ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 2 Сентябрь 1962 Октябрь № 5

РАСЧЕТ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА ИЛИ ВДУВА

ЛЮ ШЭНЬ-ЦЮАНЬ
(*Москва — Пекин*)

В предыдущей статье [1] нами была рассмотрена задача расчета ламинарного пограничного слоя при наличии отсоса или вдува для случая несжимаемой жидкости. В настоящей статье метод обобщенных интегральных соотношений [2] применяется к расчету ламинарного пограничного слоя в сжимаемой жидкости. При этом учитывается также излучение поверхности профиля. Материал обшивки профиля предполагается абсолютно нетеплопроводным, что, как известно, справедливо с очень большой точностью даже для металлических обшивок, так как потоки тепла из пограничного слоя в обшивку во много раз превосходят потоки тепла вдоль поверхности обшивки.

В работе даны окончательные расчетные формулы в общем случае и приведен пример расчета для случая обтекания кругового цилиндра.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе (см. [3]):

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi}+w\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\tau}{\tau_0}UU'+\nu_{00}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial \eta}\right],$$
$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial w}{\partial \eta}=0, \tag{1.1}$$
$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}+w\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}=\frac{\nu_{00}}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[b(\tau)\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right]-\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\nu_{00}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[b(\tau)\frac{\partial \alpha^2}{\partial \eta}\right].$$

Переменные ξ, η связаны с переменными x и y соотношениями

$$\xi=\int_0^x(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}\,dx,\qquad \eta=\int_0^y\frac{\rho}{\rho_{00}}\,dy=\int_0^y(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}\,dy, \tag{1.2}$$

где

$$\alpha_0=\frac{U}{V_{\max}},\qquad \alpha=\frac{u}{V_{\max}},\qquad \vartheta=\tau+\alpha^2,\qquad \tau=\frac{T}{T_{00}},$$
$$w=(1-\alpha_0^2)^{-\varkappa/(\varkappa-1)}\,u\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{v}{\tau}. \tag{1.3}$$

Граничные условия:

$$u(\xi,0)=0\qquad u(\xi,\infty)=U,\qquad \vartheta(\xi,\infty)=1. \tag{1.4}$$

Мы будем рассматривать однородное отсасывание или вдувание.

Возьмем еще два граничных условия:

$$v\Big|_{y=0} = \frac{m_0}{\rho_w}\begin{cases} <0 \text{ отсос,} \\ =0 \text{ без отсоса,} \\ >0 \text{ вдув;} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} = \begin{cases} c_p m_0 (T_w - T_k) + \varepsilon\sigma T_w^4 & \text{вдув,} \\ \varepsilon\sigma T_w^4 & \text{отсос,} \end{cases}$$

где ρ_w — плотность на стенке,

m_0 — расход воздуха через единицу площади,

λ — коэффициент теплопроводности,

T_w — температура на стенке,

T_k — температура вдуваемого воздуха,

σ — постоянная Стефана — Больцмана,

ε — излучательная способность.

В переменных ξ, η граничные условия (1.5) принимают вид

$$w(\xi, 0) = \frac{m_0}{\rho_{00}(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}},$$

$$\frac{\mu_{00} b(\tau_w)}{\Pr}(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0} = m_0(\tau_w - \tau_k) + \frac{\varepsilon\sigma}{c_p}\tau_w^4 T_{00}^3, \tag{1.5a}$$

где $\tau_k = T_k/T_{00}$.

Возьмем максимальную скорость $V_{\max}$ за характерную скорость и некоторую длину l — за характерную длину (например, радиус цилиндра для случая обтекания цилиндра). Используя преобразования (см. [2])

$$\bar{u} = \frac{u}{U} \qquad \bar{v} = \frac{w}{U\sqrt{\nu_{00}}}, \qquad \psi = 1 - \vartheta;$$

$$\bar{s} = \frac{1}{V_{\max} l}\int_0^{\xi} U\,d\xi, \qquad \bar{t} = \frac{1}{\sqrt{V_{\max} l \nu_{00}}}\int_0^{\eta} U\,d\eta = \frac{U\eta}{\sqrt{V_{\max} l \nu_{00}}}, \tag{1.6}$$

систему (1.1), (1.4), (1.5а) приведем к виду

$$\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0(1-\alpha_0^2)}(1 - u^2 - \psi) + \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left[b(\tau)\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}}\right],$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{s}} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{t}} = 0, \tag{1.7}$$

$$\bar{u}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{s}} + \bar{w}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}} = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left[b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}\right] + \left(\frac{1}{\Pr} - 1\right)\alpha_0^2\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left[b(\tau)\frac{\partial\bar{u}^2}{\partial\bar{t}}\right]$$

с граничными условиями

$$\bar{u}(\bar{s}, 0) = 0, \qquad \bar{w}(\bar{s}, 0) = \sqrt{\frac{l}{V_{\max}\nu_{00}}}\,\frac{m_0}{\rho_{00}\alpha_0(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}},$$

$$\bar{u}(\bar{s}, \infty) = 1, \qquad \psi(\bar{s}, \infty) = 0, \tag{1.8}$$

$$b(\tau_w)\frac{\partial\psi}{\partial\bar{t}}\Big|_{\bar{t}=0} = -\sqrt{\frac{l}{V_{\max}\nu_{00}}}\,\frac{\Pr}{\rho_{00}\alpha_0(1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}}\Big\{m_0(1 - \psi_w - \tau_k) +$$

$$+ \frac{\varepsilon\sigma}{c_p}(1-\psi_w)^4 T_{00}^3\Big\}, \tag{1.9}$$

где

$$\bar{w} = \sqrt{V_{\max} l}\left(\bar{v} + \frac{\dot{U}}{U} t\bar{u}\right),$$

$$\dot{U} = \frac{dU}{ds}, \qquad \dot{\alpha}_0 = \frac{d\alpha_0}{d\bar{s}}, \qquad \psi_w = 1 - \vartheta_w = 1 - \tau_w. \tag{1.10}$$

В дальнейшем для простоты мы опустим черточки над u, w, s, t и будем понимать эти величины безразмерными.

