Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 376, 2010 г.

В. В. Капустин

О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ НА СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ

1. Введение

Одним из основным объектов теории рассеяния является волновой оператор. В случае систем с дискретным временем конструкция состоит из пары унитарных операторов U_1, U_2, действующих в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно, и оператора $X : H_1 \to H_2$. Волновой оператор, отвечающий асимптотическому поведению системы в прошлом, определяется как предел последовательности

$$U_2^n X U_1^{-n} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в каком-либо универсальном смысле. Определим коммутатор K,

$$K = XU_1 - U_2X.$$

Случай $K = 0$ тривиален, поскольку тогда все элементы последовательности очевидно равны X; естественно спрашивать, что происходит, когда оператор K мал (ранга 1, ранга 2, конечного ранга, из класса операторов со следом, и т.д.)

Если спектральные меры унитарных операторов абсолютно непрерывны (относительно меры Лебега), то в классической теории рассеяния устанавливается существование сильных волновых операторов, когда коммутатор K принадлежит классу операторов со следом [1]. В связи с вопросом о волновых оперторах на сингулярном спектре имеется некоторый “фольклор” из разрозненных фактов, не дающий единой исчерпывающей картины. В настоящей заметке собраны результаты, связанные с постороением волновых операторов на сингулярном спектре с помощью регулярных методов суммирования. Некоторые приведённые здесь факты могут быть известными специалистам. По-видимому, к новым результатам относятся линейное

Ключевые слова: волновой оператор, методы суммирования, сингулярная спектральная мера.

При частичной поддержке РФФИ, грант 08-01-00723 .

ограничение на коммутаторы (теорема 6.1), существование волнового оператора в случае rank $K = 1$ как предела усреднений для широкого класса методов суммирования (теорема 7.1) и редукция общего случая rank $K = 2$ к операторам K специального вида (9) (теорема 7.2). Случай rank $K = 2$ связан с другими известными открытыми проблемами из смежных областей анализа и ему будет посвящено отдельное исследование; некоторые результаты можно найти в [2].

Простые примеры, даже в одномерных пространствах, показывают, что в общем случае без применения усреднения предел может не существовать. Действительно, возьмём одномерное пространство $H_1 = H_2 = \mathbb{C}$, положим $X = I$, $U_1 = I$, $U_2 = \omega I$, где $|\omega| = 1$. Тогда ясно, что $U_2^n X U_1^{-n} = \omega^n I$. Если $\omega \neq 1$, то последовательность расходится. Однако можно надеяться, что предел будет существовать в каком-либо более слабом смысле, а именно, если применить некоторый метод суммирования. Например, рассмотрим метод суммирования, сопоставляющий последовательности $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ последовательность $(\widetilde{x}_n)$ её средних Чезаро, $\widetilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{m=0}^{n} x_m$. Для геометрических прогрессий $x_n = \omega^n$ ($|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) имеем $\widetilde{x}_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega} \to 0$.

Если дана последовательность (x_n), то её абелевы средние имеют вид

$$(1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n x_n,$$

где $0 < r < 1$ и предел рассматривается при $r \nearrow 1$. Положим

$$A_r = (1-r) \sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n X U_1^{-n},$$

т.е. A_r – абелевы средние последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$. Метод суммирования по Абелю здесь рассматривается из-за его связи с интегралами типа Коши. Общая гипотеза может быть сформулирована следующим образом.

Предположение 1.1. *Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы, и предположим, что X – такой оператор, что $K = XU_1 - U_2 X$ – оператор конечного ранга. Тогда предел абелевых средних последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ существует в слабой операторной топологии, т.е. операторы A_r слабо сходятся при $r \nearrow 1$.*

Рассмотрим суммы B_n,

$$B_n = \sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}, \quad n \geqslant 1. \tag{1}$$

Они связаны с операторами вида $U_2^n X U_1^{-n}$ соотношением

$$B_n = X - U_2^n X U_1^{-n}.$$

Следовательно, сходимость последовательности $U_2^n XU_1^{-n}$ равносильна сходимости сумм B_n.

