П. В. Семенов, А. И. Скорик, Изометрии пространств Джеймса, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 4, 537–544

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 4 (1985)

ИЗОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ ДЖЕЙМСА

П. В. Семенов, А. И. Скорик

0. Описанию групп обратимых изометрий различных (классов) банаховых пространств посвящено множество работ (см., например, [1—6]). Эта тематика восходит к С. Банаху, описавшему, в частности, группы изометрий классических пространств l_p, $L_p[0; 1]$ (см. [1]). Как правило, результаты этих работ приводят к выводу, что в функциональных или координатных пространствах с «естественными» нормами, существенно отличных от гильбертовых, обратимые изометрии сводятся к операторам подстановок с весом; какие именно взвешенные подстановки порождают изометрии — в каждом конкретном случае определить несложно. В то же время техника этих работ существенно зависит от класса рассматриваемых пространств и, более того, от выбора основного поля. Отсутствие единого подхода к изучению изометрий и унифицирующей общей теории повышает интерес к исследованию новых примеров и разработке новой техники доказательств.

Наша работа посвящена описанию групп обратимых изометрий классических координатных пространств Джеймса $J_{\mathbf{C}}$ и $J_{\mathbf{R}}$ (соответственно над полем комплексных и полем вещественных чисел) в различных эквивалентных нормах (см. [7]). Основной результат работы состоит в доказательстве того, что изометрии пространств Джеймса сводятся к умножению на элементы основного поля, норма которых равна единице, да еще — в одной из двух эквивалентных норм — перестановкам первых двух координат.

Следствием такой «бедности» групп изометрий пространства Джеймса является существование ретракции группы изоморфизмов, т. е. группы всех обратимых операторов пространства Джеймса, на группу изометрий. Видимо, это первый пример такой ситуации, отличный от гильбертова пространства.

Мы надеемся, что техника доказательства поможет в дальнейшем описать группы изометрий квазирефлексивных пространств.

1. Напомним, что пространство Джеймса J_{C} (J_{R}) состоит из тех последовательностей $z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ комплексных (вещественных) чисел, для которых конечна норма

$$\| z \|_J^2 = \sup_{p_1 < \ldots < p_{2n}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} | z_{p_{2i-1}} - z_{p_{2i}} |^2 \right\} .$$

Единичные орты $\{e_n = (\delta_n^k)_{k=1}^{\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют шаудеровский базис в J ($= J_{\mathrm{R}}$ или J_{C}). Сопряженное пространство J^* также реализуется как некоторое пространство последовательностей, в котором координатные функционалы $\{f_n = (\delta_n^k)_{k=1}^{\infty}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют шаудеровский базис. Второе сопряженное пространство J^{**} имеет следующее описание:

$$J^{**} = \{ z = (z_k)_{k=0}^{\infty} \mid \lim_{k \to \infty} z_k = z_0, \qquad (z_k - z_0)_{k=1}^{\infty} \in J \};$$

при этом $\| z \|_{J^{**}} = \lim_{n \to \infty} \| (z_1, \ldots, z_n, 0, 0, \ldots) \|_J$, и последовательность $e_0 = (1, 1, 1, \ldots)$, $e_1, e_2, \ldots$ образует базис J^{**}. Образ $\varkappa(J)$ при каноническом вложении J в J^{**} совпадает с гиперплоскостью $\{z_0 = 0\}$, так что $J^{**} = J \oplus [e_0]$, где $[e_0]$ — одномерное подпространство, порожденное вектором e_0 (иными словами, пространство Джеймса J квазирефлексивно с индексом 1). Иногда в пространстве Джеймса рассматривают норму, эквивалентную норме $\| \cdot \|$ (см. [7])

$$\| z \|_0^2 = \sup_{p_1 < p_2 \ldots p_n} \left\{ | z_{p_1} - z_{p_n} |^2 + \sum_{i=1}^{n-1} | z_{p_{i+1}} - z_{p_i} |^2 \right\} .$$

Известно, что в норме $\|\cdot\|_0$ пространство Джеймса изометрично своему второму сопряженному.

Через Iso (E) будем обозначать группу всех обратимых изометрий банахова пространства E. Мы подробно изучим строение группы Iso (J) в случае, когда $J = (J_{\mathrm{C}}, \|\cdot\|)$

(теорема 1); остальные случаи рассматриваются аналогично (см. теоремы 2, 3). Доказательство теоремы 1 основано на леммах 1—6.

2. ЛЕММА 1. *Если* $z = (z_k)_{k=0}^{\infty} \in J^{**}$ *и* $\rho(z, \varkappa(J)) = \| z \|$, *то* $z = (z_0, z_0, \ldots) = z_0 e_0$.