§ 2. Интегральные соотношения и системы аппроксимирующих уравнений

Предполагая, что $f(u)$ есть некоторая функция, дифференцируемая дважды и достаточно быстро стремящаяся к нулю при $t \to \infty$, учитывая граничные условия (1.8), при помощи уравнений (1.7) построим интегральные соотношения:

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty uf(u)\,dt - w(s,0)f(0) = \frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0(1-\alpha_0^2)}\int_0^\infty (1-u^2-\psi)f'(u)\,dt - \tag{2.1}$$

$$- f'(0)\,b(\tau_w)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \int_0^\infty b(\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 f''(u)\,dt,$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty u\psi f(u)\,du - w(s,0)\psi_w f(0) = \frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0(1-\alpha_0^2)}\int_0^\infty (1-u^2-\psi)\psi f'(u)\,dt -$$

$$- \psi_w f'(0)\,b(\tau_w)\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \int_0^\infty b(\tau)f'(u)\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt - \int_0^\infty b(\tau)\psi f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt -$$

$$- \frac{f(0)}{\mathrm{Pr}}\,b(\tau_w)\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0} - \frac{1}{\mathrm{Pr}}\int_0^\infty b(\tau)\frac{\partial\psi}{\partial t}f'(u)\frac{\partial u}{\partial t}\,dt - 2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\times$$

$$\times\alpha_0^2\int_0^\infty b(\tau)uf'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt. \tag{2.2}$$

Введем обозначения

$$\Theta = \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial t}}, \qquad \Theta_0 = \left(\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial t}}\right)_{t=0},$$

$$\omega = \Theta\psi = \Theta(1-\vartheta), \qquad \Omega = b\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{b}{\Theta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega}{\Theta}\right), \tag{2.3}$$

$$b = b(\tau), \qquad b_0 = b(\tau_w), \qquad \beta = \frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0(1-\alpha_0^2)}.$$

Интегральные соотношения тогда примут вид

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \Theta uf(u)\,du - w(s,0)f(0) = \beta\int_0^1 \theta f'(u)(1-u^2)\,du - \tag{2.4}$$

$$- \beta\int_0^1 \omega f'(u)\,du - \frac{b_0 f'(0)}{\Theta_0} - \int_0^1 \frac{bf''(u)}{\Theta}\,du,$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^1 \omega u f(u)\,du - w(s,0) f(0)\frac{\omega_0}{\Theta_0} = \beta\int_0^1 \omega f'(u)(1-u^2)\,du - \beta\int_0^1 \frac{\omega^2}{\Theta} f'(u)\,du -$$

$$- \frac{\omega_0}{\Theta_0^2} b_0 f'(0) - \left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} + 1\right)\int_0^1 \Omega f'(u)\,du - \int_0^1 \frac{b\omega f''(u)}{\Theta^2}\,du - \tag{2.5}$$

$$- \frac{f(0)\,\Omega_0}{\mathrm{Pr}} - 2\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\alpha_0^2 \int_0^1 \frac{b u f'(u)}{\Theta}\,du.$$

В этой форме интегральные соотношения были получены Ю. Н. Павловским для случая $w(s, 0) \equiv 0$ (см. [4]).

Остановимся на выборе интерполяционных формул для подынтегральных функций. Искомые функции θ, ω обладают следующей особенностью:

$$\Theta = o\left(\frac{1}{1-u}\right) \text{ при } u \to 1,$$

$$\omega = \Theta(1-\vartheta) = o\left[\frac{1}{1-u}(1-u)^{\mathrm{Pr}}\right] = o\left[\frac{1}{(1-u)^{1-\mathrm{Pr}}}\right] \text{ при } u \to 1,$$

т. е. особенность функции ω интегрируемая. Учитывая это, будем брать следующие формы представления для Θ и ω в N-м приближении:

$$\Theta = \frac{1}{1-u}\left[a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_{N-1} u^{N-1}\right], \tag{2.6}$$

$$\omega = d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + \cdots + d_{N-1} u^{N-1}. \tag{2.7}$$

Коэффициенты a_k, d_k выбираются так, чтобы при $u = k/N = u_k$ ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) выражения (2.6), (2.7) совпадали тождественно, соответственно, со значениями Θ_k, ω_k. Аналогично возьмем следующие интерполяционные формулы:

$$\frac{b}{\Theta} = (1-u)\left[l_0 + l_1 u + l_2 u^2 + \cdots + l_{N-1} u^{N-1}\right], \tag{2.8}$$

$$\frac{\omega^2}{\Theta} = (1-u)\left[f_0 + f_1 u + f_2 u^2 + \cdots + f_{N-1} u^{N-1}\right], \tag{2.9}$$

$$\frac{b\omega}{\Theta^2} = (1-u)^2\left[g_0 + g_1 u + g_2 u^2 + \cdots + g_{N-1} u^{N-1}\right], \tag{2.10}$$

$$\Omega = (1-u)\left[h_0 + h_1 u + h_2 u^2 + \cdots + h_{N-1} u^{N-1}\right]. \tag{2.11}$$

