K. Zh. Kudaibergenov, Questions of Keisler and Morley,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1986, Volume 291, Number 2, 292–293

ЛИТЕРАТУРА

1. *Говоров В.М.* – ДАН, 1978, т. 239, № 3, с. 515–518. 2. *Говоров В.М.* – ДАН, 1982, т. 262, № 5, с. 1044–1047. 3. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1984, т. 274, № 6, с. 1294–1298. 4. *Диденко В.П.* – Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 1, с. 24–28. 5. *Диденко В.П.* – Укр. матем. журн., 1973, т. 25, № 1, с. 14–24. 6. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1982, т. 265, № 3, с. 524–525. 7. *Елеев В.А.* – Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 1, с. 56–63. 8. *Елеев В.А.* – Там же, 1978, т. 14, № 1, с. 22–29. 9. *Елеев В.А.* – Там же, 1979, т. 15, № 1, с. 41–53. 10. *Елеев В.А.* – Там же, 1981, т. 17, № 1, с. 58–72. 11. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 12. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 13. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М: Наука, 1972.

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

О ВОПРОСАХ КЕЙСЛЕРА И МОРЛИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 17 V 1985)

В этой заметке изучается вопрос о числе однородных моделей полной теории. Введем некоторые определения и обозначения. Модели будем обозначать большими готическими буквами, а их основные множества (универсумы) – соответствующими латинскими: например, $\mathfrak{M}$ и M. Символами α, β, γ, δ будем обозначать ординалы, κ, λ – кардиналы, ω_α – α-й бесконечный кардинал, $\omega = \omega_0$. Пусть $\lambda^{(\lambda)} = \sum\limits_{\kappa<\lambda} \lambda^\kappa$. Мощность множества A будем обозначать $|A|$. Через $D(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех типов (над ϕ), которые реализуются в модели $\mathfrak{M}$. В дальнейшем ОКГ будет означать, что предполагается обобщенная континуум-гипотеза.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ называется λ-однородной, если для любого $X \subseteq M$ мощности меньшей λ и любого $a \in M$ любое элементарное отображение $f: X \to M$ продолжается до элементарного отображения g: $X \cup \{a\} \to M$.

Определение 2 [1]. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель мощности κ.

1) κ – регулярный кардинал. Тогда $\mathfrak{M}$ называется однородной, если $\mathfrak{M}$ κ-однородна.

2) κ – сингулярный кардинал. Тогда $\mathfrak{M}$ называется однородной, если $\mathfrak{M}$ есть объединение элементарной цепи, $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha$, где $\mathfrak{M}_\alpha$ – однородная модель регулярной мощности и $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D(\mathfrak{M})$, $\alpha < \beta$.

Обозначим через $h_T(\lambda)$ число однородных моделей теории T мощности λ.

В работе Кейслера и Морли [1] были поставлены следующие вопросы:

(ОКГ) Существуют ли полные теории T, у которых h_T удовлетворяют условиям:

1) $\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1)$;

2) $h_T(\omega) = \omega$, $1 < h_T(\omega_1) < \omega$;

3) $h_T(\omega) = \omega_1$, $h_T(\omega_1) \leqslant \omega$;

4) $h_T(\omega) \geqslant \omega$, $h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)$?

Эти вопросы были отмечены также в обзоре Е.А. Палютина [2, с. 372, проблема 8.17].

