Н. Н. Шаповалов, Об одной теореме существования,

Функц. анализ и его прил., 1976, том 10, выпуск 1, 62–66

https://www.mathnet.ru/faa2130

Функциональный анализ и его приложения
т. 10, вып. 1, 1976, 62—66.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Н. Н. Шаповалов

Статья посвящена доказательству теоремы 4 из работы [2]. Все конструкции и результаты дословно могут быть перенесены на случай произвольного поля k характеристики нуль при условии расщепимости исходной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Мы сохраняем здесь обозначения работ [1], [2]; эти обозначения в дальнейшем будут употребляться без дополнительных ссылок.

Отметим сначала, что существование элемента $\Theta_{w,\mu}$, удовлетворяющего условиям 1) — 3) теоремы 4 из [2], автоматически влечет за собой его единственность.

Лемма 1. *Предположим, что для некоторых* $\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbf{Z}} \cap \bar{C}_+$ *и* $w \in W$ *существует* $\Theta_{w,\mu}$. *Пусть* $x \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{w\mu-\mu}$ *таков, что* $x \cdot 1_Y \in Y_\mu^{w\mu-\mu}$, *причем* $x = (\prod E_{-\alpha_i}^{n_i}) \cdot b + \sum a_j \cdot b_j$, *где* $b, b_j \in U(\mathfrak{h})$, $a_j \in U(\mathfrak{n}_-)^{w\mu-\mu}$ *и* $\deg a_j < |\mu - w\mu|$. *Тогда* $x = \Theta_{w,\mu} \cdot b$.

Доказательство. Из свойств $\Theta_{w,\mu}$ ясно, что $\Theta_{w,\mu} \cdot 1_Y \in Y_\mu^{w\mu-\mu}$. По лемме 4 из [2], ранг $Y_\mu^{w\mu-\mu}$ над $U(\mathfrak{h})$ равен единице; поэтому $x \cdot 1_Y = \Theta_{w,\mu} \cdot b' \cdot 1_Y$, где $b' \in D(\mathfrak{h})$, или, что то же самое, $x = \Theta_{w,\mu} \cdot b'$.

Выберем в $U(\mathfrak{n}_-)^{w\mu-\mu}$ базис из одночленов; этот базис одновременно будет являться базисом правого $U(\mathfrak{h})$-модуля $U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{w\mu-\mu}$. Раскладывая x и $\Theta_{w,\mu}$ по этому базису и сравнивая коэффициенты при $\prod E_{-\alpha_i}^{n_i}$, мы получаем, согласно п. 3) теоремы 4 из [2], что $b = b'$, что и доказывает лемму.

Перейдем теперь к доказательству существования $\Theta_{w,\mu}$. В случае, когда $w\mu = \mu$, справедливость теоремы очевидна; при этом $\Theta_{w,\mu} = 1$. Предположим, что $w\mu \neq \mu$. Нетрудно видеть, что существует такая последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ простых корней, для которой $s_{\varepsilon_i} s_{\varepsilon_{i-1}} \ldots s_{\varepsilon_1} w\mu \gg s_{\varepsilon_{i-1}} \ldots s_{\varepsilon_1} w\mu$ и $\mu = s_{\varepsilon_k} \ldots s_{\varepsilon_1} w\mu$. Поэтому достаточно, зафиксировав $\alpha \in \Delta_0$, доказать существование $\Theta_{w,\mu}$ в предположении, что $s_\alpha w\mu \gg w\mu$ и $\Theta_{s_\alpha w,\mu}$ существует. Фактически же мы покажем, что в этой ситуации для любого $\chi \in \mathfrak{h}^*$ такого, что $(\chi + w\mu)(H_\alpha)$ — целое неотрицательное число,

$$\Theta_{s_\alpha w,\mu} E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi = E_{-\alpha}^{(\chi + w\mu)(H_\alpha)} \Theta_{w,\mu} 1_\chi. \tag{1}$$

Определим множество $Б_{w,\mu} \subset \mathfrak{h}^*$ следующим условием: $Б_{w,\mu}$ есть множество тех весов $\chi \in \mathfrak{h}^*$, для которых $(\chi + w\mu)(H_\alpha)$ является целым положительным числом и для любого $\gamma \in \Delta_+$, $\gamma \neq \alpha$, $(\chi + w\mu)(H_\gamma)$ — не целое.

Нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть* $x \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{-\eta}$ *и* $y \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{-\eta+q\alpha}$ *для некоторых* $\eta \in \Gamma_+$, $\alpha \in \Delta_0$ *и* $q \geqslant 0$. *Пусть, кроме того, для всех* $\chi \in Б_{w,\mu}$ *верно* $E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)-q} x 1_\chi = y E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi$. *Тогда* $\deg x = \deg y + q$.

Лемма 3. *Пусть* $\chi \in \mathfrak{h}^*$ *таков, что* $\chi(H_\alpha)$ *является целым положительным числом только для одного* $\alpha \in \Delta_+$. *Тогда максимальным соб-*

ственным подмодулем в M_χ *будет подмодуль, изоморфный* $M_{\chi'}$ *и натянутый на* $\theta_{\alpha,\chi(H_\alpha)}\cdot 1_\chi$, *где* $\chi' = \chi - \alpha\cdot\chi(H_\alpha)$ (ср. [3]; определение элемента $\theta_{\alpha,\chi(H_\alpha)}$ содержится в [1]).

Утверждение леммы 2 является непосредственным следствием коммутационных соотношений в алгебре $\mathfrak{g}$; проверку его мы опустим.

Перейдем к доказательству леммы 3.

Пусть $\eta \in \Gamma_+$. Нетрудно видеть, что размерность пространства векторов веса $\chi - \eta$ в максимальном собственном подмодуле модуля M_χ не превосходит кратности нуля в точке $z = 0$ полинома $\det A_\eta(\chi - \rho + z\xi)$, $\xi \in \mathfrak{h}^*$, $\xi(H_\alpha) \neq 0$ (поскольку соответствующие строки A_η обращаются в нуль). С другой стороны, применяя формулу для $\det A_\eta$ из [1], мы получаем, что эта кратность равна $P(\eta - \alpha\chi(H_\alpha)) = \dim M^{\chi-\eta}_{s_\alpha\chi}$, откуда и следует утверждение леммы.

Обратимся непосредственно к доказательству теоремы 4 из [2].

Л е м м а 4. *Пусть* $x \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{w\mu-\mu}$ *такой, что* $x\cdot 1_Y \in Y_\mu^{w\mu-\mu}$. *Тогда для любых* $\chi \in Б_{w,\mu}$ *и* $\gamma \in \Delta_0$ $E_\gamma^{\mu(H_\gamma)+1}\cdot E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}\cdot x\cdot 1_\chi = 0$. (Напомним, что мы зафиксировали α.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma \neq \alpha$. Тогда

$$E_\gamma^{\mu(H_\gamma)+1}\cdot E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}\cdot x\cdot 1_\chi = \mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}x)\,1_\chi = E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}\,\mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(x)\,1_\chi = 0,$$

так как $\mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(x) \in U(\mathfrak{g})\cdot\mathfrak{n}_+$ в силу условия леммы.

В случае же, когда $\gamma = \alpha$, утверждение леммы можно получить с помощью следующего тождества. Для любого $x \in U(\mathfrak{g})$ положим $\binom{x}{k} = (k!)^{-1}x(x-1)\ldots(x-k+1)$. Тогда

$$\mathrm{ad}_{E_\alpha}^p(E_{-\alpha}^q) = \sum_{k\geqslant 0} E_{-\alpha}^{k-p+q}h_k^{p,q}E_\alpha^k,$$

где

$$h_k^{p,q} = (-1)^k((p-k)!)^2\binom{p}{p-k}\binom{q}{q-k}\binom{H_\alpha+p-q-2k}{p-2k} \in U(\mathfrak{h}).$$

(Заметим, что если $p > 0$, то $h_p^{p,q} = 0$.)

Соответствующую выкладку мы опускаем ввиду ее длинноты.

Л е м м а 5. *Пусть x — такое, как выше. Тогда для любого* $\chi \in Б_{w,\mu}$ *элемент* $E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}x1_\chi$ *лежит в максимальном собственном подмодуле модуля* M_χ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вес (относительно $\mathfrak{h}$) элемента $E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}x1_\chi$ равен $\chi - \rho - \mu + w\mu - \alpha(\chi + w\mu)(H_\alpha) = \chi - \rho - \eta'$ (очевидно, $\eta' \in \Gamma_+$). Поэтому, согласно [1], достаточно показать, что $A_{\eta'}(y, E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)}x)(\chi-\rho) = 0$ для всех $y \in U(\mathfrak{n}_-)^{-\eta'}$. Так как, в силу леммы 4, это верно для $y \in J_\mu^{-\eta'}$, то остается проверить, что $J_\mu^{-\eta'} = U(\mathfrak{n}_-)^{-\eta'}$ или, что эквивалентно, $I_\mu^{-\eta'} = U(\mathfrak{n}_-)^{-\eta'}$.

