Г. А. Ильюшина, О решениях термодинамического уравнения для функционала реакции в пространстве непрерывно дифференцируемых процессов,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 2, 75–79

УДК 536.517.958

Г. А. Ильюшина

О РЕШЕНИЯХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА РЕАКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Основное термодинамическое тождество МСС, или совместное следствие второго закона термодинамики и уравнения баланса энтропии, рассматривается как функциональное уравнение для реакции r^t, представляющей собой тензор-функционал, определенный на некотором множестве процессов $\{\pi(\tau)\}$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, где $\pi(\tau)$ — тензор-функция, при заданном скалярном потенциале V^t, определенном на том же множестве $\{\pi(\tau)\}$; это уравнение имеет вид [1, формула (10.30)]

$$\dot{V}^t(\pi)-r^t(\pi)\,\dot{\pi}(t)=0, \tag{1}$$

здесь $r^t(\pi)\,\dot{\pi}(t)=r_t^0\,\dot{\pi}_0+\sum\limits_{m,n=1}^{3} r_t^{mn}\,\dot{\pi}_{mn}$. Если тензоры r^t и π, имеющие вид (4×4)-матриц

$$r^t=\left\|\begin{matrix} r_t^0 & 0\\ 0 & \|r_t^{mn}\|\end{matrix}\right\|,\quad \pi=\left\|\begin{matrix} \pi_0 & 0\\ 0 & \|\pi_{mn}\|\end{matrix}\right\|,$$

представить как 10-мерные векторы с соответственно равными номерами координат, например

$$r^t=(r_t^0,\ r_t^{11},\ r_t^{12},\ r_t^{13},\ r_t^{21},\ r_t^{22},\ r_t^{23},\ r_t^{31},\ r_t^{32},\ r_t^{33})\equiv(y_t^0,\ y_t^1,\ \ldots,\ y_t^9),$$

$$\pi=(\pi_0,\ \pi_{11},\ \pi_{12},\ \pi_{13},\ \pi_{21},\ \pi_{22},\ \pi_{23},\ \pi_{31},\ \pi_{32},\ \pi_{33})\equiv(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_9),$$

то свертка в (1) будет равна $\sum\limits_{k=0}^{9} y^k(x)\,\dot{x}_k(t)$, так что (1) равносильно уравнению

$$\sum_{k=0}^{9} y_t^k(x)\,\dot{x}_k(t)=\dot{V}^t(x).$$

Примеры возможных наборов r^t, π, V^t приведены в [1, таблица 5] или в [2], причем во всех случаях тензоры r^t и π симметричны и «независимыми» являются только 7 элементов матриц r^t и π соответственно. В п. 2 настоящей работы будет показано, что (1) справедливо также при

$$r^t=\left\|\begin{matrix} -\eta & 0\\ 0 & \|\sigma^{mn}\|\end{matrix}\right\|,\quad \pi=\left\|\begin{matrix} T & 0\\ 0 & \|D_{mn}\|\end{matrix}\right\|,\quad V^t=\Psi_\eta^t, \tag{2}$$

здесь η — энтропия, T — температура, σ^{mn} — симметричный тензор мгновенных истинных напряжений, D_{mn} — тензор дисторсии, $\Psi_\eta{}^t$ — функционал свободной энергии. Такой физически допустимый набор невозможен, вообще говоря, в рамках 7-мерной модели для термодинамического тождества (1), которая представлена в [1—3], поэтому естественной является 10-мерная модель, рассмотренная в п. 2. Она также может оказаться полезной при отыскании определяющих соотношений не только в теории термомеханических процессов (см. [4]).