Доказательство. Допустим, что среди чисел z_k найдутся два неравных между собой, например $z_n \neq z_m$, т. е. $|z_n - z_m| = \varepsilon > 0$. Тогда при $k > \max(n, m)$ имеем

$$\| (z_1, \ldots, z_k, 0 \ldots) \|_J^2 \geqslant \varepsilon + |z_k|^2$$

и, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$\| z \|^2 \geqslant \varepsilon^2 + |z_0|^2,$$

таким образом, $\rho^2(z, \varkappa(J)) \geqslant \varepsilon^2 + |z_0|^2$. Но, с другой стороны, $z - z_0 e_0 \in \varkappa(J)$, поэтому $\rho(z, \varkappa(J)) \leqslant \| z_0 e_0 \|_{J^{**}} = |z_0|$, что приводит к противоречию. Лемма доказана.

Обозначим через T_φ ($\varphi \in \mathbf{R}$) изометрию в J вида $T_\varphi(z) = e^{i\varphi} z$. Прямым подсчетом можно показать, что при всех $z \in J^{**}$

$$T_\varphi^{**}(z) = e^{i\varphi} z.$$

ЛЕММА 2. *Для любого* $T \in \mathrm{Iso}(J)$ *найдется такое* $\varphi \in \mathbf{R}$, *что* $(T_\varphi \circ T)^{**} e_0 = e_0$.

Доказательство. Так как $T^{**}|_{\varkappa(J)} = T$ и $T^{**}(\varkappa(J)) = \varkappa(J)$, то $\rho(T^{**}e_0, \varkappa(J)) = 1 = \| T^{**} e_0 \|$. По лемме 1 $T^{**} e_0 = e^{-i\varphi} e_0$ для некоторого $\varphi \in \mathbf{R}$. Тогда $(T_\varphi \circ T)^{**} e_0 = T_\varphi^{**} \circ T^{**} e_0 = e_0$, что и требовалось доказать.

Положим по определению

$$\Sigma = \left\{ f = \sum\nolimits_n \beta_n f_n \in J^* \mid \| f \| = e_0(f) = \sum\nolimits_n \beta_n \right\}.$$

ЛЕММА 3. *Если* $T \in \mathrm{Iso}(J)$ *и* $T^{**} e_0 = e_0$, *то* $T^*(\Sigma) = \Sigma$.

Доказательство. Если $f \in \Sigma$, то $\| T^* f \| = \| f \| = e_0(f) = (T^{**} e_0) f = e_0(T^* f)$, т. е. $T^* f \in \Sigma$. Обратно, пусть $g \in \Sigma$. Так как $T^{-1} \in \mathrm{Iso}(J)$ и $(T^{-1})^{**} e_0 = e_0$, то $f = (T^{-1})^* g \in \Sigma$, и поэтому $g = T^* f$, где $f \in \Sigma$. Лемма доказана.

3. Перейдем к описанию множества Σ.

ЛЕММА 4. *Множество* Σ *совпадает с конусом неотрицательных последовательностей из* J^*, *т. е.*

$$\left(f = \sum\nolimits_n \beta_n f_n \in \Sigma \right) \Leftrightarrow (\beta_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Пусть $f=\sum_n \beta_n f_n$ и $\beta_n \geqslant 0$ при $n=1, 2, \ldots$ Тогда $\| f \| \leqslant \sum_n \| \beta_n f_n \| = \sum_n | \beta_n | = \sum_n \beta_n = e_0(f)$. С другой стороны, так как $\left\| \sum_{k=1}^n e_k \right\|_J = 1$, то

$$\| f \| \geqslant \left| f\left(\sum_{k=1}^n e_k\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \right| = \sum_{k=1}^n \beta_k$$

и $\| f \| \geqslant \sum_n \beta_n = e_0(f)$. Таким образом, $\| f \| = e_0(f)$, т. е. $f \in \Sigma$.

Доказательство обратной импликации $(f \in \Sigma) \Rightarrow (\beta_n \geqslant 0,\ n=1, 2, \ldots)$ проведем от противного, обозначив за $\beta = \beta_{k_0}$ первое из тех комплексных чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, которые неположительны. Можно считать, что $\sum_n \beta_n = e_0(f) > 0$, так как в противном случае заведомо $e_0(f) \neq \| f \|$, т. е. $f \notin \Sigma$.