Так как

$$\tau = \vartheta - \alpha^2 = 1 - \frac{\omega}{\Theta} - \alpha_0^2 u, \tag{2.12}$$

то по формуле Сезерленда величина $b(\tau)$ примет вид

$$b(\tau) = \sqrt{\tau}\,\frac{1+c_1}{\tau+c_1} = \sqrt{1 - \frac{\omega}{\Theta} - \alpha_0^2 u}\;\frac{1+c_1}{1 - \omega/\Theta - \alpha_0^2 u + c_1}. \tag{2.13}$$

Чтобы получить N-е приближение, для первого интегрального соотношения (2.4) в качестве функции $f(u)$ возьмем систему степеней

$$1-u,\ (1-u)^2,\ (1-u)^3,\ \ldots,\ (1-u)^N, \tag{2.14}$$

а для второго интегрального соотношения (2.5) — систему степеней

$$1-u,\ (1-u)^2,\ (1-u)^3,\ \ldots,\ (1-u)^{N-1}. \tag{2.15}$$

После подстановки интерполяционных выражений (2.6) — (2.11) в интегральные соотношения (2.4), (2.5) для системы функций (2.14) и (2.15)

получаются $2N-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений для $2N$ неизвестных функций $\Theta_0, \Theta_1, \ldots, \Theta_{N-1}$; $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N-1}$. Еще одно уравнение получаем из граничного условия (1.9). Таким образом получилась замкнутая система аппроксимирующих уравнений.

Приведем окончательный вид аппроксимирующих выражений и систем аппроксимирующих уравнений для четвертого приближения. Для простоты введем обозначения

$$\gamma = \alpha_0 (1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}, \qquad m = \sqrt{\frac{l}{V_{\max}\nu_{00}}}\,\frac{m_0}{\rho_{00}},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{l}{V_{\max}\nu_{00}}}\,\frac{\Pr\varepsilon\sigma T_{00}^3}{\rho_{00}c_p}. \tag{2.16}$$

Величины γ, m, λ и β связаны с конкретным заданием расчетного случая.

Аппроксимирующие выражения (2.17):

$$\Theta = \frac{1}{1-u}\Big[\Theta_0\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+\Theta_1 3(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\Theta_2(-3u+16u^2-16u^3)+\Theta_3\tfrac{1}{3}(u-6u^2+8u^3)\Big),$$

$$\omega = \omega_0\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+\omega_1 4(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\omega_2 2(-3u+16u^2-16u^3)+\omega_3\tfrac{4}{3}(u-6u^2+8u^3),$$

$$\frac{b}{\Theta} = (1-u)\Big[\frac{b_0}{\Theta_0}\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+$$
$$+\frac{b_1}{\Theta}\tfrac{16}{3}(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\frac{b^2}{\Theta_2}4(-3u+16u^2-16u^3)+\frac{b_3}{\Theta_3}\tfrac{16}{3}(u-6u^2+8u^3)\Big],$$

$$\frac{\omega^2}{\Theta} = (1-u)\Big[\frac{\omega_0^2}{\Theta_0}\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+\frac{\omega_1^2}{\Theta_1}\tfrac{16}{3}(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\frac{\omega_2^2}{\Theta_2}4(-3u+16u^2-16u^3)+\frac{\omega_3^2}{\Theta_3}\tfrac{16}{3}(u-6u^2+8u^3)\Big],$$

$$\frac{b\omega}{\Theta^2} = (1-u)^2\Big[\frac{b_0\omega_0}{\Theta_0^2}\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+\frac{b_1\omega_1}{\Theta_1^2}\tfrac{64}{9}(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\frac{b_2\omega_2}{\Theta_2^2}8(-3u+16u^2-16u^3)+\frac{b_3\omega_3}{\Theta_3^2}\tfrac{64}{3}(u-6u^2+8u^3)\Big],$$

$$\Omega = (1-u)\Big\{\frac{b_0}{\Theta_0}\Big[-\tfrac{25}{3}\frac{\omega_0}{\Theta_0}+16\frac{\omega_1}{\Theta_1}-12\frac{\omega_2}{\Theta_2}+$$
$$+\tfrac{16}{3}\frac{\omega_3}{\Theta_3}\Big]\tfrac{1}{3}(3-22u+48u^2-32u^3)+$$
$$+\frac{b_1}{\Theta_1}\Big[-\frac{\omega_0}{\Theta_0}-\tfrac{10}{3}\frac{\omega_1}{\Theta_1}+6\frac{\omega_2}{\Theta_2}-2\frac{\omega_3}{\Theta_3}\Big]\tfrac{16}{3}(3u-10u^2+8u^3)+$$
$$+\frac{b_2}{\Theta_2}\Big[\tfrac{1}{3}\frac{\omega_0}{\Theta_0}-\tfrac{8}{3}\frac{\omega_1}{\Theta_1}+\tfrac{8}{3}\frac{\omega_3}{\Theta_3}\Big]4(-3u+16u^2-16u^3)+$$
$$+\frac{b_3}{\Theta_3}\Big[-\tfrac{1}{3}\frac{\omega_0}{\Theta_0}+2\frac{\omega_1}{\Theta_1}-6\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\tfrac{10}{3}\frac{\omega_3}{\omega_3}\Big]\tfrac{16}{3}(u-6u^2+8u^3)\Big\};$$

$$b_0 = \sqrt{1-\frac{\omega_0}{\Theta_0}}\,\frac{1+c_1}{1-\omega_0/\Theta_0+c_1},$$

$$b_1 = \sqrt{1 - \frac{\omega_1}{\Theta_1} - \frac{1}{4}\alpha_0^2}\,\frac{1 + c_1}{1 - \omega_1/\Theta_1 - \frac{1}{4}\alpha_0^2 + c_1},$$

$$b_2 = \sqrt{1 - \frac{\omega_1}{\Theta_2} - \frac{1}{2}\alpha_0^2}\,\frac{1 + c_1}{1 - \omega_2/\Theta_2 - \frac{1}{2}\alpha_0^2 + c_1},$$

$$b_3 = \sqrt{1 - \frac{\omega_3}{\Theta_3} - \frac{3}{4}\alpha_0^2}\,\frac{1 + c_1}{1 - \omega_3/\Theta_3 - \frac{3}{4}\alpha_0^2 + c_1}.$$