Можно также рассматривать последовательность $U_2^n XU_1^{-n}$ при отрицательных n с направлением $n \to -\infty$. Если некоторые усреднённые пределы (двусторонней) последовательности $U_2^n XU_1^{-n}$ существуют при $n \to \pm\infty$, то это же должно быть верно и для разности пределов, которая тогда представляет собой предел последовательности $U_2^n XU_1^{-n} - U_2^{-n} XU_1^n$ при $n \to +\infty$. В терминах коммутатора K эти операторы могут быть записаны как

$$\begin{aligned} U_2^n XU_1^{-n} - U_2^{-n} XU_1^n &= \sum_{m=-n}^{n-1} (U_2^{m+1} XU_1^{-(m+1)} - U_2^m XU_1^{-m}) \\ &= \sum_{m=-n}^{n-1} U_2^m K U_1^{-(m+1)}. \end{aligned}$$

Теперь пусть μ – мера Лебега на единичной окружности, возьмём оператор X в $L^2(\mu)$ такой, что $K = XU - UX = \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k$, где U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$, сумма конечна (или бесконечна и $\sum \|u_\| \cdot \|v_k\| < \infty$). Классические результаты теории рассеяния говорят о том, что сильные пределы последовательности $U^n XU^{-n}$ существуют при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$. Можно проверить, что их разность есть оператор умножения на функцию $\overline{z} \sum u_k v_k$ (изначально лежащую в $L^1(\mu)$, но таким образом на самом деле принадлежащую пространству $L^\infty(\mu)$).

Теорема 6.1 ниже, согласно которой для сингулярного спектра сумма $\sum u_k v_k$ равна 0, естественно приводит к мысли, что если некоторый усреднённый предел последовательности $U_2^n XU_1^{-n}$ существует при $n \to +\infty$ и $n \to -\infty$, то эти пределы совпадают. Объединяя предположение 1.1 с формулой (3), можно сформулировать новое предположение уже в терминах оператора K.

Предположение 1.2. *Пусть U – унитарный оператор с сингулярным спектром, K – оператор конечного ранга (или из класса операторов со следом и т.п.), представимый в виде $K = XU - UX$. Тогда абелевы средние последовательности $\sum\limits_{m=-n}^{n} U_2^m K U_1^{-m}$ стремятся к нулевому оператору в слабой операторной топологии при $n \to +\infty$.*

Автор признателен всем коллегам, проявившим интерес к этой работе.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим простой, однако важный пример, накладывающий некоторые ограничения на то, что можно получить.

Пример. Возьмём оператор ранга 1, $X = (\cdot, a)b$. Тогда $U_2^n X U_1^{-n} = (\cdot, U_1^n a) U_2^n b$. Пусть U_1, U_2 операторы умножения на z в $L^2(\mu)$, $L^2(\nu)$, соответственно, где μ, ν – меры на единичной окружности, $a \equiv 1$, $b \equiv 1$. Тогда получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = \widehat{\mu}_n z^n$, где $\widehat{\mu}_n = \int \overline{z}^n d\mu(z)$.

Если мера μ такова, что $\widehat{\mu}_n \to 0$ при $n \to \infty$, получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 \to 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда μ – дискретная мера. Например, пусть μ – атом в точке ω единичной окружности, тогда пространство $L^2(\mu)$ одномерно. Получаем $U_2^n X U_1^{-n} 1 = (\overline{\omega} z)^n$, это выражение расходится, если только ν не есть точечная масса в ω; однако, как вытекает из предложения 3.1 ниже, сходимость может быть получена применением любого s-регулярного метода суммирования (в частности, метода Чезаро, т.е. обычных арифметических средних).

Для произвольной меры μ без атомов воспользуемся классической теоремой Винера, согласно которой для любой меры, не имеющей точечных масс, имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n \le m \le n} |\widehat{\mu}(m)| = 0.$$

Отсюда следует, что средние Чезаро последовательности $U_2^n X U_1^{-n} 1$ стремятся к нулю.

Сходимость установлена на одном векторе $1 \in L^2(\mu)$; для остальных векторов из $L^2(\mu)$ достаточно заметить, что множество векторов, для которых имеется сходимость, есть замкнутое подпространство, приводящее оператор U_1.

Заметим, что если последовательность $U_2^n X U_1^{-n}$ сходится в некотором естественном смысле (в сильной или слабой топологии, а также с применением многих методов суммирования), то предельный оператор A сплетает U_1 и U_2:

$$AU_1 = U_2 A.$$

Чтобы это увидеть, достаточно перейти к пределу в соотношении

$$(U_2^{n+1} X U_1^{-(n+1)}) U_1 = U_2 (U_2^n X U_1^{-n}).$$

Для предельного оператора B последовательности (B_n) имеем $BU_1 - U_2 B = K$.