Т е о р е м а 1 (ОКГ). *Для любого* $n = 1, 2, 3, 4$ *существует полная теория* T, *у которой* h_T *удовлетворяет условию* n). *В частности, существуют полные теории* $T_0(n)$, $T_1(n)$, T_2, $T_3(m)$, T_4 *такие, что*

$$h_{T_0(n)}(\omega) = 6 + n, \quad h_{T_0(n)}(\omega_1) = 2,$$
$$h_{T_1(n)}(\omega) = 2^n, \quad h_{T_1(n)}(\omega_1) = 1,$$
$$h_{T_2}(\omega) = \omega, \quad h_{T_2}(\omega_1) = 3,$$
$$h_{T_3(m)}(\omega) = \omega_1, \quad h_{T_3(m)}(\omega_1) = m,$$
$$h_{T_4}(\omega) = \omega_1, \quad h_{T_4}(\omega_1) = \omega_1, \quad h_{T_4}(\omega_2) = 4$$

для любых n, m *таких, что* $1 \leqslant n < \omega$, $1 \leqslant m \leqslant \omega$.

Построены теории и с другими функциями h_T, которые мы здесь для краткости не приводим.

Т е о р е м а 2 (ОКГ). *Для любого* $0 < n < \omega$ *существует полная теория* $T(n)$ *такая, что* $h_{T(n)}(\lambda) = n$ *для любого* $\lambda \geqslant \omega$.

Теорема 2 дает ответ на вопрос, поставленный в книге Кейслера и Чэна [3, с. 263, 5.1.16]. Заметим, что в работе [4] анонсирован следующий результат: для любого $n = 2^s \cdot 3^t$ существует полная теория T такая, что $h_T(\omega) = n$.

Обозначим через $H_T(\lambda)$ число λ-однородных моделей теории T мощности λ. Очевидно, что для любой теории T выполняется $H_T(\lambda) \leqslant h_T(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant \omega$ и $H_T(\kappa) = h_T(\kappa)$ для любого регулярного κ. В работе [1] доказано, что для любой теории T при ОКГ $h_T(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \geqslant \omega$. Заметим, что существуют теории T такие, что $H_T(\lambda) = 0$ для любого сингулярного λ; в качестве примера можно взять теорию плотного линейного порядка.

Из теоремы 1.15 [5] следует:

1) если теория T стабильна, то $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant (2^{|T|})^+$ таких, что $cf(\lambda) \geqslant k(T)$;

2) если T суперстабильна, то $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant (2^{|T|})^+$;

3) если T ω-стабильна, то $h_T(\lambda) = H_T(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant \omega$.

Эти факты вытекают также из следующей теоремы, которая похожа на теорему 1.15 из [5].

Т е о р е м а 3. *Пусть* T – *стабильная теория*, D – *стабильная конечная диаграмма*, $\mathfrak{N} = \bigcup_{\alpha < \delta} \mathfrak{N}_\alpha$ – *объединение элементарной цепи* λ-*однородных моделей теории* T, *причем* $D(\mathfrak{N}_\alpha) = D$ *для всех* $\alpha < \delta$ *и* $cf(\delta) \geqslant k(T)$. *Тогда* $\mathfrak{N}$ λ-*однородна*.

Т е о р е м а 4. *Существует полная теория* T *такая, что*

$$H_T(\lambda) = \begin{cases} 3, & \text{если} \quad \lambda^{(\lambda)} = \lambda, \\ 2, & \text{если} \quad \lambda^\omega = \lambda < \lambda^{(\lambda)}, \\ 0, & \text{если} \quad \lambda^\omega > \lambda > \omega. \end{cases}$$

Для сравнения заметим, что при ОКГ для любой теории T выполняется $h_T(\lambda) \leqslant h_T(\kappa)$ для всех $\lambda > \kappa > \omega$ [1].

Институт математики и механики
Академии наук КазССР
Алма-Ата

Поступило
11 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Keisler H.J., Morley M.D.* – Israel J. Math., 1967, vol. 5, № 2, p. 73–78. 2. *Палютин Е.А.* В кн.: Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей. М.: Наука, 1982, с. 320–387. 3. *Кейслер Г., Чэн Ч.Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977. 614 с. 4. *Libo Lo* – J. Symbol. Log., 1983, vol. 48, № 3, p. 539–541. 5. *Shelah S.* – Log. et anal., 1975, vol. 18, № 71–72, p. 241–308.