Аппроксимирующие уравнения (2.18):

$$\dot{\Theta}_0 = 200\frac{m}{\gamma} - \beta\left[97\Theta_0 + 129\Theta_1 - 31\Theta_2 + 3\Theta_3 - \frac{278}{3}\omega_0 - 148\omega_1 + \right.$$
$$\left. + 50\omega_2 - \frac{28}{3}\omega_3\right] + 940\frac{b_0}{\Theta_0} - \frac{3424}{3}\frac{b_1}{\Theta_1} + 280\frac{b_2}{\Theta_2} - 96\frac{b_3}{\Theta_3},$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{55}{3}\frac{m}{\gamma} - \beta\left[\frac{137}{72}\Theta_0 + \frac{75}{8}\Theta_1 + \frac{43}{8}\Theta_2 - \frac{23}{72}\Theta_3 - \frac{61}{36}\omega_0 - \right.$$
$$\left. - \frac{63}{6}\omega_1 - \frac{27}{4}\omega_2 + \frac{11}{18}\omega_3\right] + \frac{133}{6}\frac{b_0}{\Theta_0} + \frac{244}{9}\frac{b_1}{\Theta_1} - \frac{139}{3}\frac{b_2}{\Theta_2} - 4\frac{b_3}{\Theta_3},$$

$$\dot{\Theta}_2 = -30\frac{m}{\gamma} - \beta\left[-\frac{37}{2}\Theta_0 - \frac{45}{2}\Theta_1 + \frac{17}{2}\Theta_2 + \frac{1}{2}\Theta_3 + \right.$$
$$\left. + \frac{53}{3}\omega_0 + 26\omega_1 - 13\omega_2 - \frac{2}{3}\omega_3\right] - \frac{532}{3}\frac{b_0}{\Theta_0} +$$
$$+ \frac{688}{3}\frac{b_1}{\Theta_1} - 52\frac{b_2}{\Theta_2} + \frac{16}{3}\frac{b_3}{\Theta_3},$$

$$\dot{\Theta}_3 = 35\frac{m}{\gamma} - \beta\left[\frac{177}{8}\Theta_0 + \frac{195}{8}\Theta_1 - \frac{149}{8}\Theta_2 + \frac{41}{8}\Theta_3 - \frac{263}{12}\omega_0 - \frac{53}{2}\omega_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{101}{4}\omega_2 - \frac{71}{6}\omega_3\right] + \frac{443}{2}\frac{b_0}{\Theta_0} - \frac{1060}{3}\frac{b_1}{\Theta_1} + 175\frac{b_2}{\Theta_2} - 36\frac{b_3}{\Theta_3},$$

$$\dot{\omega}_0 - \frac{32}{5}\dot{\omega}_3 = 144\frac{m}{\gamma}\frac{\omega_0}{\Theta_0} + \beta\left[-\frac{252}{5}\omega_0 - 108\omega_1 - \frac{18}{5}\omega_2 + \right.$$
$$\left. + \frac{36}{5}\omega_3 + \frac{237}{5}\frac{\omega_0^2}{\Theta_0} + \frac{624}{5}\frac{\omega_1^2}{\Theta_1} - \frac{36}{5}\frac{\omega_2^2}{\Theta_2} - \frac{48}{5}\frac{\omega_3^2}{\Theta_3}\right] +$$
$$+ \frac{b_0}{\Theta_0}\left[\left(\frac{707}{5} + \frac{805}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0} + \left(\frac{3792}{5} - \frac{7728}{5\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1} + \left(-\frac{2844}{5} + \frac{5796}{5\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1264}{5} - \frac{2576}{5\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3} + 6\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\alpha_0^2\right] + \frac{b_1}{\Theta_1}\left[-\frac{624}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0} - \right.$$
$$- \left(\frac{4256}{5} + \frac{416}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1} + \frac{3744}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \frac{1248}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3} +$$
$$\left. + \frac{192}{5}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\alpha_0^2\right] + \frac{b_2}{\Theta_2}\left[-\frac{12}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{96}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1} - \frac{144}{5}\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \frac{96}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3} + \frac{144}{5}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\alpha_0^2\right] +$$
$$+ \frac{b_3}{\Theta_3}\left[\frac{16}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0} - \frac{96}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{288}{5}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \left(\frac{1312}{5} + \frac{160}{5\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3} - \frac{192}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} - 1\right)\alpha_0^2\right],$$

$$\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_3 = \frac{45}{2}\frac{m}{\gamma}\frac{\omega_0}{\Theta_0} + \beta\left[-\frac{65}{12}\omega_0 - \frac{25}{2}\omega_1 + \frac{5}{4}\omega_2 - \frac{11}{6}\omega_3 + \frac{125}{24}\frac{\omega_0^2}{\Theta_0} + \right.$$
$$\left. + 14\frac{\omega_1^2}{\Theta_1} - \frac{5}{2}\frac{\omega_2^2}{\Theta_2} + \frac{14}{3}\frac{\omega_3^2}{\Theta_3}\right] +$$