Без потери общности можно считать, что кратность спектра унитарного оператора U_1 равна 1. Действительно, при изучении последовательности операторов $U_2^n X U_1^{-n}$, применённых к вектору $h \in H_1$, вместо всего пространства H_1 можно рассматривать лишь подпространство, приводящее U_1, порождённое вектором h. Спектральная теорема для унитарных операторов может быть сформулирована следующим образом.

Пусть U – унитарный оператор в гильбертовом пространстве H, возьмём $h \in H$. Тогда существуют мера μ на единичной окружности и изометрическое отождествление приводящего подпространства, порождённого вектором h, с пространством $L^2(\mu)$ такое, что оператор умножения на z в $L^2(\mu)$ соответствует оператору U, а функция $1 \in L^2(\mu)$ – вектору h.

Таким образом, можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, где μ – мера на единичной окружности и U_1 – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$. Без потери общности можно считать меру μ вероятностной. При рассмотрении сходимости в слабой операторной топологии можно предполагать, что и кратность спектра оператора U_2 также равна 1. Следовательно, в качестве оператора U_2 можно взять оператор умножения на независимую переменную в $H_2 = L^2(\nu)$ для некоторой (вероятностной) меры ν на единичной окружности.

Применим оператор B_n при $K = (\cdot, \overline{u})v$ к вектору $h \in L^2(\mu)$ и найдём значение получающейся функции в точке z, $|z| = 1$:

$$\begin{aligned}(B_nh)(z) &= \left[\left(\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}\right) h\right](z) \\ &= \sum_{m=1}^{n} z^{m-1} \left(\int \overline{\xi}^m h(\xi)u(\xi)d\mu(\xi)\right) v(z) \\ &= v(z) \cdot \int \frac{1-(\overline{\xi}z)^n}{1-\overline{\xi}z} \overline{\xi} h(\xi)u(\xi)d\mu(\xi).\end{aligned}$$

Для $K = \sum_k (\cdot, \overline{u}_k)v_k$ получаем

$$(B_nh)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{1-(\overline{\xi}z)^n}{1-\overline{\xi}z} \overline{\xi} h(\xi)u_k(\xi)d\mu(\xi). \tag{4}$$

3. Регулярные линейные методы суммирования

Здесь даётся необходимая информация о методах усреднения для ограниченных последовательностей, занумерованных неотрицательными целыми числами. Возьмём упорядоченное множество (α), которое будет либо множеством неотрицательных целых чисел с направлением $n \to +\infty$, либо интервалом $[0,1)$ с направлением $r \nearrow 1$. Пусть $p_{\alpha,n}$ – веса, определяющие регулярный метод суммирования. Точнее, предположим, что

1) $p_{\alpha,n} \geqslant 0$; $\forall\ \alpha$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} = 1$;

2) $\forall\ n \geqslant 0$ $p_{\alpha,n} \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$.

Усреднения последовательности (x_n) имеют вид

$$\widetilde{x}_\alpha = \sum_n p_{\alpha,n} x_n.$$

Если (x_n) сходятся, то $\widetilde{x}_\alpha$ также сходятся, однако обратное в общем случае неверно; это позволяет рассматривать усреднённые пределы последовательностей, которые не сходятся в обычном смысле. Свойство 1) означает, что каждый элемент $\widetilde{x}_\alpha$ является усреднением последовательности (x_n); по свойству 2) предел (когда он существует) не зависит от любого конечного числа элементов последовательности.

Регулярный метод суммирования будет называться s-регулярным, если, кроме того,

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1}|$ – ограниченная функция от α, стремящаяся к 0;

Простое достаточное условие для свойства 3) состоит в том, что

3′) $\forall\ \alpha,\ n\ p_{\alpha,n} \geqslant p_{\alpha,n+1}$.

Свойство s-регулярности метода суммирования означает, что средние последовательности (x_n) сходятся одновременно (и к тому же самому пределу) с любой подпоследовательностью вида (x_{n+m}), $m > 0$.

Все s-регулярные методы суммирования обладают одним важным свойством.