Предположим противное, тогда $\mu - \eta'$ является весом π_μ. Имеем: $\langle\mu - \eta', \mu - \eta'\rangle = \langle w\mu - \alpha(\chi + w\mu)(H_\alpha), w\mu - \alpha(\chi + w\mu)(H_\alpha)\rangle = \langle w\mu, w\mu\rangle + \langle\alpha, \alpha\rangle[(\chi + w\mu)(H_\alpha)]^2 - 2\langle w\mu, \alpha\rangle(\chi + w\mu)(H_\alpha) \geqslant \langle w\mu, w\mu\rangle + \langle\alpha, \alpha\rangle[(\chi + w\mu)(H_\alpha)]^2 > \langle w\mu, w\mu\rangle$, а это противоречит тому, что $w\mu$ — крайний вес π_μ (см., например, [4]). Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть x — такое, как выше. Тогда существует такой $y \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})$, $y1_Y \in Y_\mu^{-\mu+s_\alpha w\mu}$, что для всех $\chi \in Б_{w,\mu}$*

$$E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} x 1_\chi = y E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi. \qquad (2)$$

Доказательство. Из леммы 3 и 5 следует, что для каждого $\chi \in Б_{w,\mu}$ существует такой $y(\chi) \in U(\mathfrak{n}_-)^{-\mu+s_\alpha w\mu}$, что

$$E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} x 1_\chi = y(\chi) E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi.$$

Применяя лемму 2 из [1], получаем, что коэффициенты $y(\chi)$ в любом фиксированном базисе пространства $U(\mathfrak{n}_-)^{-\mu+s_\alpha w\mu}$ полиномиально зависят от координат χ. Поэтому существует (единственный в силу плотности $Б_{w,\mu}$ в $\mathfrak{h}^*$) $y \in U(\mathfrak{n}_- + \mathfrak{h})^{-\mu+s_\alpha w\mu}$, удовлетворяющий (2). Осталось показать, что $y1_Y \in Y_\mu^{-\mu+s_\alpha w\mu}$.

Для любого $\gamma \in \Delta_0$ имеем:

$$0 = E_\gamma^{\mu(H_\gamma)+1} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} x 1_\chi = E_\gamma^{\mu(H_\gamma)+1} y E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi = \mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1} (y E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)}) 1_\chi =$$
$$= \mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(y) E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} \cdot 1_\chi = \mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(y) 1_{s_\alpha\chi},$$

откуда $\mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(y) \in \mathrm{Ann}\ 1_{s_\alpha\chi}$. Так как это верно для любого $\chi \in Б_{w,\mu}$, то $\mathrm{ad}_{E_\gamma}^{\mu(H_\gamma)+1}(y)$ лежит в $\bigcap_{\chi \in Б_{w,\mu}} \mathrm{Ann}\ 1_{s_\alpha\chi}$, что, поскольку $Б_{w,\mu}$ плотно в $\mathfrak{h}^*$, совпадает с $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$. Тем самым лемма доказана.

По лемме 1, существует такой $d \in U(\mathfrak{h})$, что $y = \Theta_{s_\alpha w,\mu} d$. Имеем:

$$E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} x 1_\chi = \Theta_{s_\alpha w,\mu} \cdot d \cdot E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi =$$
$$= \Theta_{s_\alpha w,\mu} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} d(\chi - \rho - \alpha \cdot \chi(H_\alpha)) 1_\chi,$$

откуда видно, что коэффициенты x делятся на элемент $d' \in U(\mathfrak{h})$, связанный с d соотношением $d'(\chi - \rho) = d(\chi - \rho - \alpha\chi(H_\alpha))$. Пусть $x = \tilde{x} d$. Тогда $E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} \tilde{x} 1_\chi = \Theta_{s_\alpha w,\mu} E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi$, и можно положить $\Theta_{w,\mu} = \tilde{x}$. То, что $\tilde{x}$ удовлетворяет условию 1) теоремы 4 из [2], уже доказано; условие 2) легко проверяется с помощью леммы 2; наконец, выполнение условия 3) следует из того, что, как только что показано, $\tilde{x}$ удовлетворяет (1).