$$+\frac{b_0}{\Theta_0}\left[\left(\frac{1189}{72}+\frac{10375}{72\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\left(\frac{250}{3}-\frac{830}{3\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}+\left(-\frac{125}{2}+\frac{415}{2\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{250}{9}-\frac{830}{9\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}+\frac{5}{12}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right]+\frac{b_1}{\Theta_1}\left[-14\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}-\right.$$
$$\left.-\left(100+\frac{140}{3\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}+84\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}-28\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right]+$$
$$+\frac{b_2}{\Theta_2}\left[-\frac{5}{6}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\frac{20}{3}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}+8\frac{\omega_2}{\Theta_2}-\frac{20}{3}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}\right]+$$
$$+\frac{b_3}{\Theta_3}\left[-\frac{14}{9}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\frac{28}{3}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}-28\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{44}{9}+\frac{140}{9\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right],$$

$$\dot{\omega}_2=-15\frac{m}{\gamma}\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\beta\left[\frac{17}{2}\omega_0+15\,\omega_1-\frac{11}{2}\omega_2-\omega_3-\right.$$
$$\left.-\frac{97}{12}\frac{\omega_0^2}{\Theta_0}-\frac{52}{3}\frac{\omega_1^2}{\Theta_1}+9\frac{\omega_2^2}{\Theta_2}+\frac{4}{3}\frac{\omega_3^2}{\Theta_3}\right]+\frac{b_0}{\Theta_0}\left[-\left(\frac{809}{36}+\frac{2075}{36\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\right.$$
$$+\left(-\frac{388}{3}+\frac{332}{3\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}+\left(97-\frac{83}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\left(-\frac{388}{9}+\frac{332}{9\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}-$$
$$\left.-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right]+\frac{b_1}{\Theta_1}\left[\frac{52}{3}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\left(\frac{1480}{9}+\frac{520}{9\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}-\right.$$
$$\left.-104\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\frac{104}{3}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}-\frac{16}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right]+$$
$$+\frac{b_2}{\Theta_2}\left[3\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}-24\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}-16\frac{\omega_2}{\Theta_2}+24\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}+\right.$$
$$\left.+4\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right]+\frac{b_3}{\Theta_3}\left[-\frac{4}{9}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_0}{\Theta_0}+\frac{8}{3}\left(1+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_1}{\Theta_1}-8\left(1+\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_2}{\Theta_2}+\left(\frac{232}{9}+\frac{40}{9\,\mathrm{Pr}}\right)\frac{\omega_3}{\Theta_3}+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}-1\right)\alpha_0^2\right],$$

$$\frac{b_0}{\Theta_0}\left[\frac{25}{3}\frac{\omega_0}{\Theta_0}-16\frac{\omega_1}{\Theta_1}+12\frac{\omega_2}{\Theta_2}-\frac{16}{3}\frac{\omega_3}{\Theta_3}\right]=$$
$$=\frac{1}{\gamma}\left[\mathrm{Pr}\,m\left(1-\frac{\omega_0}{\Theta_0}-\tau_k\right)+\lambda\left(1-\frac{\omega_0}{\Theta_0}\right)^4\right].$$

§ 3. Начальные условия для аппроксимирующих систем уравнений. Точные решения

Рассмотрим случай

$$U=cx^m,\qquad 0\leqslant m\leqslant 1. \tag{3.1}$$

В малой окрестности $x=0$, согласно преобразованиям (1.2), (1.6), скорость U можно приближенно выразить через безразмерную переменную

$$U\simeq c^{1/(m+1)}(m+1)^{m/(m+1)}s^{m/(m+1)}(V_{\max}\,l)^{m/(m+1)},$$
$$\alpha_0^2\simeq\frac{c^2\left(\frac{m+1}{c}V_{\max}\,ls\right)^{2m/(m+1)}}{V_{\max}^2}, \tag{3.2}$$
$$\beta=\frac{\beta_1}{2s}\frac{1}{(1-\alpha_0^2)},$$

где $\beta_1=2m/(m+1)$. Представим функции Θ_k, ω_k в виде

$$\begin{aligned}\Theta_k&=A_k\sqrt{s},\\ \omega_k&=B_k\sqrt{s}.\end{aligned}\qquad (k=0,1,\ldots,N-1). \tag{3.3}$$

Подставляем выражения (3.2) и (3.3) в аппроксимирующую систему N-го

приближения и умножаем ее на $\sqrt{s}$. При $s \to 0$ мы получим систему N алгебраических уравнений. Величины A_k, B_k, таким образом, определяются из решения этой системы алгебраических уравнений. Когда разложение U начинается с cx^m, в малой окрестности $x = 0$ (т. е. $s = 0$) аппроксимирующие системы имеют решения вида (3.3). Это позволяет нам отойти от особой точки $s = 0$ и потом воспользоваться любым численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Из (2.16) и (3.2) мы имеем

$$\frac{\sqrt{s}}{\gamma} = [c^{1/(m+1)}(m+1)^{m/(m+1)} V_{\max}^{-1} (V_{\max}\, l)^{m/(m+1)} s^{(m-1)/2\,(m+1)} (1-\alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}]^{-1}. \tag{3.4}$$

Устремляя s к нулю, мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \to \frac{1}{\sqrt{2c}\, V_{\max}^{-1/2}\, l^{1/2}} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{при } m = 1, \\ &\frac{\sqrt{s}}{\gamma} \to 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant m < 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, для первого приближения соответствующие системы алгебраических уравнений имеют следующий вид.

