+Y_-Q)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$T_2T_1^{-1}(T_1HT_1^{-1})T_1T_2^{-1} = \begin{bmatrix} Y_-(A+RX_*)^{\mathrm{T}}X_* & 0 \\ -Q & -X_*(A+RX_*)Y_- \end{bmatrix}.$$

Приравнивая правые части, получим $(-A+Y_-Q) = Y_-(A+RX_*)^{\mathrm{T}}Y_-^{-1}$, откуда следует подобие матриц $(-A+Y_-Q)$ и $(A+RX_*)$. Следовательно, $(A+RX_*)$ устойчивая и $X_* = X_+ > 0$ – стабилизирующее решение (П.1).

2. (Только тогда) Доказательство обратного утверждения полностью аналогично и потому опускается.

Предложение 2. Ядро стабилизирующего решения модифицированного уравнения Риккати (5) *совпадает с максимальным устойчивым ненаблюдаемым подпространством пары* (C, A).

Доказательство предложения 2. Известно [12], что ядро п.п.о. решения X_0 обыкновенного уравнения Риккати

$$A^{\mathrm{T}}X + XA - XB_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X + Q = 0,$$

где (A, B_2) стабилизируемая и (Q, A) детектируемая пары, совпадает с максимальным устойчивым подпространством пары (Q, A): $\mathrm{Ker}(X_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(QA^{i-1})$. Рассмотрим последовательность обыкновенных уравнений Риккати, описанную в алгоритме раздела 4. Так как $\mathrm{Ker}(X_kB_1B_1^{\mathrm{T}}X_k) \supseteq \mathrm{Ker}(X_k)$, и $\mathrm{Ker}(X_k) \subseteq \mathrm{Ker}(Q)$, то $\mathrm{Ker}(X_kB_1B_1^{\mathrm{T}}X_k + Q) = \mathrm{Ker}(Q)$, и, следовательно, $\mathrm{Ker}(X_k) = \bigcap\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{Ker}\, QA^{i-1})$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Это равенство справедливо и для предела последовательности $X_+ = \lim\limits_{k\to\infty} X_k$: $\mathrm{Ker}\, X_+ = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(QA^{i-1})$, что доказывает предложение. ■

Доказательство теоремы 1.

Без ограничения общности будем полагать, что система (1), (2) путем подобного преобразования приведена к виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} u,$$

$$z = [\; C_1 \quad 0 \;]\, x + Du,$$

где пара (C_1, A_{11}) наблюдаемая и матрица A_{22} устойчивая. Согласно предложению 2 стабилизирующее решение будет иметь структуру

$$X_+ = \begin{bmatrix} X_{1+} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{1+} > 0$$

и, следовательно, достаточно проанализировать решение модифицированного уравнения, составленного для наблюдаемой подсистемы. Для упрощения обозначений будем опускать дополнительные единичные индексы в наблюдаемой подсистеме или, иными словами, будем рассматривать систему (1), (2) в предположении, что пара (C, A) наблюдаемая. В этом случае стабилизирующее решение уравнения (5) положительно определено.

В соответствии с условиями теоремы предположим, что уравнение (5) имеет стабилизирующее решение при $R = R_0$ и $C = C_0$. Обозначим это решение X_{+0}.

1) Сначала докажем, что стабилизирующее решение (5) $X_{+1} := X_+(R_1, C_0) > 0$ существует, если $R_1 \leqslant R_0$ и $X_{+1} \leqslant X_{+0}$.

Рассмотрим ЛКГ-уравнение Риккати

$$\text{(П.3)} \qquad \Delta Y(-A+Y_{-0}C_0^{\mathrm{T}}C_0)^{\mathrm{T}}+(-A+Y_{-0}C_0^{\mathrm{T}}C_0)\Delta Y-\Delta Y C_0^{\mathrm{T}}C_0\Delta Y+(R_0-R_1)=0,$$

где $Y_{-0} = -X_{+0}^{-1}(R_0, C_0)$ – решение двойственного уравнения (П.2) с параметрами $R = R_0$ и $Q = C_0^{\mathrm{T}}C_0$. Матрица $A_{y0} := (-A + Y_{-0}C_0^{\mathrm{T}}C_0)$ согласно лемме подобна матрице $(A + R_0X_{+0})$ и, следовательно, устойчивая. В этом случае $(A_{y0}^{\mathrm{T}}, C_0^{\mathrm{T}})$ стабилизируемая и $((R_0 - R_1), A_{y0}^{\mathrm{T}})$ детектируемая пары. Тогда (П.3) имеет единственное п.п.о. решение, которое обозначим ΔY_1, и матрица $A_{y1} := (-A + (Y_{-0} - \Delta Y_1)C_0^{\mathrm{T}}C_0)$ устойчивая [9]. Вычитая (П.3) из (П.2), составленного для параметров $R = R_0$, $C = C_0$, получим

$$(Y_{-0} - \Delta Y_1)A^{\mathrm{T}} + A(Y_{-0} - \Delta Y_1) + (Y_{-0} - \Delta Y_1)C_0^{\mathrm{T}}C_0(Y_{-0} - \Delta Y_1) + R_1 = 0.$$

Очевидно, что $Y_{-1} := (Y_{-0} - \Delta Y_1)$ является решением (П.2) с параметрами $R = R_1$, $C = C_0$, приводящим к устойчивой матрице A_{y1}. Заметим, что $Y_{-1} \leqslant Y_{-0} < 0$, так как $\Delta Y_1 \geqslant 0$, поэтому $X_{+1} := -Y_{-1}^{-1}$ существует и, согласно лемме, является стабилизирующим решением уравнения (5). Кроме того, из $Y_{-1} \leqslant Y_{-0}$ следует $X_{+1} \leqslant X_{+0}$.