Для любых $N \in \mathbf{N}$ и $\varepsilon \in \mathbf{C}$ таких, что $N \geqslant k_0$ и $\varphi = \arg \varepsilon \notin]-\pi/2; \pi/2[$, рассмотрим элементы $X = X_N = \sum_{k=1}^N e_k$, $Y = Y_{N,\varepsilon} = X_N + \varepsilon e_{k_0}$ и $Z = Z_{N,\varepsilon} = Y/\| Y \|$. Тогда

$$\| Y \|^2 = \| (1, \ldots, 1+\varepsilon, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) \|^2 = \\ = \max(1 + |\varepsilon|^2, 1, |1+\varepsilon|^2) = 1 + |\varepsilon|^2.$$

Оценим величину $| f(Z) - f(X) |$ при достаточно малых $|\varepsilon|$ и достаточно больших N. Имеем

$$|f(Z) - f(X)| = \left| \frac{\sum_{k=1}^N \beta_k + \varepsilon\beta}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} - \sum_{k=1}^N \beta_k \right| = \\ = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \left| - \frac{\sqrt{1+|\varepsilon|^2} - 1}{|\varepsilon|} \sum_{k=1}^N \beta_k + e^{i\varphi}\beta \right|.$$

Так как $\sqrt{1+|\varepsilon|^2} - 1 = o(|\varepsilon|)$ и так как множество $\left\{ \left| \sum_{k=1}^N \beta_k \right| \right\}_{N=1}^\infty$ ограничено, то найдутся такие $0 < \rho_0 < 1$ и $N_0 \in \mathbf{N}$, что при всех $\varepsilon \in \mathbf{C}$ с $0 < |\varepsilon| < \rho_0$ и при всех $N \geqslant N_0$ верно неравенство

$$|f(Z) - f(X)| > \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}} \frac{|\beta|}{2} > \frac{|\beta||\varepsilon|}{4}.$$

Покажем теперь, что при надлежащем выборе $\varphi = \arg \varepsilon \notin]-\pi/2; \pi/2[$ комплексное число $f(Z) - f(X)$ можно сделать чисто мнимым или положительным в зависимости от β.

Пусть β невещественно. Тогда полуокружность $\{e^{i\varphi}\beta \mid \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2\}$ пересечет мнимую ось в некоторой внутренней точке. Так как существует

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \beta_k = e_0(f) > 0$$

и так как $\sqrt{1+|\varepsilon|^2} - 1 = o(|\varepsilon|)$, то при достаточно малых $|\varepsilon|$ и достаточно больших N малый сдвиг окружности $\{e^{i\varphi}\beta \mid \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2\}$ на $\frac{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}-1}{|\varepsilon|}\sum_{k=1}^{N}\beta_k$ также пересечет мнимую ось.

Если β отрицательно, то аналогичное рассуждение показывает, что можно так выбрать $\varphi = \arg \varepsilon \notin]-\pi/2; \pi/2[$, что

$$f(Z) - f(X) =$$
$$= \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}\left(-\frac{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}-1}{|\varepsilon|}\sum_{k=1}^{N}\beta_k + e^{i\varphi}\beta\right) > 0.$$

Итак, найдутся такие $0 < \rho_1 < \rho_0 < 1$ и $N_1 \geqslant N_0$, что при всех $\varepsilon \in \mathbf{C}$ с $0 < |\varepsilon| < \rho_1$ и $N \geqslant N_1$, при некоторых $\varphi = \varphi_{N,|\varepsilon|} \notin]-\pi/2; \pi/2[$ комплексные числа $f(Z_{N,\varepsilon}) - f(X_N)$ являются чисто мнимыми или положительными, и выполняются неравенства

$$|f(Z_{N,\varepsilon}) - f(X_N)| > |\beta|\,|\varepsilon|/4,$$

где $\varepsilon = |\varepsilon|\, e^{i\varphi}$.

Зафиксируем теперь $|\varepsilon| = \rho_1/2$, а N устремим к бесконечности, выбирая $\varphi_{N,|\varepsilon|} = \varphi_N$ описанным выше образом. Так как $\lim_{N\to\infty} f(X_N) = e_0(f) > 0$, то можно считать, что $f(X_N)$ лежит в правой полуплоскости. Значит, найдется такое $C > 0$, что

$$|f(Z_{N,\varepsilon})| \geqslant |f(X_N)| + C.$$

Учитывая, что $\|Z_{N,\varepsilon}\| = 1$ при всех ε и N, и переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем, что

$$\|f\| \geqslant e_0(f) + C.$$

Это противоречие завершает доказательство леммы 4.

