ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь № 5

О ПОТОКАХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. П. ПЫТЬЕВ

(*Москва*)

При рассмотрении потоков заряженных частиц в электромагнитном поле возникают задачи двух типов. В задачах первого типа (прямых задачах) задаются магнитное и электрическое поля и исследованию подлежат возможные в этих полях траектории. Этот тип задач сводится к исследованию решений следующей системы уравнений с частными производными:

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}\mathbf{v}\times\mathbf{H}. \tag{1}$$

Входящие сюда электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ считаются известными решениями уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c}\rho v, & \nabla\times\mathbf{E} &= 0, \\ \nabla\mathbf{H} &= 0, & \nabla\mathbf{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned} \tag{2}$$

При этом в случае плотных потоков учитывается действие пространственного заряда (действие собственного магнитного поля обычно не учитывается) и задача сильно усложняется, так как уравнения (1) приходится рассматривать совместно с уравнениями (2), в которых первое уравнение заменяется на

$$\nabla(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{3}$$

Однако при конструировании электронных приборов зачастую требуется создать поток заряженных частиц с требуемыми свойствами. В такого рода задачах поток заряженных частиц следует считать заданным и исследовать решения уравнений Максвелла (2), которые могут сформировать такой поток. По отношению к предыдущей задаче эта задача является обратной. В применении к электронной оптике обратная задача рассмотрена в работах [1], [2], причем в [1] рассматриваются потоки, близкие к произвольной кривой, а в [2] — близкие к произвольной поверхности. Для потоков в электрическом поле задача рассматривалась в работах [3]. При этом на поток накладывалось следующее ограничение: линии тока должны были служить координатными линиями некоторой ортогональной криволинейной системы координат. В цитируемых работах получено уравнение, которому должны удовлетворять коэффициенты Ламе этой системы координат, и найдены его решения. При аналогичном ограничении строится теория формирования потоков в произвольном электромагнитном поле в работе [4]. В этой работе развивается метод определения полей по свойствам потока при условии, что рассматриваемый поток существует.

В настоящей работе рассматривается следующая обратная задача: задано двухпараметрическое семейство кривых; выяснить, в каком случае это семейство может служить линиями тока потока заряженных частиц в электрическом поле.

§ 1. Уравнения линий тока потока заряженных частиц в электромагнитном поле

Движение заряженных частиц в электромагнитном поле описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{e}{mc}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\mathbf{H} + \frac{e}{m}\mathbf{E}. \tag{1.1}$$

Здесь e — заряд частицы, m — ее масса, c — скорость света, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля соответственно. Уравнения (1.1) допускают интеграл вида

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = \frac{e}{m}V + C, \tag{1.2}$$

где V — потенциал электрического поля, связанный с полем $\mathbf{E}$ посредством равенства

$$\mathbf{E} = \nabla V. \tag{1.3}$$

Стоящая справа в (1.2) величина C остается постоянной вдоль каждой траектории, а следовательно, и вдоль каждой линии тока в потоке (поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от времени, поэтому траектории частиц совпадают с линиями тока). Так как C, вообще говоря, меняется от траектории к траектории, мы обязаны ее считать функцией координат, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}\nabla C = 0. \tag{1.4}$$

Введем обозначение

$$\Phi = \frac{e}{m}V + C; \tag{1.5}$$

тогда, если s — длина дуги траектории, то из (1.2) следует, что

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2\Phi, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\Phi}{ds} = \dot{\Phi}. \tag{1.6}$$

Пусть пространство, в котором происходит движение, отнесено к произвольным криволинейным координатам ξ^1, ξ^2, ξ^3; тогда

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}_i\dot{\xi}^i\sqrt{2\Phi}, \qquad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = (\mathbf{x}_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j + \mathbf{x}_i\ddot{\xi}^i)\,2\Phi + \mathbf{x}_i\dot{\xi}^i\dot{\Phi}. \tag{1.7}$$