2) Докажем далее существование стабилизирующего решения $X_{+2} := X_+(R_1, C_1)$ уравнения (5) при $R = R_1$, $C = C_1$ и неравенство $X_{+1} \geqslant X_{+2}$ в предположении, что $C_1^{\mathrm{T}}C_1 \leqslant C_0^{\mathrm{T}}C_0$, пара (C_1, A) детектируемая и $(R_1, C_0) \in \mathcal{P}$. Рассмотрим ЛКГ-уравнение Риккати

$$\text{(П.4)} \qquad \begin{aligned} &\Delta Y(-A + Y_{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}} + (-A + Y_{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1)\Delta Y - \\ &- \Delta Y C_1^{\mathrm{T}}C_1\Delta Y + Y_{-1}(C_0^{\mathrm{T}}C_0 - C_1^{\mathrm{T}}C_1)Y_{-1} = 0. \end{aligned}$$

Из детектируемости (C_1, A) следует стабилизируемость $((-A+Y_{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}}, C_1^{\mathrm{T}})$, пара $((C_0^{\mathrm{T}}C_0 - C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{1/2}Y_{-1}, (-A + Y_{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}})$ является детектируемой, так как при $K := (C_0^{\mathrm{T}}C_0 - C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{1/2}$ матрица $(-A+Y_{-1}C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}} + K(C_0^{\mathrm{T}}C_0 - C_1^{\mathrm{T}}C_1)^{1/2}Y_{-1} = A_{y1}$ является устойчивой [1]. Тогда существует п.п.о. решение ΔY_2 уравнения (П.4), и $A_{y2} := (-A + (Y_{-1} - \Delta Y_2)C_1^{\mathrm{T}}C_1)$ устойчивая матрица. Вычитая (П.4) из (П.2), составленного для параметров R_1, C_0, получим

$$(Y_{-1} - \Delta Y_2)(-A^{\mathrm{T}}) + (-A)(Y_{-1} - \Delta Y_2) + (Y_{-1} - \Delta Y_2)C_1^{\mathrm{T}}C_1(Y_{-1} - \Delta Y_2) + R_1 = 0.$$

Так как $\Delta Y_2 \geqslant 0$, то $Y_{-2} := Y_{-1} - \Delta Y_2 \leqslant Y_{-1} < 0$. Кроме того, $A_{y2} := -A + Y_{-2}C_1^{\mathrm{T}}C_1$ устойчивая. Тогда, согласно лемме, существует стабилизирующее решение уравнения (5) при $R = R_1$ и $C = C_1$, которое обозначим X_{+2}, $X_{+2} = -Y_{-2}^{-1}$ и из $Y_{-2} \leqslant Y_{-1}$ следует $X_{+2} \leqslant X_{+1}$.

Мы доказали, что стабилизирующее решение уравнения (5) существует в точке (R_1, C_1) и выполняются неравенства $X_+(R_0, C_0) \geqslant X_+(R_1, C_0) \geqslant X_+(R_1, C_1)$. Так как пара (R_1, C_1) выбрана произвольно в области $\mathcal{P}$, то теорема 1 доказана. ■

Доказательство предложения 1.
Пусть в (7) $\alpha = k\alpha_1$, $\beta = k\beta_1$ и $\gamma = k\gamma_1$. Умножим (7) на k^{-2} и приведем к виду

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}(k^{-2}X) + (k^{-2}X)A + \gamma_1^{-2}(k^{-2}X)B_1B_1^{\mathrm{T}}(k^{-2}X) - \\ &- \beta_1^{-2}(k^{-2}X)B_2(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}(k^{-2}X) + \alpha_1^2C^{\mathrm{T}}C = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что стабилизирующее решение последнего уравнения $X_{+1} = k^{-2}X_+$, где X_+ – стабилизирующее решение (7). Тогда оптимальный регулятор

$$u_1 = -\beta_1^{-2}(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}(k^{-2}X_+) = -\beta^{-2}(D^{\mathrm{T}}D)^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X_+. \qquad ■$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980.
2. *Острем К., Виттенмарк Б.* Системы управления с ЭВМ. М.: Мир, 1987.
3. *Douglas J., Athans M.* Robust linear quadratic designs with real parameter uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. No. 1. P. 107–111.
4. *Fujii T., Mizushima N.* Robustness of the optimality property of an optimal regulator: multi-input case // Int. J. Control. 1984. V. 39. No. 3. P. 441–453.
5. *Petersen I.R., Hollot C.V.* A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems // Automatica. 1986. V. 22. No. 4. P. 397–411.
6. *Petersen I.R.* Disturbance attenuation and H^∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. V. AC-32. No. 5. P. 427–429.
7. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. No. 3. P. 293–305.
8. *Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A.* State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. AC-34. No. 8. P. 831–847.
9. *Kučera V.* A contribution to matrix quadratic equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. V. AC-17. No. 8. P. 344–347.
10. *Ran A.C.M., Vreugdenhil R.* Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discretetime systems // Linear Algebra Appl. 1988. V. 99. No. 1. P. 63–83.
11. *Scherer G.W.* H_∞-control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal H_∞ norms // IEEE Trans. Automat. Control. 1990. V. AC-35. No. 10. P. 1090–1099.
12. *Wimmer H.K.* Lattice properties of sets of semidefinite solutions of continuous-time algebraic Riccati equation // Automatica. 1995. V. 31. No. 2. P. 173–182.

Поступила в редакцию 30.04.97