1. Известно, что тензор дисторсии можно разложить в сумму симметричного и кососимметричного тензоров, например, следующим образом. Пусть $\mathbf{R}^3$ — ориентированное трехмерное евклидово аффинное пространство, элемент $x \in \mathbf{R}^3$ — упорядоченная тройка вещественных чисел $x=(x_1, x_2, x_3)$ с аффинной системой координат 0, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где $0=(0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_i \in E^3$, $\mathbf{e}_1=\{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_3=\{0, 0, 1\}$, E^3 — соответствующее присоединенное векторное евклидово пространство, $\xi \in E^3$, $\xi=\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, со скалярным произведением $(\xi, \eta)=\sum\limits_{k=1}^{3} \xi_i \eta_i$, причем

$$x=(x_1, x_2, x_3)=0+\sum_{i=0}^{3} x_i \mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i.$$

В области $G \subset \mathbf{R}^3$, $G \neq \varnothing$, задано векторное поле перемещений, зависящее от времени, $\mathbf{u}(x, t) \in E^3$, $x \in G$, $t>0$, $\mathbf{u}(x, t)=\sum\limits_{i=1}^{3} u^i(x, t)\, \mathbf{e}_i$. Если $\mathbf{u}(x, t)$, рассматриваемое как отображение G в E^3 при фиксированном t, дифференцируемо на G, то

$$\Delta \mathbf{u}(x, t) \equiv u(x+\xi, t)-u(x, t)=L(x, t)\,\xi+o(\xi), \quad \xi \to 0,$$

где $L(x, t)$ — линейный оператор в E^3. Его матрица в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^1(x, t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^1(x, t)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^1(x, t)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u^2(x, t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^2(x, t)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^2(x, t)}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u^3(x, t)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u^3(x, t)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u^3(x, t)}{\partial x_3} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В разложении $L(x, t)=\mathrm{E}(x, t)+K(x, t)$, где $\mathrm{E}(x, t)=\frac{1}{2}(L+L^*)=\mathrm{E}^*(x, t)$, $K(x, t)=\frac{1}{2}(L-L^*)=-K^*(x, t)$, оператор $\mathrm{E}(x, t)$ определяет деформацию (с точностью до членов второго порядка малости относительно $\|\xi\|$), матрица $\mathrm{E}(x, t)$ в том же базисе есть

$$(\mathrm{E}(x, t)\,\mathbf{e}_1 \ \ \mathrm{E}(x, t)\,\mathbf{e}_2 \ \ \mathrm{E}(x, t)\,\mathbf{e}_3)=\frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u^i(x, t)}{\partial x_j}+\frac{\partial u^j(x, t)}{\partial u_i} \right\| \equiv \|\mathrm{E}_{ij}\|. \tag{4}$$

Тензор (3) называется тензором дисторсии, а (4) — тензором [illegible]ых деформаций (см. [1, с. 86—88]). Оператор $K(x, t)$ — это вект[illegible]е умножение на $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x, t)$, т. е. $K(x, t)=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}(x, t) \times \xi$, матрица оператора $K(x, t)$ в том же базисе равна

$$(K(x, t)\,\mathbf{e}_1 \ \ K(x, t)\,\mathbf{e}_2 \ \ K(x, t)\,\mathbf{e}_3)=\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{e}_1 \ \ \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{e}_2 \ \ \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\mathbf{e}_3)=$$

$$=\begin{Vmatrix} 0 & \frac{\partial u^1}{\partial x_2}-\frac{\partial u^2}{\partial x_1} & \frac{\partial u^1}{\partial x_3}-\frac{\partial u^3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x_1}-\frac{\partial u^1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial u^2}{\partial x_3}-\frac{\partial u^3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u^3}{\partial x_1}-\frac{\partial u^1}{\partial x_3} & \frac{\partial u^3}{\partial x_2}-\frac{\partial u^2}{\partial x_3} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Следует отметить, что условие $K(x, t)\not\equiv 0$ (при фиксированных x и t) эквивалентно равенству $\dim\ker K=1$.

2. Тройка (2), подставленная в левую часть (1), обращает (1) в тождество, так как

$$\dot{\Psi}^t_\eta+\eta\dot{T}-\sigma^{mn}D_{mn}=\dot{\Psi}^t_\eta+\eta\dot{T}-\sigma^{mn}\dot{\mathrm{E}}_{mn}=0$$