Здесь использованы равенства (1.6). Подставляя выражения (1.7) в уравнения (1.1), получаем уравнения траектории (линии тока):

$$\ddot{\xi}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{\xi}^j\dot{\xi}^k = \varepsilon^i_{\cdot jk}\dot{\xi}^j h^k + G^{ij}\varphi_j - \dot{\xi}^i\varphi_j\dot{\xi}^j - e^{-2\varphi}G^{ij}C_j/v_0^2. \tag{1.8}$$

Здесь

$$\varphi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^i} = \frac{1}{2\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}, \qquad h^i = \frac{e}{mc}H^i\frac{1}{\sqrt{2\Phi}}, \qquad \dot{\xi}^iC_i = 0, \tag{1.9}$$

и остальные обозначения те же, что и в [2]. Так как уравнения (1.8) отнесены к длине дуги как к параметру, то каждое их решение следует норми-

ровать таким образом, чтобы

$$G_{ij}\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j = 1.$$

Время вдоль траектории связано с длиной дуги посредством равенства

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \exp \varphi,$$

в котором v_0 можно считать начальной скоростью, если в начале траектории положить $\varphi = 0$.

§ 2. Допустимые поля двухпараметрического семейства кривых

Пусть в пространстве задано двухпараметрическое семейство кривых

$$\xi^i = \xi^i(s, \alpha, \beta) \tag{2.1}$$

такое, что

$$\frac{\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial(s, \alpha, \beta)} \neq 0. \tag{2.2}$$

Пусть кривые семейства удовлетворяют уравнениям (1.8). В силу условия (2.2) уравнения (2.1) могут быть разрешены относительно s, α и β. Подставляя найденные величины в $\dot{\xi}^i(s, \alpha, \beta)$ и $\ddot{\xi}^i(s, \alpha, \beta)$, получаем, что на семействе (2.1)

$$\dot{\xi}^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial s} = \tau^i(\xi^j), \qquad \ddot{\xi}^i = \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial s^2} = \nu^i(\xi^j)$$

суть заданные функции координат (т. е. заданием семейства (2.1) определены два векторных поля τ^i и ν^i). Все коэффициенты уравнений (1.8) суть также функции координат, и поэтому, если нам удастся из (1.8) определить φ_i и h^i, то они окажутся выраженными через координаты ξ^k. Поля φ_i и h^i будем называть допустимыми относительно семейства (2.1), если они удовлетворяют уравнениям (1.8) на этом семействе.

Итак, допустимые поля суть решения уравнений

$$\Gamma^i = \nu^i + \Gamma^i_{jk}\tau^j\tau^k = \varepsilon^i_{\cdot jk}\tau^j h^k + G^{ij}\varphi_j - \tau^i\varphi_j\tau^j - \frac{e^{-2\varphi}}{v_0^2}G^{ij}C_j \tag{2.3}$$

относительно φ_i и h^i. Отметим, что для уравнений (2.3) имеют место равенства

$$(\varepsilon_{ijk}\tau^j h^k + \varphi_i - \tau_i\varphi_j\tau^j - e^{-2\varphi}C_i/v_0^2)\,\tau^i = 0,$$
$$\Gamma_i\tau^i = G_{ij}\tau^i(\nu^j + \Gamma^j_{pk}\tau^p\tau^k) = G_{ij}\tau^i\tau^j_{,p}\tau^p = 0,$$

так что в (2.3) фактически два уравнения. Поскольку из (2.3) предстоит определить шесть функций φ_i, h^i, то найденные решения должны содержать четыре произвольные функции координат. Допустимые поля без труда находятся из системы (2.3), если воспользоваться следующим тождеством:

$$\varepsilon_{kij}\varepsilon^j_{\cdot pl}z^i x^p y^l = z_i(x_k y^i - y_k x^i). \tag{2.4}$$