4. Для всякой перестановки σ натурального ряда определим линейный оператор T_σ, положив для всех $n \in \mathbf{N}$

$$T_\sigma(e_n) = e_{\sigma(n)}$$

ЛЕММА 5. *Если* $T \in \operatorname{Iso}(J)$ *и* $T^{**}e_0 = e_0$, *то* $T = T_\sigma$ *для некоторой перестановки* σ *натурального ряда.*

Доказательство. По лемме 4 неотрицательный конус Σ в J^* совпадает с неотрицательным конусом в пространстве l_1 над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел, а по лемме 3 изометрия T^* переводит Σ на себя. Но всякая изометрия, переводящая на себя неотрицательный конус в l_1, индуцируется некоторой перестановкой σ натурального ряда, так как множество координатных ортов должно переходить в себя как множество крайних точек w^*-компакта, инвариантного относительно данной изометрии. Поэтому $T^* = T_\sigma$. Тогда оператор T^{**} индуцируется перестановкой множества $\mathbf{N} \cup \{0\}$, оставляющей 0 на месте, а на $\mathbf{N}$ совпадающей с σ^{-1}. Так как $T^{**}|_{\varkappa(J)} = T$, то тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если* $T \in \operatorname{Iso}(J)$ *и* $T^{**}e_0 = e_0$, *то либо* $T = Id|_J$, *либо* $T = T_\sigma$, *где* $\sigma(e_1) = e_2$, $\sigma(e_2) = e_1$ *и* $\sigma(e_n) = e_n$ *при* $n \geqslant 3$.

Доказательство. По лемме 5 $T = T_\sigma$ для некоторой перестановки σ натурального ряда. Допустим, что $\sigma(1) = 1$, а $\sigma(2) > 2$. Тогда

$$1 = \|(1, 1, 1/2, 1/3, \ldots)\|^2 = \|T(1, 1, 1/2, 1/3, \ldots)\|^2 = \\ = \|(1, 1/k, \ldots, 1, \ldots)\|^2 \geqslant (1 - 1/k)^2 + 1$$

при некотором $k > 1$, что противоречит изометричности T. Поэтому $\sigma(2) = 2$, и аналогично $\sigma(n) = n$ при всех $n \in \mathbf{N}$, т. е. $T = Id|_J$.

Если $\sigma(1) > 2$, то

$$1 = \|(1, 1/2, 1/3, \ldots)\|^2 = \\ = \|T(1, 1/2, 1/3, \ldots)\|^2 = \|(1/k, 1/n, \ldots \\ \ldots, 1, \ldots)\|^2 \geqslant (1/k - 1/n)^2 + 1,$$

где $k \neq n$. Полученное противоречие показывает, что если $\sigma(1) \neq 1$, то $\sigma(1) = 2$. Допустим, что при $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) \neq 1$. Тогда для $\alpha \in]\sqrt{2/3}, 1[$ имеем

$$1 = \|(1, \alpha, 1/3, 1/4, \ldots)\|^2 = \\ = \|T(1, \alpha, 1/3, 1/4, \ldots)\|^2 = \\ = \|(1/k, 1, \ldots, \alpha, \ldots)\|^2 \geqslant \\ \geqslant (1 - 1/k)^2 + \alpha^2 > 1 - 2/k + \alpha^2 > 1 + 2(1/3 - 1/k),$$

где $k \geqslant 3$. Полученное противоречие показывает, что если $\sigma(1) = 2$, то $\sigma(2) = 1$. Допустим, что при этом $\sigma(3) > 3$.

Тогда для $\alpha \in]\sqrt{2/3};\ 1[$ получаем: $1 = \| (1,\ 1,\ \alpha,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots) \|^2 = (1,\ 1,\ 1/k,\ \ldots,\ \alpha,\ \ldots) \|^2 \geqslant (1 - 1/k)^2 + \alpha^2 > 1 + 2\,(1/3 - 1/k)$, чего не может быть. Итак, $\sigma(3) = 3$ и аналогично $\sigma(n) = n$ при всех $n > 3$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Топологическая группа* $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathbf{C}}, \|\cdot\|)$ *изоморфна прямому произведению* $S^1 \times \mathbf{Z}_2$.

Доказательство. Для всякого $T \in Iso\,(J)$ рассмотрим (см. также [8]) оператор $A\,(T) = T^{**}/T$. По леммам 1 и 2 получаем, что $A\,(T) \in \mathrm{Iso}\,(J^{**}/\varkappa\,(J)) = \mathrm{Iso}\,(\mathbf{C}) = S^1$. Легко видеть, что при этом соответствие $T \mapsto A\,(T)$ задает непрерывный гомоморфизм $A\colon \mathrm{Iso}\,(J) \to S^1$. Рассмотрим также непрерывный гомоморфизм B: $S^1 \to \mathrm{Iso}\,(J)$, который задается равенством $(Bs)\,(z) = sz$ при $s \in S^1$ и $z \in J$. Прямое вычисление показывает, что $(Bs)^{**}\colon z \mapsto sz$ при $z \in J^{**}$, и поэтому композиция $A \circ B$ совпадает с $Id\,|_{S^1}$.