1. Случай $U = cx$:

$$\begin{aligned} &\frac{A_0}{2} = 2\frac{m}{\gamma} + \frac{1}{2}[-3A_0 + 2B_0] + 2\frac{\bar{b}_0}{A_0}, \\ &\frac{\bar{b}_0 B_0}{A_0^2} = \frac{1}{\gamma}\left[\Pr m\left(1 - \frac{B_0}{A_0} - \tau_k\right) + \lambda\left(1 - \frac{B_0}{A_0}\right)^4\right]; \end{aligned} \tag{3.6}$$

здесь

$$\bar{b}_0 = \sqrt{1 - \frac{B_0}{A_0}\frac{1+c_1}{1 - B_0/A_0 + c_1}}.$$

2. Случай $U = cx^m$ $(0 < m < 1)$:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{\beta_1}{2}[-3A_0 + 2B_0] + \frac{2\bar{b}_0}{A_0}, \qquad \frac{\bar{b}_0 B_0}{A_0^2} = 0. \tag{3.7}$$

3. Случай $U = c = \text{const}$:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2\bar{b}_0}{A_0}, \qquad \frac{\bar{b}_0 B_0}{A_0^2} = 0. \tag{3.8}$$

Расчет был проведен для случая $U = cx$. При этом в коэффициентах систем алгебраических уравнений величины

$$\frac{m}{\gamma} = \frac{m_0}{\rho_{00}\sqrt{2c\nu_{00}}} = \frac{m_1}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\Pr \varepsilon\sigma T_{00}^3}{\rho_{00}\, c_p \sqrt{2c\nu_{00}}} = \sigma_1, \qquad \tau_k = \frac{T_k}{T_{00}} \tag{3.9}$$

связаны с конкретной расчетной задачей. Рассмотрим обтекание тела с закругленным носиком сверхзвуковым потоком. Перед носиком возникает ударная волна. В качестве примера расчета нами были взяты следующие данные: число Маха $M_\infty = 5$, число Прандтля $\Pr = 0.736$, показатель адиабаты $\varkappa = 1.40$, теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 0.24 \times 4.1855 \cdot 10^7$ *г·град/эрг*, газовая постоянная $R = 2.87039 \cdot 10^6$ *см²/сек·град*, постоянная Стефана — Больцмана $\sigma = 5.6686 \cdot 10^{-5}$ *эрг/см²сек·град⁴*, из-

лучательная способность $\varepsilon = 0.3$, температура вдуваемого воздуха $T_k = 273.16°$ К, параметры стандартной атмосферы на высоте $H = 20\,000$ *м*; температура $T_H = 216.66°$ К, давление $p_H = 55\,269$ бар, коэффициент вязкости $\mu_H = 1.4217 \cdot 10^{-4}$ *пуаз*. Параметры торможения вычисляются по следующим формулам (см. [5]):

$$T_{00} = T_H \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_\infty^2\right), \qquad p_{00} = p_H \frac{\dfrac{2\varkappa}{\varkappa+1} M_\infty^2 - \dfrac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}{\left[\dfrac{4\varkappa}{(\varkappa+1)^2} - \dfrac{2(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)^2}\dfrac{1}{M_\infty^2}\right]^{\varkappa/(\varkappa-1)}},$$

$$\rho_{00} = \frac{p_{00}}{RT_{00}}, \qquad \mu_{00} = \mu_H \left(\frac{T_{00}}{T_H}\right)^{3/2} \frac{T_H + 114}{T_{00} + 114}, \qquad \nu_{00} = \frac{\mu_{00}}{\rho_{00}}. \tag{3.10}$$

В рассматриваемом случае мы получили: $T_{00} = 1299.96°$ К, $p_{00} = 0.18047 \cdot 10^7$ *бар*, $\rho_{00} = 0.48366 \cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}, $\mu_{00} = 0.48863 \cdot 10^{-3}$ *пуаз*,

Таблица 1

m_1	A_k	τ_k	m_1	A_k	τ_k
	A_0=0.88953	τ_0=0.98132		1.17115	0.97130
	A_1=1.11187	τ_1=0.98407		1.42717	0.97482
—0.6	A_2=1.54061	τ_2=0.98723	0.0	1.92542	0.97901
	A_3=2.69115	τ_3=0.99179		3.23325	0.98589
	0.92899	0.98009		1.31653	0.87956
	1.15691	0.98296		1.58777	0.89401
—0.5	1.59662	0.98626	0.1	2.11876	0.91142
	2.77223	0.99111		3.49204	0.94040
	0.97113	0.97872		1.48997	0.79198
	1.20469	0.98170		1.77657	0.81631
—0.4	1.65562	0.98516	0.2	2.34223	0.84617
	2.85675	0.99033		3.78225	0.89654
	1.01618	0.97718		1.69659	0.70987
	1.25539	0.98029		1.99779	0.74292
—0.3	1.71778	0.98392	0.3	2.59858	0.78438
	2.94489	0.98944		4.10326	0.85524
	1.06436	0.97545		1.94192	0.63431
	1.30922	0.97870		2.25548	0.67482
—0.2	1.78332	0.98250	0.4	2.88948	0.72700
	3.03686	0.98842		4.45167	0.81732
	1.11593	0.97350		2.23168	0.56605
	1.36640	0.97689		2.55340	0.61270
—0.1	1.85245	0.98088	0.5	3.21500	0.67471
	3.13289	0.98725		4.82082	0.78335