Действительно, пусть вектор s_i такой, что $s_i\tau^i = 0$. Положим

$$h_i^0 = \varepsilon_{ijk}\tau^j s^k.$$

Тогда в силу (2.4) и $\tau_i\tau^i = 1$ находим

$$s_i = -\varepsilon_{ijk}\tau^j h^{0k}$$

и, если $\overset{0}{\varphi}_i\tau^i = 0$, то из (2.3) следует

$$\Gamma_i = \overset{0}{\varphi}_i - s_i - e^{-2\varphi}C_i/v_0^2, \qquad \tau^i s_i = 0.$$

Поэтому

$$h_i^0 = \varepsilon_{ijk}\tau^j s^k, \qquad \overset{0}{\varphi}_i = \Gamma_i + s_i + e^{-2\varphi}C_i/v_0^2$$

есть решение системы (2.3). Но величины

$$\varphi_i = \overset{0}{\varphi}_i + \mu\tau_i, \qquad h_i = h_i^0 + \lambda\tau_i$$

также удовлетворяют уравнениям (2.3), и найденные таким образом допустимые поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \Gamma_i + s_i + e^{-2\varphi}C_i/v_0^2 + \mu\tau_i, \\ h_i &= \varepsilon_{ijk}\tau^j s^k + \lambda\tau_i, \qquad \tau_i s^i = \tau^i C_i = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Это решение действительно содержит четыре произвольные функции μ, λ, s_i, $\tau^i s_i = 0$.

Отметим, что уравнения (2.3) инвариантны относительно следующей замены искомых функций (при $C = \text{const}$):

$$h_i = -\varepsilon_{ijk}\tau^j\tilde{\varphi}^k + \tilde{\lambda}\tau_i, \qquad \varphi_i = \varepsilon_{ijk}\tau^j\tilde{h}^k + \tilde{\mu}\tau_i,$$

т. е., если $\tilde{\varphi}_i$ и $\tilde{h}_i$ принять за новые поля, то уравнения (2.3) сохраняют вид

$$\Gamma_i = \varepsilon_{ijk}\tau^j\tilde{h}^k + \tilde{\varphi}_i - \tau_i\tilde{\varphi}_j\tau^j. \tag{2.3a}$$

Решение системы (2.3а) записывается в форме

$$\tilde{\varphi}_i = \Gamma_i + \tilde{s}_i + \tilde{\mu}\tau_i, \quad \tilde{h}_i = \varepsilon_{ijk}\tau^j\tilde{s}^k + \tilde{\lambda}\tau_i,$$

и оно связано с решением (2.5) (при $C = \text{const}$) посредством формул

$$\Gamma_i = s_i + \tilde{s}_i = 0, \quad \mu = \tilde{\mu}, \quad \lambda = \tilde{\lambda}.$$

§ 3. Нормальные потоки в электрическом поле

Потоки, для которых $C = \text{const}$, называются нормальными. Физически эти потоки можно охарактеризовать условием, чтобы на поверхностях $V = \text{const}$ частицы имели постоянное значение энергии. Это условие будет выполнено, если частицы эмитируются с поверхности, имеющей постоянный потенциал, и с постоянной энергией (например, эмиссия с металлического катода, если не учитывать теплового разброса скоростей). Ниже будут рассмотрены потоки, для которых можно пренебречь действием собственного магнитного поля ($v^2/c^2 \ll 1$, мало отношение поперечных размеров пучка к продольным). Итак, рассмотрим двухпараметрическое семейство кривых, допустимое поле которого, в согласии с (2.5), имеет вид

$$\nabla\varphi = \Gamma + \mu\tau \tag{3.1}$$

(в равенствах (2.5) $\nabla C = 0$ по определению, а из $\mathbf{h} = 0$ следует, что $\lambda = 0$ и $\mathbf{s} = 0$, так как $\tau\times\mathbf{s} \perp \tau$). Равенство (3.1) накладывает известные огра-