Следовательно, топологическая группа $\mathrm{Iso}\,(J)$ изоморфна полупрямому произведению групп $\mathrm{Ker}\,A$ и $B\,(S^1)$. Но по лемме 6 $Ker\,A$ состоит из двух элементов. Итак, $\mathrm{Ker}\,A$ изоморфна $\mathbf{Z}_2$, а $B\,(S^1)$ изоморфна S^1, и так как элементы $\mathrm{Ker}\,A$ коммутируют с элементами $B\,(S^1)$, то топологическая группа $Iso\,(J)$ изоморфна прямому произведению $S^1 \times \mathbf{Z}_2$. Теорема доказана.

5. Аналогичные рассуждения для нормы

$$|||\cdot||| = \sqrt{\frac{\|\cdot\|^2 + \|\cdot\|_0^2}{3}}$$

позволяют утверждать, что $\mathrm{Ker}\,A$ в этом случае состоит только из $Id\,|_J$, т. е. верна

ТЕОРЕМА 2. *Топологическая группа* $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathbf{C}}, |||\cdot|||)$ *совпадает с группой* $B\,(S^1)$ *и, в частности, изоморфна* S^1.

Следствие. *Группа изометрий* $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathbf{C}}, |||\cdot|||)$ *является деформационным ретрактом группы* $GL\,(J_{\mathbf{C}})$ *всех обратимых линейных операторов в пространстве Джеймса* $J_{\mathbf{C}}$.

Доказательство. В [8] доказано, что топологическая группа $GL\,(J_{\mathbf{C}})$ изоморфна полупрямому произведению $GL\,(\mathbf{C}) \times G_1$, где G_1 — некоторая гомотопически тривиальная топологическая группа. В частности, $GL\,(\mathbf{C})$ является деформационным ретрактом $GL\,(J)$. В свою очередь $S^1 = Iso\,(\mathbf{C})$ — деформационный ретракт $GL\,(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$, и так как по теореме 1 $I\mathrm{so}\,(J_{\mathbf{C}}, |||\cdot|||)$ изоморфна S^1, то окончательно получаем, что $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathrm{C}}, ||| \cdot |||)$ является деформационным ретрактом $GL\,(J_{\mathrm{C}})$.

Отметим также, что все вышеизложенные построения остаются верными и в вещественном случае. Более того, для J_{R} доказательство упрощается, так как в технически наиболее сложной лемме 4 достаточно рассматривать только случай, когда $\beta = \beta_{k_0} < 0$, и выбирать при этом ε отрицательным (см. лемму 4). Поэтому верна

ТЕОРЕМА 3. *Топологическая группа* $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathrm{R}}, \| \cdot \|)$ *изоморфна прямому произведению* $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, *а группа* $\mathrm{Iso}\,(J_{\mathrm{R}}, ||| \cdot |||)$ *изоморфна* $\mathbf{Z}_2$ *и является деформационным ретрактом группы* $GL\,(J_{\mathrm{R}})$ *всех обратимых линейных операторов в пространстве* J_{R}.

Авторы благодарны М. Г. Зайденбергу за ряд ценных советов и обсуждение полученных результатов.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
21.05.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Банах С. Курс функціонального аналізу.— Київ: Радянська школа, 1948.

[2] Rolewicz S. Metric linear spaces.— Warsawa: Inst. of math. of Polska akad. nauk, 1972.

[3] Lacey H. The isometric theory of classic Banach spaces.— Berlin: Springer, 1974.

[4] Браверман М. Ш., Семенов Е. М. Изометрии симметричных пространств.— Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 2, с. 257—259.

[5] Скорик А. И. Об изометриях идеальных координатных пространств.— Успехи мат. наук, 1976, т. 31, вып. 2, с. 229—230.

[6] Sourour A. The isometries of $L_p\,(\Omega, X)$.— J. Funct. Anal. 1978, v. 30, № 2, p. 276—285.

[7] James R. C. A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, v. 37, № 3, p. 174—177.

[8] Митягин Б. С., Эдельштейн И. С. Гомотопический тип линейной группы двух классов банаховых пространств.— Функцион. анализ и его прил., 1970, т. 4, вып. 3, с. 61—72.