Предложение 3.1. *Если $(p_{\alpha,n})$ – s-регулярный метод суммирования, то для любой непостоянной унимодулярной геометрической прогрессии (x_n) ($x_n = \omega^n$, где $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$) средние $\widetilde{x}_\alpha$ стремятся к нулю.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}
(1-\omega)\widetilde{x}_\alpha &= (1-\omega)\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^n - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^{n+1} \\
&= \left(p_{\alpha,0} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n+1}\omega^{n+1}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}\omega^{n+1} \\
&= p_{\alpha,0} - \sum_{n=0}^{\infty}(p_{\alpha,n} - p_{\alpha,n+1})\omega^{n+1} \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0. \qquad \Box
\end{aligned}$$

Простым примером s-регулярного метода суммирования является метод Чезаро $(C,1)$, где $\widetilde{x}_n$ – арифметические средние, $\widetilde{x}_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. Существуют s-регулярные методы суммирования более мягкие, чем $(C,1)$, например, методы Чезаро (C,α) при $\alpha < 1$, или некоторые из методов Вороного (или Нёрлюнда), см. [3].

Теперь зафиксируем метод суммирования $(p_{\alpha,n})$ и применим процедуру усреднения к ограниченной последовательности операторов

$U_2^n X U_1^{-n}$. Определим

$$A_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} U_2^n X U_1^{-n}, \quad B_\alpha = X - A_\alpha.$$

Имеем

$$B_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(X - U_2^n X U_1^{-n}) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} \left(\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m} \right).$$

В силу (4), для $K = \sum_k (\cdot, \overline{u}_k) v_k$, $K : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$, имеем

$$(B_\alpha h)(z) = \sum_k v_k(z) \cdot \left(\int \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n} (\overline{\xi} z)^n}{1 - \overline{\xi} z} \overline{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi) \right). \qquad (5)$$

Метод усреднения по Абелю сопоставляет последовательности (x_n) семейство $(1-r)\sum_{k=0}^{\infty} r^n x_n$, $0 \leqslant r < 1$, с направлением $r \nearrow 1$. Подставляя $p_{r,n} = (1-r) r^n$ в формулу (5), получаем

$$\begin{aligned}(B_r h)(z) &= \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n U_2^n K U_1^{-(n+1)} \right) h \right](z) \\ &= r \sum_k v_k(z) \cdot \int \frac{\overline{\xi} h(\xi) u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r\overline{\xi} z}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Если удастся доказать, что это выражение имеет пределы при $r \nearrow 1$ в ν-почти всех точках z, сразу же получится слабая сходимость векторов $B_r h$. Следует отметить, однако, что сам по себе факт поточечной сходимости намного глубже, чем слабая сходимость.

Для случая, когда K – оператор ранга 1, существование угловых пределов интегралов типа Коши (6) почти всюду было доказано в статье [4]. Из этого немедленно вытекает, что предположение 1.1 верно, если K – оператор ранга 1. Однако даже более сильное утверждение может быть доказано гораздо проще, см. теорему 7.1 ниже.

4. Сходимость интегральных операторов

Пусть μ – мера на единичной окружности, K – интегральный оператор в $L^2(\mu)$,

$$(Kh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu). \tag{7}$$

Если $K = \sum_n (\cdot, \overline{u}_n)v_n$, то K записывается как интегральный оператор (7) с ядром k,

$$k(z,\xi) = \sum u_n(\xi)v_n(z).$$

Как обычно, U – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(\mu)$.

Предложение 4.1. *Пусть K – интегральный оператор (7) в $L^2(\mu)$. Если K представим в виде $K = XU - UX$, и для μ-почти всех z выполнено $\int \left|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}\right| d\mu(\xi) < \infty$, то для любого s-регулярного метода суммирования операторы B_α сходятся в слабой операторной топологии к интегральному оператору B с ядром $\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}$:*

$$(Bh)(z) = \int \frac{k(z,\xi)}{\xi - z} h(\xi)d\mu(\xi), \quad h \in L^2(\mu),$$

а усреднённые пределы последовательности $U^n X U^{-n}$ существуют при $n \to \pm\infty$ и равны $X - B$.

Оператор B корректно определён на плотном множестве ограниченных функций h из $L^2(\mu)$ и может быть распространён на всё пространство $L^2(\mu)$ по непрерывности.