ничения на исходное семейство, а именно: вектор $\Gamma + \mu\tau$ должен быть потенциальным. Для удовлетворения этого требования в нашем распоряжении имеется одна произвольная функция μ. Кроме того, из уравнений (2) следует, что электрическое поле $\mathbf{E}$, порожденное допустимым полем $\nabla\varphi$, должно удовлетворять уравнениям

$$\nabla\times\mathbf{E} = 0, \qquad \nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{3.2}$$

Так как

$$2\Phi = v_0^2 \exp 2\varphi, \qquad \mathbf{E} = \frac{m}{e}\nabla\Phi \tag{3.3}$$

(без ущерба для общности мы будем считать $C = 0$), то мы получаем ограничение на допустимое поле, определенное из (3.1), иными словами, поле $\nabla\varphi$, определенное из (3.1), должно удовлетворять уравнениям

$$\Delta(\exp 2\varphi) = \frac{8\pi e}{v_0^2 m}\rho, \qquad \nabla(\tau \exp\varphi\Delta \exp 2\varphi) = 0. \tag{3.4}$$

Первое уравнение (3.2) удовлетворяется тождественно, первое уравнение (3.4) служит для определения плотности заряда в потоке и только второе уравнение (3.4) — уравнение неразрывности потока — представляет ограничение на выбор исходного двухпараметрического семейства. Таким образом, ограничения на выбор семейства (2.1) определятся последним уравнением (3.4) и уравнением (3.1).

Рассмотрим уравнение (3.1). Так как справа должен стоять потенциальный вектор, следует потребовать, чтобы уравнение

$$\nabla\times\Gamma + \mu\nabla\times\tau + \nabla\mu\times\tau = 0 \tag{3.5}$$

удовлетворялось как следствие уравнения (3.1). Отсюда находим

$$\tau\nabla\times\Gamma + \mu\tau\nabla\times\tau = 0. \tag{3.6}$$

Если семейство (2.1) таково, что

$$\tau\nabla\times\tau \neq 0, \tag{3.7}$$

то из (3.6) следует, что

$$\mu = -(\tau\nabla\times\Gamma)/(\tau\nabla\times\tau) = -\nabla\tau - \tau\nabla(\tau\nabla\times\tau) \tag{3.8}$$

должно быть решением (3.5). Таким образом мы приходим к первому требованию, ограничивающему выбор исходного семейства (2.1): семейство (2.1) должно быть таким, что если выполняется (3.7), то должно быть

$$\nabla\times\Gamma - \nabla\times\tau(\tau\nabla\times\Gamma)/(\tau\nabla\times\tau) + \tau\times\nabla[(\tau\nabla\times\Gamma)/(\tau\nabla\times\tau)] = 0. \tag{3.9}$$

С другой стороны, из уравнения (3.4) вытекает, что для любого семейства должно иметь место равенство

$$[\nabla\tau + 3\mu + (\tau\nabla)][\nabla(\Gamma + \mu\tau) + 2(\Gamma + \mu\tau)^2] = 0. \tag{3.10}$$

Подставляя сюда μ из (3.8), получаем еще одно ограничение на выбор семейства (2.1). Так как вектор кривизны семейства Γ имеет вид

$$\Gamma = \frac{d\tau}{ds} = (\tau\nabla)\tau = (\nabla\times\tau)\times\tau, \tag{3.11}$$

то, подставив (3.11) в (3.9) и в (3.10), приходим к заключению:

если векторное поле τ *единичных касательных векторов семейства* (2.1) *удовлетворяет условию* (3.7), *то кривые названного семейства могут служить линиями тока потока заряженных частиц в электрическом поле в том и только в том случае, если поле удовлетворяет уравнениям* (3.9) *и* (3.10) (μ и Γ *подставляются в названные уравнения из* (3.8) *и* (3.11)).