$\nu_{00} = 1.01027$ *см*^{2}/*сек*. В комбинации параметров m/γ и λ/γ еще входит одна заданная величина c. Нами было взято $c = 10^5$, исходя из того, что при обтекании профиля с закругленным носиком невозмущенная скорость достигается приблизительно в точке, отдаленной по профилю от критической точки на расстояние, равное радиусу носика. На высоте $H = 20.000$ *м* скорость звука $a = 295.07$ *м/сек*. При $M_\infty = 5$ невозмущенная скорость $U_\infty = M_\infty a = 1475.35$ *м/сек*. Предположим, что радиус носика $r = 1$ *см*; тогда

$$U = cx = cr \sim U_\infty, \quad C \sim \frac{U_\infty}{r} = \frac{1475.35}{0.01}\frac{1}{\text{сек}} \sim 10^5 \frac{1}{\text{сек}}.$$

В этом случае имеем $\sigma_1 = 0.01259$. Величина m_1 рассматривается как параметр, характеризующий вдув или отсос. В табл. 1 приводятся значения A_k, τ_k $(\tau_k = 1 - B_k/A_k)$ в соответствии с различными значениями параметра m_1 (в четвертом приближении). Для расчета конкретного случая эти значения можно использовать или непосредственно, или в качестве первоначальных приближений при определении начальных значений путем решения алгебраических уравнений.

Точные решения

Рассмотрим случай $U = cx$. В безразмерной переменной s скорость U выражается в виде

$$U = \sqrt{2cV_{\max} ls}. \tag{3.11}$$

Следовательно,

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{2cls}{V_{\max}}}, \qquad \frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0} = \frac{1}{2s}. \tag{3.12}$$

В этом случае безразмерные уравнения пограничного слоя имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial s} + w\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2s}\frac{\vartheta - u^2}{1-\alpha_0^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left[b(\tau)\frac{\partial u}{\partial t}\right], \qquad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial s} + w\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial t}\left[b(\tau)\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right] - \left(\frac{1}{\Pr} - 1\right)\alpha_0^2\frac{\partial}{\partial t}\left[b(\tau)\frac{\partial u^2}{\partial t}\right],$$

$$u(s, 0) = 0, \qquad w(s, 0) = \frac{m_1}{\sqrt{2s}}, \qquad u(s, \infty) = 1, \qquad \vartheta(s, \infty) = 1, \tag{3.13}$$

$$b(\tau_w)\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\Pr m}{\sqrt{2s}}(\tau_w - \tau_k) + \frac{\sigma_1}{\sqrt{s}}\tau_w^4.$$

Введем новые переменные

$$\zeta = \frac{t}{\sqrt{2s}}, \qquad s = s. \tag{3.14}$$

Представим искомые функции u и ϑ степенными рядами:

$$u = \varphi_0'(\zeta) + s\varphi_1'(\zeta) + s^2\varphi_2'(\zeta) + \cdots,$$
$$\vartheta = \vartheta_0(\zeta) + s\vartheta_1(\zeta) + s^2\vartheta_2(\zeta) + \cdots. \tag{3.15}$$

Подставляем (3.15) и ряды для производных от u, ϑ в (3.13) и умножаем каждое уравнение на $2s$. Потом, устремляя s к нулю и учитывая

$$\vartheta_0 = \tau_w, \tag{3.16}$$

получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$b(\vartheta_0)\varphi_0''' + \left[\varphi_0 + b(\vartheta_0)\left(\frac{1}{2\vartheta_0} - \frac{1}{\vartheta_0 + c_1}\right)\vartheta_0'\right]\varphi_0'' - \varphi_0'^2 + \vartheta_0 = 0,$$
$$b(\vartheta_0)\vartheta_0'' + b(\vartheta_0)\left(\frac{1}{2\vartheta_0} - \frac{1}{\vartheta_0 + c_1}\right)\vartheta_0'^2 + \Pr\varphi_0\vartheta_0' = 0. \tag{3.17}$$

Граничные условия для (3.17) примут вид

$$\varphi_0(0) = -m_1, \qquad \varphi_0'(0) = 0,$$
$$b(\vartheta_0)\left.\frac{\partial \vartheta_0}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = \left[\Pr m_1(\vartheta_0 - \tau_k) + \sqrt{2}\sigma_1\vartheta_0^4\right]_{\zeta=0}, \tag{3.18}$$
$$\varphi_0'(\infty) = 1, \qquad \vartheta_0(\infty) = 1.$$

Краевую задачу (3.17), (3.18) будем численно решать «методом стрельбы» на быстродействующей вычислительной машине. Пробные начальные

Таблица 2

1 приближение	2 приближение	3 приближение	4 приближение	Точные решения
$A_0=1.00555$	$A_0=1.16458$	$A_0=1.17022$	$A_0=1.17115$	$\sqrt{2}/\varphi_0''(0)=$ $=1.17272$
$\tau_0=0.98800$	$\tau_0=0.97588$	$\tau_0=0.97312$	$\tau_0=0.97130$	$\vartheta_0=0.96977$

условия можно задать следующим образом: $\varphi_0''(0)=1.2325877$, $\vartheta_0(0)=0.97$. Значение $\vartheta_0(0)$, как известно, близко к единице. Значение $\varphi_0''(0)$ взято из случая несжимаемой жидкости. Опытным расчетом показано, что достаточно довести вычисление пробного решения до $\zeta=3$ вместо границы $\zeta=\infty$. Был проведен расчет для случая $m_1=0$. В результате расчета получены $\varphi_0''(0)=1.20592$, $\vartheta_0(0)=0.96977$, которые удовлетворяют граничным условиям $\varphi_0'(\infty)=1.00000$, $\vartheta_0(\infty)=1.00000$.