Доказательство. Зафиксируем точку z такую, что

$$M(z) = \int \left|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}\right| d\mu(\xi) < \infty.$$

По аналогии с (5), для s-регулярного метода суммирования $(p_{\alpha,n})$ получаем

$$(B_\alpha h)(z) = \int k(z,\xi) \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\overline{\xi} z)^n}{1 - \overline{\xi} z} \overline{\xi} h(\xi)d\mu(\xi).$$

Применим операторы B_α, B к вектору $h = 1$:

$$(B_\alpha 1)(z) = \int k(z,\xi) \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\overline{\xi} z)^n}{\xi - z} d\mu(\xi),$$
$$(B1)(z) = \int \frac{k(z,\xi)}{\xi - z} d\mu(\xi),$$

откуда

$$(B_\alpha 1)(z) - (B1)(z) = -\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\overline{\xi} z)^n \right) \frac{k(z,\xi)}{\xi - z} d\mu(\xi).$$

Поскольку $\left| \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\overline{\xi} z)^n \right| \leqslant 1$ для любого α, абсолютная величина подинтегрального выражения не превосходит $|\frac{k(z,\xi)}{\xi - z}|$. Из s-регулярности вытекает, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{\alpha,n}(\overline{\xi} z)^n \underset{\alpha}{\longrightarrow} 0$, следовательно $(B_\alpha 1)(z) - (B1)(z) \to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости.

Доказано, что $B_\alpha 1 \to B1$ поточечно μ-почти всюду. Из предположения о том, что $K = XU - UX$, следует, что нормы операторов B_α ограничены и потому $B_\alpha 1 \to B1$ слабо. Следовательно, $B_\alpha h \to Bh$ слабо для любого вектора h из приводящего подпространства, порождённого функцией 1, т.е. для всех $h \in L^2(\mu)$.

Для волнового оператора, соответствующего пределу при $n \to -\infty$, рассуждение вполне аналогично. □

Заметим, что если $\iint \left| \frac{k(z,\xi)}{\xi - z} \right|^2 d\mu(\xi) d\mu(z) < \infty$, то все операторы B_α и оператор B принадлежат классу Гильберта–Шмидта и, кроме того, $B_\alpha \to B$ по норме класса Гильберта–Шмидта.

5. Взаимно сингулярные меры

Теорема 5.1. *Допустим, что спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 взаимно сингулярны, $K = XU_1 - U_2 X$ – оператор конечного ранга. Тогда для любого s-регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ стремятся к нулю в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Возьмём векторы $x \in H_1$, $y \in H_2$, и пусть $\|x\| = \|y\| = 1$; требуется доказать, что $(\sum_n p_{\alpha,n} U_2^n X U_1^{-n} x, y) \to 0$.

Без потери общности можно предполагать, что $H_1 = L^2(\mu)$, $x = 1$; $H_2 = L^2(\nu)$, $y = 1$, где μ, ν – вероятностные меры на единичной окружности.

Рассмотрим заряд $\mu - \nu$ как элемент пространства, сопряжённого к пространству всех непрерывных функций на окружности. Норма заряда $\mu - \nu$ равна 2, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует вещественнозначная непрерывная функция s с нормой 1 такая, что $\int s\, d(\mu - \nu) > 2 - \varepsilon$. Поскольку $\int s d\nu \geqslant -1$, получаем $\int s\, d\mu > 1 - \varepsilon$. Возьмём открытые множества $e_1 = \{s > \frac{1}{2}\}$ и $e_2 = \{s < -\frac{1}{2}\}$. На множестве e_1^c, дополнительном к e_1, имеем $s \leqslant \frac{1}{2}$, следовательно, $\int\limits_{e_1^c} s\, d\mu \leqslant \frac{\mu e_1^c}{2} = \frac{1-\mu e_1}{2}$. Аналогично, $\int\limits_{e_2^c} s\, d\nu \geqslant -\frac{1-\nu e_2}{2}$. Имеем

$$2 - \varepsilon < \int s\, d(\mu - \nu) = \int\limits_{e_1} s\, d\mu + \int\limits_{e_1^c} s\, d\mu - \int\limits_{e_2} s\, d\nu - \int\limits_{e_2^c} s\, d\nu$$
$$\leqslant \mu e_1 + \frac{1 - \mu e_1}{2} + \nu e_2 + \frac{1 - \nu e_2}{2} = \frac{\mu e_1}{2} + \frac{\nu e_2}{2} + 1,$$