Эти уравнения представляют систему трех уравнений с частными производными. В рассмотренном случае электрическое поле жестко связано с семейством (2.1). Если поток построен, т. е. удовлетворены уравнения (3.9) и (3.10), то по формулам (3.1) и (3.8) электрическое поле определено однозначно, точнее, с точностью до мультипликативной постоянной v_0^2, которая характеризует скорости в потоке. Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi &= \int [\Gamma_i - \tau_i (\tau\nabla \times \Gamma) / (\tau\nabla \times \tau)]\, d\xi^i, \\ \mathbf{E} &= \frac{mv^2{}_0}{2e} \nabla (\exp 2\varphi). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь случай, когда (3.7) не выполняется. Пусть

$$\tau\nabla \times \tau = 0. \tag{3.13}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \tau\nabla \times \Gamma = \tau\nabla \times [(\nabla \times \tau) \times \tau] = \tau [(\nabla \times \tau) \nabla\tau + (\tau\nabla)(\nabla \times \tau) - [(\nabla \times \tau) \nabla] \tau] = \\ = \tau (\tau\nabla)(\nabla \times \tau) = -(\nabla \times \tau)(\tau\nabla)\tau = 0 \end{aligned}$$

и уравнение (3.6) исчезает тождественно. Оставшееся уравнение (3.5) представляет систему двух уравнений с частными производными относительно функции μ. При рассмотрении этой системы нам могут представиться две возможности.

1. Система (3.5) замкнута, т. е. любое уравнение, получаемое из (3.5) применением скобок Якоби, является алгебраическим следствием уравнений (3.5) . В этом случае решение системы (3.5) будет содержать одну произвольную функцию одной переменной и этот же произвол будет в определении поля φ (см. [5]).

2. Система (3.5) не замкнута. В этом случае мы дополняем систему (3.5), составляя скобки Якоби, до системы трех уравнений и на полученную систему накладываем требование замкнутости (в противном случае исходная система не будет иметь решений). Требуя, чтобы получаемая система была замкнутой, т. е. любое четвертое уравнение, получаемое образованием скобок Якоби, являлось алгебраическим следствием первых трех, мы получаем ограничение на выбор семейства (2.1).

Однако мы сейчас покажем, что для системы (3.5) имеет место первый случай, а именно, докажем, что система уравнений

$$\nabla\mu \times \tau + \mu\nabla \times \tau + \nabla \times \Gamma = 0 \tag{3.14}$$

при условии

$$\tau\nabla \times \tau = 0$$

является замкнутой.

Как было показано, условие (3.13) влечет за собой тождественное исчезновение уравнения (3.6), так что это последнее не накладывает дополнительных ограничений на поток. Уравнения (3.5) в силу (3.6) могут быть разрешены относительно $\nabla\mu$:

$$\nabla\mu = k\tau + \mu\,(\nabla \times \tau) \times \tau + (\nabla \times \Gamma) \times \tau \tag{3.15}$$

или

$$\nabla\mu = k\tau + \mu\Gamma + (\nabla \times \Gamma) \times \tau,$$

где k — произвольная скалярная функция. Так как справа в (3.15) должен стоять градиент, то условия интегрируемости этой системы имеют вид

$$\nabla \times (k\tau) + \mu\nabla \times \Gamma + \nabla\mu \times \Gamma + \nabla \times [(\nabla \times \Gamma) \times \tau] = 0, \tag{3.16}$$

причем выполнения равенств (3.16) следует требовать как следствие уравнений (3.15). Умножим уравнение (3.16) скалярно на τ. Тогда

$$0 = (\nabla\mu)\,\Gamma\tau + \tau\nabla \times [(\nabla \times \Gamma) \times \tau] = (\nabla\mu)\,\Gamma\tau + \tau\,[(\nabla \times \Gamma)\,\nabla\tau + (\tau\nabla)\,(\nabla \times \Gamma) -$$
$$- [(\nabla \times \Gamma)\,\nabla]\,\tau] = (\nabla\mu)\,\Gamma\tau - (\nabla \times \Gamma)\,(\nabla \times \tau)\,\tau = (\nabla\mu)\,\Gamma\tau - \Gamma\nabla \times \Gamma. \tag{3.17}$$