Переходя к проверке условия 4), выберем такую последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ простых корней, что $w = s_{\varepsilon_k} \ldots s_{\varepsilon_1}$ и $s_{\varepsilon_i} \ldots s_{\varepsilon_1}\chi \gg s_{\varepsilon_{i-1}} \ldots s_{\varepsilon_1}\chi$ для любого доминантного $\chi \in \mathfrak{h}^*$. Положим $n_i = s_{\varepsilon_{i-1}} \ldots s_{\varepsilon_1}\mu(H_{\varepsilon_i})$. Очевидно, $\mathbf{C}E_{-\varepsilon_k}^{n_k} \ldots E_{-\varepsilon_1}^{n_1} + I_\mu^{-\mu+w\mu} = U(\mathfrak{n}_-)^{-\mu+w\mu}$. Следовательно, $\mathbf{C}E_{-\varepsilon_1}^{n_1} \ldots E_{-\varepsilon_k}^{n_k} + J_\mu^{-\mu+w\mu} = U(\mathfrak{n}_-)^{-\mu+w\mu}$. Поэтому достаточно показать, что

$$A_{\mu-w\mu}(E_{-\varepsilon_1}^{n_1} \ldots E_{-\varepsilon_k}^{n_k}, \Theta_{w,\mu}) = \mathrm{const} \prod_{\gamma\in\Delta_+} \prod_{n=1}^{-w\mu(H_\gamma)} (H_\gamma + \rho(H_\gamma) - n).$$

Можно считать, что не все $n_i = 0$ (поскольку случай $w\mu = \mu$ тривиален); в частности, $w\mu(H_{\varepsilon_k}) < 0$ и $\varepsilon_k = \alpha$.

Лемма 7.

$$E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \Theta_{w,\mu} 1_Y = \mathrm{const}\ E_{-\alpha}^{-w\mu(H_\alpha)} s_\alpha \Big(\prod_{\gamma\in\Delta_+} \prod_{n=1}^{-s_\alpha w\mu(H_\gamma)} (H_\gamma + \rho(H_\gamma) - n)\Big) 1_Y.$$

Доказательство. Проводя индукцию по w, можно предположить, что утверждение леммы справедливо для $w' = s_\alpha w$.

В силу соотношения (1) мы имеем:

$$E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \Theta_{s_\alpha w, \mu} E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi = E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} \Theta_{w,\mu} 1_\chi.$$

Левая часть этого равенства, ввиду предположения индукции, равна

$$\mathrm{const} \prod_{\gamma\in\Delta_+} \prod_{n=1}^{-s_\alpha w\mu(H_\gamma)} (H_\gamma + \rho(H_\gamma) - n)\, E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi =$$

$$= \mathrm{const} \prod_{\gamma\in\Delta_+} \prod_{n=1}^{-s_\alpha w\mu(H_\gamma)} (\chi(H_\gamma) - \chi(H_\alpha)\cdot\alpha(H_\gamma) - n)\, E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} 1_\chi =$$

$$= \mathrm{const}\, E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} \prod_{\gamma\in\Delta_+\setminus\{\alpha\}} \prod_{n=1}^{-w\mu(s_\alpha H_\gamma)} (\chi(s_\alpha H_\gamma) - n)\, 1_\chi =$$

$$= \mathrm{const}\, E_{-\alpha}^{\chi(H_\alpha)} \prod_{\gamma\in\Delta_+\setminus\{\alpha\}} \prod_{n=1}^{-w\mu(H_\gamma)} (H_\gamma + \rho(H_\gamma) - n)\, 1_\chi.$$

Покажем, что правая часть его равна $E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} \ldots E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \Theta_{w,\mu} 1\chi$; отсюда, конечно, будет немедленно следовать лемма.

Предположим, мы доказали, что

$$E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} \Theta_{w,\mu}\cdot 1_\chi =$$
$$= E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_j}^{n_j} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} E_{\varepsilon_{j-1}}^{n_{j-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \cdot \Theta_{w,\mu}\cdot 1_\chi.$$

Если $\varepsilon_j \neq \alpha$, то $[E_{\varepsilon_j}, E_{-\alpha}] = 0$, и можно сделать индукционный шаг по j. Пусть $\varepsilon_j = \alpha$. Тогда

$$E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_j}^{n_j} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} E_{\varepsilon_{j-1}}^{n_{j-1}} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \Theta_{w,\mu} 1_\chi =$$
$$= E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_{j+1}}^{n_{j+1}} E_{-\alpha}^{(\chi+w\mu)(H_\alpha)} E_{\varepsilon_j}^{n_j} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1} \Theta_{w,\mu} 1_\chi +$$

$+$ члены, соответствующие действию на $\Theta_{w,\mu}$ одночленов вида

$$E E_{\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{\varepsilon_j}^{n_j - l} \ldots E_{\varepsilon_1}^{n_1}, \quad E \in U(\mathfrak{g}), \quad l > 0.$$

Поэтому нам достаточно показать, что $E_{-\varepsilon_{k-1}}^{n_{k-1}} \ldots E_{-\varepsilon_j}^{n_j - l} \ldots E_{-\varepsilon_1}^{n_1} \in I_\mu$.