откуда $\mu e_1 + \nu e_2 > 2 - 2\varepsilon$. Следовательно, $\mu e_1 > 1 - 2\varepsilon$, $\nu e_2 > 1 - 2\varepsilon$. Множества e_1, e_2 открыты, и потому каждое из них является объединением открытых дуг. Среди них можно выбрать подмножества e_1', e_2', образованные конечными наборами дуг, которые будут содержать почти полные массы ($\geqslant 1 - 3\varepsilon$, т.е. с точностью до любого малого числа) мер μ и ν соответственно. Это значит, что векторы $x_\varepsilon = \chi_{e_1'} x, y_\varepsilon = \chi_{e_2'} y$ стремятся к x, y соответственно при $\varepsilon \to 0$, где $\chi_{e_i'}$ обозначает характеристические функции множеств e_i', $i = 1, 2$.

По построению, для заданного числа ε расстояние между носителями мер $\mu_\varepsilon = \chi_{e_1'} \mu$ и $\nu_\varepsilon = \chi_{e_2'} \nu$ положительно. Следовательно, для μ_ε-почти всех ξ и для ν_ε-почти всех z выражение $1 - \overline{\xi} z$ отделено от нуля. Для любого s-регулярного метода суммирования из предложения 3.1 вытекает поточечная сходимость по α ν_ε-почти всюду в формуле (5), применённой к $h = x_\varepsilon$. Таким образом, получаем сходимость $(B_\alpha x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ по α.

Чтобы получить сходимость $(B_\alpha x, y)$ по α, остаётся перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. $\square$

Нам понадобится следующий очевидный факт.

Предложение 5.2. *Допустим, что пространства H_1, H_2 представляются в виде прямых сумм подпространств, приводящих унитарные операторы U_1, U_2 соответственно, и оператор X таким образом* *может быть записан в матричной форме, соответствующей разложениям пространств* H_1, H_2. *Тогда предположение* 1.1 *верно для* X *тогда и только тогда, когда оно верно для каждой матричной клетки* X.

Предложение позволяет рассматривать части мер μ, ν, соответствующие разбиениям единичной окружности. Это сводит общую задачу к двум частным случаям: 1) меры μ и ν взаимно сингулярны и 2) $\mu = \nu$.

Первый случай рассматривался в теореме 5.1. Случай абсолютно непрерывной меры покрывается классической теорией рассеяния; случай точечного спектра следует из примера в §2. Таким образом, можно ограничиться случаем, когда спектральные меры подчинены скалярной сингулярной мере без точечных масс. Можно предполагать, что оператор K действует в $L^2(\mu)$, где μ – сингулярная мера без атомов, K – конечная сумма $K = \sum(\cdot, \overline{u}_n)v_n$.

6. Пространства K_θ

С вероятностной сингулярной мерой μ на единичной окружности свяжем внутреннюю функцию θ по формуле

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{1+\overline{\xi}z}{1-\overline{\xi}z} d\mu(\xi).$$

Это соотношение задаёт взаимно-однозначное соответствие между вероятностными мерами μ на единичной окружности и внутренними функциями θ в единичном круге с единственным условием $\theta(0) = 0$.

Имеем $\theta = 1$ μ-почти всюду в смысле угловых граничных значений. Опеределим $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$. Хорошо известно (см. [5, 6]), что имеется естественное изометрическое отождествление V пространств K_θ и $L^2(\mu)$, отображающее функцию из K_θ в её граничную функцию в $L^2(\mu)$. Для оператора, обратного к V, имеется формула

$$(V^{-1}s)(z) = (1-\theta(z)) \int \frac{s(\xi)d\mu(\xi)}{1-\overline{\xi}z}, \quad s \in L^2(\mu).$$

Техника пространств K_θ позволяет установить важное необходимое условие для того, чтобы оператор K мог быть записан в виде $K = XU - UX$. Предположим, что K – ядерный оператор (т.е. принадлежит классу операторов со следом) в $L^2(\mu)$. Тогда K записывается в виде $K = \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k$, причём u_k, v_k удовлетворяют соотношению

$$\sum \|u_k\| \cdot \|v_k\| < \infty.$$

Линейное отображение

$$\Lambda : \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k \mapsto \sum u_k v_k$$

корректно определено на классе ядерных операторов в $L^2(\mu)$ (корректность определения следует, например, из того, что коэффициенты $\int(\sum u_k v_k)z^n d\mu$ равны следам операторов $U^n K$, где U — оператор умножения на z в $L^2(\mu)$). Отображение Λ является непрерывным (сжимающим) из класса ядерных операторов в пространство $L^1(\mu)$.