(см. [1, с. 151, таблица 5]. Если положить

$$\pi(\tau)\equiv x(\tau)=\left(T(\tau),\ \frac{\partial u^1(x,\tau)}{\partial x_1},\ \frac{\partial u^2(x,\tau)}{\partial x_1},\ \frac{\partial u^3(x,\tau)}{\partial x_1},\ \frac{\partial u^1(x,\tau)}{\partial x_2},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{\partial u^3(x,\tau)}{\partial x_3}\right)\equiv(x_0(\tau),\ldots,x_9(\tau)),$$

$$r^t(\pi)\equiv y^t(x)=(-\eta(t),\ \sigma^{11}(t),\ \sigma^{12}(t),\ \sigma^{13}(t),\ \sigma^{21}(t),\ldots,\sigma^{33}(t))\equiv$$

$$\equiv(y^0_t(x),\ldots,y^9_t(x)),$$

$$\sum_{i=0}^{9} y^i_t(x)\,\dot{x}_i(t)\equiv(y^t(x),\ \dot{x}(t)),$$

то (1) примет вид

$$(y^t(x),\ \dot{x}(t))=\dot{V}^t(x).$$

В следующем пункте доказана теорема о существовании нетривиальных решений «однородного» уравнения

$$(y^t(x),\ \dot{x}(t))=0. \tag{6}$$

3. Обозначим через X^t банахово пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, t]$, $t>0$, вектор-функций $C^1[0, t]^{10}$ с нормой

$$\|x\|=\sum_{k=0}^{9}\Big(\sup_{\tau\in[0,t]}|x_k(\tau)|+\sup_{\tau\in[0,t]}|\dot{x}_k(\tau)|\Big),\quad x\in X^t,$$

$$x(\tau)=\{x_0(\tau),\ x_1(\tau),\ldots,x_9(\tau)\},$$

M — открытое непустое множество в X^t, $y^t(x)=\{y^0_t(x),\ldots,y^9_t(x)\}\in E^{10}$ — вектор-функционал, определенный на M.

Теорема. *Уравнение (6) имеет нетривиальные решения, непрерывные на M. Множество таких решений содержит все функционалы вида*

$$y^t(x)=f^t(x)\,\mathcal{K}\,\dot{x}(t), \tag{7}$$

где f^t — любой скалярный функционал ($f^t(x)\in R^1$), непрерывный и не равный тождественно нулю на M, $\mathcal{K}$ — любая (10×10)-вещественная кососимметричная матрица ранга $2m$, $m=\overline{1, 5}$.

З а м е ч а н и е. Общий вид кососимметричных матриц и их основные свойства можно найти в монографии [5].

Доказательство теоремы. Если $\mathscr{K} = \|\nu^{ij}\|$, то из (7) следует, что $(\dot{x}(t), y^t(x)) = f^t(x)\nu^{ij}\dot{x}_i(t)\dot{x}_j(t) = 0$, $x \in M$. По условию найдется точка $\widehat{x} \in M$, для которой $f^t(\widehat{x}) \neq 0$; обозначим через $\widetilde{\xi}$ производную элемента $\widehat{x}$ при $\tau = t$, т. е. $\widetilde{\xi} = \{\dot{\widehat{x}}_0(t), \ldots, \dot{\widehat{x}}_9(t)\} \equiv \dot{\widehat{x}}(t)$. В евклидовом пространстве E^{10}, полученном из R^{10} с помощью билинейной формы

$$(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{9} \xi_i \eta_i, \ \xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_9\} \in R^{10}, \ \eta = \{\eta_0, \ldots, \eta_9\} \in R^{10},$$

есть канонический базис $\{e^i\}$, $i = \overline{0, 9}$, $e_i = \{\overbrace{0, \ldots, 0}^{i \text{ раз}}, 1, 0, \ldots, 0\}$. Пусть K — кососимметричный оператор в E^{10}, матрица которого в базисе $\{e^i\}$ совпадает с матрицей $\mathscr{K}^T$.

Предположим, что $m = 5$. Тогда если $\widetilde{\xi} \neq 0$, то в силу (7) $y^t(\widehat{x}) = f^t(\widehat{x})\mathscr{K}\dot{\widehat{x}}(t) \neq 0$, так как уравнение $K\xi = 0$ имеет только нулевое решение. Если же $\widetilde{\xi} = 0$, то из (7) следует, что $y^t(\widehat{x}) = 0$. Найдется $\delta = \delta(\widehat{x}) > 0$, такое, что все точки $x \in X^t$, для которых $\|x - \widehat{x}\| < \delta$, принадлежат M и для них $f^t(x) \neq 0$ в силу непрерывности f^t в точке $\widehat{x}$. Рассмотрим последовательность $x^{(n)} \in X^t$, $x^{(n)}(\tau) = \widehat{x}(\tau) + \mathrm{E}^{(n)}(\tau)$, $\mathrm{E}_j^{(n)}(\tau) = \tau(nt)^{-1}$, $j = \overline{0, 9}$, $n > 10\delta^{-1}(1 + t^{-1})$, $n \in \mathbf{N}$. Очевидно,

$$\|\widehat{x} - x\| < \delta, \ \dot{x}^{(n)}(t) \neq 0, \ f^t(x^{(n)}) \neq 0,$$