Можно считать, что $\langle \varepsilon_{j+1}, \varepsilon_j \rangle < 0$ (действительно, из выбора цепочки корней $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ ясно, что среди них найдется такой ε, что $\langle \varepsilon, \varepsilon_j \rangle < < 0$; поэтому можно добиться желаемого перестановками корневых векторов). В этой ситуации имеем:

$$s_{\varepsilon_{j-1}} \ldots s_{\varepsilon_1}\mu(H_{\varepsilon_{j+1}}) - s_{\varepsilon_j} \ldots s_{\varepsilon_1}\mu(H_{\varepsilon_{j+1}}) = s_{\varepsilon_{j-1}} \ldots s_{\varepsilon_1}\mu(H_{\varepsilon_j})\, \varepsilon_j(H_{\varepsilon_{j+1}}) < 0.$$

Поэтому $E_{-\varepsilon_{j+1}}^{n_{j+1}}$ аннулирует $E_{-\varepsilon_j}^{n_j - l} s_{\varepsilon_{j-1}} \ldots s_{\varepsilon_1} V_\mu^\mu$ при любом $l > 0$ (поскольку $s_{\varepsilon_{j-1}} \ldots s_{\varepsilon_1}\mu$ — крайний вес).

Лемма доказана.

Доказательство справедливости условия 4) теоремы 4 из [2] теперь нетрудно провести, считая по индукции, что оно выполнено для $w' = s_\alpha w$, и применяя лемму 7. Наконец, описание ядра $c_{w,\mu}$ легко получается с помощью уже доказанных свойств $\Theta_{w,\mu}$.

Доказательство теоремы 4 из [2] полностью закончено.

В [2] при доказательстве предложения 8 было показано, что $\Theta_{w,\mu_1}\Theta_{w,\mu_2} = \Theta_{w,\mu_1+\mu_2}$. Приведем еще одно свойство элементов $\Theta_{w,\mu}$.

Предложение. *Предположим, что* $\chi(H_\alpha) = \mu(H_\alpha)$ *для некоторых* $\alpha \in \Delta_+$ *и* $\chi \in \mathfrak{h}^*$. *Тогда* $\Theta_{s_\alpha,\mu}1_\chi = \theta_{\alpha,\mu(H_\alpha)}1_\chi$.

Доказательство. Выберем такой $\chi \in \mathfrak{h}^*$, что $\chi(H_\alpha) = \mu(H_\alpha)$, а для любого другого положительного корня γ $\chi(H_\gamma)$ — не целое. Согласно условию 4) только что доказанной теоремы, для любого элемента $E \in U(\mathfrak{n}_-)^{-\alpha\cdot\mu(H_\alpha)}$

$$E^\sigma\Theta_{s_\alpha,\mu}1_\chi = A_{\mu(H_\alpha)\alpha}(E, \Theta_{s_\alpha,\mu})(\chi-\rho)1_\chi =$$

$$= \mathrm{const} \prod_{\gamma\in\Delta_+} \prod_{n=1}^{-s_\alpha\mu(H_\gamma)} (\chi(H_\gamma)-n)1_\chi = 0$$

(обращается в нуль сомножитель, отвечающий $\gamma = \alpha$, $n = -s_\alpha\mu(H_\gamma) = \mu(H_\alpha) = \chi(H_\gamma)$). В силу леммы 3, это означает, что $\Theta_{s_\alpha,\mu}1_\chi$ лежит в максимальном собственном подмодуле модуля M_χ. Остается применить пункты 3) леммы 1 из [1] и теоремы 4 из [2], что и завершит доказательство предложения.

Отметим в заключение, что если структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$ в выбранной базе Вейля рациональны, то коэффициенты разложения $\Theta_{w,\mu}$ по базису из одночленов от элементов базы Вейля также будут рациональны.

Поступила в редакцию
21 февраля 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Шаповалов Н. Н., Об одной билинейной форме на универсальной обертывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли, Функц. анализ **6**, вып. 4 (1972), 65—70.
2. Шаповалов Н. Н., Структура алгебры регулярных дифференциальных операторов на основном аффинном пространстве, Функц. анализ **8**, вып. 1 (1974), 43—54.
3. Conze N., Diximier J., Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, Bull. scient. Math. France **96** (1972), 339—351.