Но из уравнений (3.15) следует, что

$$(\nabla\mu)\,\Gamma\tau = [(\nabla \times \Gamma) \times \tau]\,(\Gamma \times \tau) = \Gamma\nabla \times \Gamma,$$

так что условие (3.17) есть следствие уравнений (3.15). Покажем, что (3.17) как раз и есть условие интегрируемости системы (3.5). Действительно, так как в (3.5) всего два уравнения, то образованием скобок Якоби мы получаем лишь одно уравнение, и это уравнение не будет содержать k. С другой стороны, единственным условием интегрируемости, вытекающим из (3.15) и не содержащим k, является уравнение (3.17). Следовательно, (3.17) эквивалентно условиям интегрируемости системы (3.5) при условии (3.13). Но (3.17) есть следствие (3.5), откуда и следует доказательство. Доказанное положение позволяет рассматривать уравнение (3.1), не обращаясь к уравнениям (3.5) (если выполнено (3.13)), причем решение системы (3.1) должно содержать произвольную функцию одной переменной.

В качестве иллюстрации рассмотрим одномерные потоки, т. е. такие потоки, линии тока которых могут служить координатными линиями некоторой криволинейной системы координат. Для простоты систему координат будем предполагать ортогональной. Пусть элемент длины имеет вид

$$(dl)^2 = H_1^2\,(d\xi^1)^2 + H_2^2\,(d\xi^2)^2 + H_3^2\,(d\xi^3)^2,$$

а τ есть единичный вектор, касательный к координатным линиям $\xi^2 = \text{const}$, $\xi^3 = \text{const}$. Тогда

$$\nabla \times \tau = \frac{1}{H_1}\,(\nabla H_1) \times \tau,$$

и условие (3.13) выполняется автоматически. Следовательно, мы можем сразу рассматривать уравнения (3.1), будучи уверены, что они интегрируемы, и искать решение, зависящее от одной функции одной переменной. Несложные вычисления позволяют записать систему (3.1) в следующей

форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi^1} = H_1\mu, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^2} = -\frac{\partial \ln H_1}{\partial\xi^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^3} = -\frac{\partial \ln H_1}{\partial\xi^3}.$$

Общее решение этой системы усматривается без труда и имеет вид

$$\varphi = -\ln\left(H_1/f_1(\xi^1)\right), \qquad \mu = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln\left(H_1/f_1\right). \tag{3.18}$$

Подставляя (3.18) во второе уравнение (3.4), получаем условие на исходную систему координат:

$$\frac{H_2 H_3}{H_1} f_1(\xi^1)\,\Delta\cdot\left(\frac{f_1}{H_1}\right)^2 = f_2(\xi^2, \xi^3). \tag{3.19}$$

При этом, если условие (3.19) выполняется, то координатные линии $\xi^2 = \text{const}$, $\xi^3 = \text{const}$ могут служить линиями тока потока заряженных частиц в электрическом поле

$$\mathbf{E} = \frac{v_0^2 m}{2e}\nabla\left(\frac{f_1}{H_1}\right)^2.$$

Плотность заряда в потоке находится по формуле

$$\rho = \frac{v_0^2 m}{8\pi e}\Delta\left(\frac{f_1}{H_1}\right)^2.$$

Условие (3.19) содержит две произвольные функции и удовлетворяется для довольно широкого класса ортогональных координатных систем. Это условие было получено в работах [3]; там же рассмотрены решения уравнения (3.19). Однако условие (3.19) характеризует несколько ограниченный класс потоков, допускаемый условием (3.13).