поэтому согласно (7)

$$y^t(x^{(n)}) = f^t(x^{(n)})\mathscr{K}\dot{x}^{(n)}(t) \neq 0.$$

Предположим, что $1 \leqslant m < 5$. Тогда ядро оператора K, т. е. множество векторов $\xi \in E^{10}$, таких, что $K\xi = 0$, является подпространством размерности $10 - 2m$, причем E^{10} представимо в виде прямой (ортогональной) суммы ядра и его ортогонального дополнения:

$$E^{10} = \ker K \oplus (\ker K)^{\perp}, \ \xi = \xi_k + \xi^{\perp}, \ K\xi_k = 0, \ \xi^{\perp} \ker K, \ \xi \in E^{10}. \tag{8}$$

Возможны два случая.

а) $\mathscr{K}\widetilde{\xi} \neq 0$, где вектор $\widetilde{\xi}$ определен в начале доказательства теоремы. Тогда из (7) следует, что $y^t(x) = f^t(x)\mathscr{K}\dot{x}(t) \neq 0$ в некоторой окрестности элемента $\widehat{x} \in M$ в силу непрерывности функционалов f^t и $\frac{d}{dt}$ в точке $\widehat{x}$, а также непрерывности линейных форм $\varphi_j(\xi) = \nu^{ij}\xi_i$.

б) $\mathscr{K}\widetilde{\xi} = 0$, тогда $y^t(\widehat{x}) = 0$ в силу (7). Ясно, что $\widetilde{\xi} \in \ker K$ и в разложении (8) для вектора $\widetilde{\xi}$ будет $\widetilde{\xi}^{\perp} = 0$. Найдем $\delta = \delta(\widehat{x}) > 0$, такое, что все элементы $x \in X^t$, для которых $\|x - \widehat{x}\| < \delta$, принадлежат M и для них $f^t(x) \neq 0$. Фиксируем ненулевой вектор $\eta \in (\ker K)^{\perp}$, представим его в виде $\eta = \sum_{i=0}^{9} \eta_i e^i$, положим $\varkappa = \sum_{i=0}^{9} |\eta_i| > 0$ и рассмотрим последовательность точек $x^{(n)} \in X^t$, $x_i^{(n)}(\tau) = \widehat{x}_i(\tau) + \tau n^{-1}\eta_i$, $i = \overline{0, 9}$, $n > \varkappa\delta^{-1}(1 + t)$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\|x^{(n)} - \widehat{x}\| < \delta$, значит, $x^{(n)} \in M$, $f^t(x^{(n)}) \equiv c_n \neq 0$, и из (7) следует, что

$$y^t(x^{(n)}) = f^t(x^{(n)})\mathscr{K}\dot{x}^{(n)}(t) = c_n n^{-1} K\eta \neq 0.$$

Более того, поскольку $\|x^{(n)}-\widehat{x}\|\to 0$ при $n\to\infty$, то в любой окрестности точки $\widehat{x}$ найдутся элементы $x^{(n)}\in M$, для которых $y^t(x^{(n)})\neq 0$. Доказательство теоремы закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-013-16503.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1990.
2. Ильюшин А. А., Ильюшина Г. А. Вопросы термодинамики необратимых процессов//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 3. 78—80.
3. Ильюшина Г. А. К построению математических моделей в механике сплошной среды//Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. **28**, № 11. 1743—1747.
4. Ильюшин А. А. Функционалы и меры необратимости на множествах процессов в механике сплошной среды (МСС)//Докл. РАН. 1994. **337**, № 1. 48—50.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1966.

Поступила в редакцию
05.01.95