Теорема 6.1. *Пусть μ – сингулярная мера на единичной окружности, U – оператор умножения на z в $L^2(\mu)$. Предположим, что K – ядерный оператор в $L^2(\mu)$, $K = \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k$, причём K представим в виде $K = XU - UX$. Тогда μ-почти всюду имеем $\sum u_k v_k = 0$.*

Доказательство этого утверждения опирается на ограниченность норм абелевых средних операторов $\sum_{m=1}^{n} U_2^{m-1} K U_1^{-m}$, которые равномерно ограничены, если $K = XU - UX$.

Доказательство. Без потери общности будем считать, что μ – вероятностная мера. Построим θ и функции $f_k \in K_\theta$, $f_k = V^{-1}u_k$. Применим (6) к вектору h, $h(\xi) = \xi$; получим

$$(B_r h)(z) = r \cdot \sum v_k(z) \cdot \int \frac{u_k(\xi) d\mu(\xi)}{1 - r\overline{\xi} z} = \frac{r \cdot \sum v_k(z) f_k(rz)}{1 - \theta(rz)}.$$

В [6] показано, что функции $f_{k,r}$ со значениями $f_k(rz)$, рассматриваемые как элементы пространства $L^2(\mu)$, стремятся к u_k в $L^2(\mu)$, причём $\|f_{k,r} - u_k\| \le \|u_k\|$. Следовательно,

$$\sum v_k f_{k,r} \to \sum u_k v_k \quad \text{в} \quad L^1(\mu).$$

С другой стороны, для функций $B_r h$, где $h(\xi) = \xi$, по построению имеем $\|B_r h\| \leqslant 2\,\|X\|$; поскольку $\theta(rz) \to 1$ для μ-почти всех z, получаем, что $1 - \theta_r \to 0$ в $L^2(\mu)$, и, следовательно, $(1 - \theta_r)(B_r h) \to 0$ в $L^1(\mu)$. Отсюда заключаем, что

$$\sum u_k v_k = \lim \sum v_k f_{k,r} = \lim (1 - \theta_r)(B_r h) = 0,$$

как и требовалось. □

Замечание. Без предположения, что мера μ сингулярна, результат неверен. Возьмём ортопроектор P_+ на H^2 в качестве примера оператора X на протрансве L^2 (относительно меры Лебега на единичной окружности), где $U_1 = U_2$ – оператор умножения на z. Тогда ясно, что $K = (\cdot, \overline{u})v$, где $u = z$, $v = 1$ – оператор ранга 1, и таким образом $uv = z$. Похожие примеры могут быть построены для любых унитарных операторов U_1, U_2 с абсолютно непрерывными спектральными мерами.

Отметим, что обращение теоремы 6.1 имеет место для операторов из плотного множества относительно нормы класса ядерных операторов.

Предложение 6.2. *Среди операторов $K = \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k$ из класса ядерных операторов в $L^2(\mu)$ со свойством $\sum u_k v_k = 0$, операторы, которые представляются как коммутаторы $K = XU - UX$, образуют плотное множество в норме класса ядерных операторов.*

Для доказательства достаточно взять множество всех операторов конечного ранга вида $K = \sum(\cdot, \overline{u}_k)v_k$, где сумма конечна, а функции u_k, v_k бесконечно гладкие и удовлетворяют условию $\sum u_k v_k = 0$.