Из условия (3.13) следует, что линии тока рассматриваемого потока допускают однопараметрическую систему поверхностей, ортогональных потоку. Рассмотренный же пример привносит дополнительное требование, чтобы упомянутая однопараметрическая система поверхностей могла быть включена в триортогональную систему поверхностей, что накладывает известные ограничения на исходное однопараметрическое семейство. Полученные результаты позволяют рассмотреть вопрос в общем случае. Из условия (3.13) вытекает, что векторное поле τ может быть представлено в виде

$$\tau = a\nabla b, \qquad (a\nabla b)^2 = 1. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.20) в (3.1), находим

$$\nabla\varphi = a\nabla a\,(\nabla b)^2 + a\nabla b\,(\nabla a\cdot\nabla b) + \mu a\nabla b,$$

или, используя второе условие (3.20),

$$\nabla\varphi = -\frac{\nabla a}{a} + \nabla b\,(\mu a + a\nabla a\cdot\nabla b).$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой градиент; чтобы второе слагаемое также было градиентом, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu a + a\nabla a\cdot\nabla b = F_1(b), \qquad \mu = F_1/a - \nabla a\cdot\nabla b.$$

Тогда

$$\varphi = -\ln a + \ln F_2, \qquad \ln F_2 = \int F_1(b)\, db$$

и ограничение на выбор исходного семейства (векторного поля τ) записывается в следующей форме:

$$\nabla [F_2 \nabla b \cdot \Delta (F_2 \nabla b)^2] = 0. \tag{3.21}$$

При этом порождающее поток электрическое поле находится по формуле

$$\mathbf{E} = \frac{mv_0^2}{2e} \nabla (F_2 \nabla b)^2,$$

плотность заряда в потоке выражается в виде

$$\rho = \frac{mv_0^2}{8\pi e} \Delta (F_2 \nabla b)^2.$$

В заключение рассмотрим двумерные потоки, т. е. такие потоки, линии тока которых лежат на координатных поверхностях некоторой криволинейной системы координат. Как и выше, система координат будет предполагаться ортогональной. Пусть линии тока лежат на координатных поверхностях $\xi^3 = \text{const}$, векторное поле τ будем считать выраженным по формуле

$$\tau = a \nabla b, \qquad (a \nabla b)^2 = 1, \qquad b = b(\xi^1, \xi^2).$$

Из уравнения (3.21) немедленно получаем, что такой поток возможен, если коэффициенты Ламе указанной системы координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\frac{H_2 H_3}{H_1} F_2 \frac{\partial b}{\partial \xi^1} \Delta (F_2 \nabla b)^2\right] + \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\frac{H_3 H_1}{H_2} F_2 \frac{\partial b}{\partial \xi^2} \Delta (F_2 \nabla b)^2\right] = 0.$$

На этом мы заканчиваем рассмотрение потоков в электрическом поле. Следует отметить, что развитый метод позволяет рассмотреть общий случай потоков в электрическом поле (когда $(\nabla C \neq 0)$), а также случай потоков в произвольном электромагнитном поле.

Автор выражает искреннюю признательность Ю. Н. Днестровскому за стимулирующие дискуссии и ценные советы.

Поступила в редакцию
5. 02. 1962

Цитированная литература

1. Г. А. Гринберг. Основы общей теории фокусирующего действия электрических и магнитных полей. Докл. АН СССР, 1942, **37**, № 5—6, 197—200; Основы общей теории фокусирующего действия электрических и магнитных полей. II. Пространственные электростатические поля. Докл. АН СССР, 1942, **37**, № 9, 295 — 305.
2. Ю. П. Пытьев. Электронная оптика приповерхностных пучков. Вестн. Моск. ун-та. Физ. астрон., 1962, № 4, 3—13.
3. A. R. Lucas, B. Meltzer. A general theorem for pense electron beams. J. Electronics and Control., 1958, **4**, 160; Sufficient and necessary trajectory conditions for pense electron beams. J. Electronics and Control, 1958, **4**, 454—456.
   W. W. Mueller. Necessary and sufficient trajectory conditions for pense electron beams. J. Electronics and Control. 1959, **6**, 499—507.
4. В. Т. Овчаров. Теория формирования электронных пучков. Радиотехн. и электроника, 1957, № 2, 696—704.
5. Н. М. Гюнтер. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М., Гостехтеоретиздат, 1934.