7. Случай ранга не выше 2

Теорема 7.1. *Пусть U_1, U_2 – унитарные операторы с сингулярным спектром, и предположим, что X – такой оператор, что $K = XU_1 - U_2X$ является оператором ранга 1. Тогда для любого s-регулярного метода суммирования усреднения последовательности $U_2^n X U_1^{-n}$ имеют предел в слабой операторной топологии.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что оператор $U_1 = U_2$ действует в $L^2(\mu)$ как умножение на z, где μ – сингулярная мера на единичной окружности. Оператор K может быть записан в виде $K = (\cdot, \overline{u})v$. По теореме 6.1 имеем $uv = 0$ μ-почти всюду. Отсюда сразу получается известный факт, что сужения меры μ на множества, где $u \neq 0$ и $v \neq 0$, взаимно сингулярны. Остаётся применить теорему 5.1. $\square$

Теперь предположим, что $\operatorname{rank} K = 2$. Как обычно, можно работать в пространстве $L^2(\mu)$. Запишем

$$K = (\cdot, \overline{u}_1)v_1 + (\cdot, \overline{u}_2)v_2.$$

По теореме 6.1 получаем $u_1v_1 + u_2v_2 = 0$. Предложение 5.2 позволяет рассматривать счётные разбиения меры μ. Для множеств, где хотя бы одна из функций u_1, u_2, v_1, v_2 равна нулю, вопрос сводится к случаю меньшего ранга. Таким образом, задача сведена к случаю, когда все функции ненулевые, причём можно считать, что все функции u_1, u_2, v_1, v_2 ограничены и отделены от нуля. Вместо оператора X можно рассмотреть оператор $M_{v_1^{-1}}XM_{u_2^{-1}}$, где M_α обозначает оператор умножения на функцию α. Очевидно, существование волнового оператора для X равносильно его существованию для $M_{v_1^{-1}}XM_{u_2^{-1}}$. Исходный оператор K преобразуется в оператор $(\cdot,\overline{u}_1/\overline{u}_2)1 + (\cdot,1)v_2/v_1$. Положим

$$\varphi = \frac{u_1}{u_2} = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Доказан следующий результат.

Теорема 7.2. *Предположение* 1.1 *верно для общего случая, когда K – оператор ранга* 2, *тогда и только тогда, когда оно верно для частного случая, где K – оператор в $L^2(\mu)$, μ – сингулярная вероятностная мера на единичной окружности,*

$$K = (\cdot,\overline{\varphi})1 - (\cdot,1)\varphi, \tag{9}$$

$\varphi \in L^2(\mu)$.

Утверждение верно и для других видов сходимости, не только для абелевых средних, как в предположении 1.1.

Более того, достаточно рассматривать случаи вещественнозначных или унимодулярных функций φ. В первом случае, поскольку коммутатор K имеет вид $XU - UX$ тогда и только тогда, когда K^* также представляется в таком виде, общий случай комплекснозначной функции φ сводится к случаю, когда функция φ вещественнозначная. Далее, это рассуждение позволяет рассматривать только самосопряжённые операторы K. Тогда K может быть записан в виде $K = (\cdot,a)a \pm (\cdot,b)b$. По теореме 6.1 получаем, что $|a|^2 \pm |b|^2 = 0$, откуда знак может быть только минусом и K не может быть положительным или отрицательным оператором. Также μ-почти всюду имеем $|a| = |b|$. Преобразуем пространство $L^2(\mu)$ в весовое пространство $L^2(|a|^2\mu)$ унитарным оператором умножения на функцию $1/a$; тогда K перейдёт в оператор $(\cdot,1)1 - (\cdot,\varphi)\varphi$ при унимодулярной функции

$\varphi = b/a$. Если вместо оператора K рассмотреть его суперпозицию с оператором умножения на φ, получится формула (9).

С помощью предложения 4.1 можно получить достаточные условия для существования волновых операторов в терминах модулей непрерывности меры μ и функции φ. Однако, как показано в [2], класс операторов K вида (9), являющихся коммутаторами $K = XU - UX$, гораздо шире и не связан с гладкостью функции φ.

Литература

1. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния.* Изд-во СПБГУ, С.-Петербург, 1994.
2. V. V. Kapustin, PDMI Preprint 06/2010.
3. Г. Харди, *Расходящиеся ряды.* Изд-во иностранной литературы, Москва, 1951.
4. В. В. Капустин, *Граничные значения интегралов типа Коши.* — Алгебра и анализ **16** (2004), No. 4, 114–131.
5. D. N. Clark, *One-dimensional perturbations of restricted shifts.* — J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.
6. А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций.* — Алгебра и анализ **5** (1993), No. 2, 189–210.

Kapustin V. V. On wave operators on the singular spectrum.

The problem of the existence of a wave operator is considered in the general case where spectral measures of the unitary operators are not assumed to be absolutely continuous. The case of commutators of rank at most 2 is studied in more detail.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 2010 г.