Величины A_0, τ_0 связываются с точными решениями дифференциальных уравнений (3.14) следующими соотношениями:

$$\frac{1}{A_0}=\frac{\varphi_0''(0)}{\sqrt{2}},\qquad \tau_0=\vartheta_0. \tag{3.19}$$

Это позволяет нам оценить точность аппроксимирующих систем. Такое сравнение приведено в табл. 2.

§ 4. Пример расчета пограничного слоя для случая обтекания кругового цилиндра сверхзвуковым потоком

Рассмотрим пограничный слой для случая обтекания кругового цилиндра (радиус $r=1$) сверхзвуковым потоком ($M_\infty>1$). Перед цилиндром возникает ударная волна. Поток вне пограничного слоя можно считать совпадающим с идеальным течением. Так как толщина пограничного слоя очень мала, за скорость U можно взять соответствующую составляющую скорости идеального течения на поверхности цилиндра. Значения α_0, которые приведены в табл. 3, были взяты из работы [6].

Здесь x — расстояние по дуге профиля от передней кромки, отнесенное

Таблица 3

x	α_0	x	α_0	x	α_0
0.0000	0.0000	0.4375	0.229	0.8750	0.441
0.0625	0.0300	0.5000	0.261	0.9375	0.469
0.1250	0.0617	0.5625	0.292	1.0000	0.496
0.1875	0.0952	0.6250	0.323	1.0625	0.522
0.2500	0.129	0.6875	0.354	1.1250	0.547
0.3125	0.163	0.7500	0.383		
0.3750	0.196	0.8125	0.411		

к радиусу цилиндра. При расчете для вычисления $\alpha_0(x)$ и $\alpha_0'(x)$ использованы интерполяционные многочлены Ньютона. В интервале $0<x<0.0625$

функция α_0 вычисляется по формуле

$$\alpha_0 = \frac{0.03}{0.0625} x. \tag{4.1}$$

Начальные значения для искомых величин Θ_k, ω_k в малом интервале $0 < x \leqslant x_0$ вычисляются по формулам

$$\Theta_k = A_k \sqrt{s} = A_k \sqrt{0.24}\, x, \quad \omega_k = B_k \sqrt{s} = B_k \sqrt{0.24}\, x. \quad (0 < x \leqslant x_0). \tag{4.2}$$

Значение x_0 подбирается путем опытного просчета так, чтобы дальнейшее уменьшение x_0 не влияло на результаты с нужной нам точностью.

В каждой из аппроксимирующих систем (например, (2.18) для четвертого приближения) последнее уравнение является алгебраическим уравнением высшей степени. Поскольку система обыкновенных дифференциальных уравнений легко решается на вычислительной машине любым численным методом (особенно удобен метод Рунге — Кутта), мы предпочитаем продифференцировать эти алгебраические уравнения и получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы решить эти системы, будет удобно перейти к переменной x. Безразмерные переменные x и s связаны соотношением

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\alpha_0 (1 - 2_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}} = \frac{1}{\gamma}. \tag{4.3}$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{\dot{\alpha}_0}{\alpha_0 (1 - \alpha_0^2)} = \frac{\alpha_0'}{\gamma \alpha_0 (1 - \alpha_0^2)} \tag{4.4}$$

(штрих обозначает дифференцирование по x). Обозначая

$$\beta_x = \frac{\alpha_0'}{\alpha_0 (1 - \alpha_0^2)},$$

$$H = \left[\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{\Theta_0^2}{(1 - \alpha_0^2)^{(2\varkappa-1)/(\varkappa-1)}} - \frac{\Theta_0^2}{\alpha_0^2 (1 - \alpha_0^2)^{\varkappa/(\varkappa-1)}} \right] \alpha_0',$$

$$F = \begin{cases} \Pr m \left(1 - \frac{\omega_0}{\Theta_0} - \tau_k\right) + \lambda \left(1 - \frac{\omega_0}{\Theta_0}\right)^4 & \text{для вдува,} \\ \lambda \left(1 - \frac{\omega_0}{\Theta_0}\right)^4 & \text{для отсоса,} \end{cases} \tag{4.5}$$

мы выпишем аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для четвертого приближения *:

$$\Theta_0' = 200\, m - \beta_x [97\, \Theta_0 + \cdots] + \gamma \left[940 \frac{b_0}{\Theta_0} - \cdots \right],$$

$$\Theta_1' = \frac{55}{3} m - \beta_x \left[\frac{137}{72} \Theta_0 + \cdots \right] + \gamma \left[\frac{133}{6} \frac{b_0}{\Theta} + \cdots \right],$$

$$\Theta_2' = -30\, m - \beta_x \left[-\frac{37}{2} \Theta_0 - \cdots \right] + \gamma \left[-\frac{532}{3} \frac{b_0}{\Theta_0} + \cdots \right],$$

$$\Theta_3' = 35\, m - \beta_x \left[\frac{177}{8} \Theta_0 + \cdots \right] + \gamma \left[\frac{443}{2} \frac{b_0}{A_0} + \cdots \right],$$

$$\Phi_1' = 144\, m \frac{\omega_0}{\Theta_0} + \beta_x \left[-\frac{252}{5} \omega_0 - \cdots \right] + \gamma \{ \cdots \},$$

$$\Phi_2' = \frac{45}{2} m \frac{\omega_0}{\Theta_0} + \beta_x \left[-\frac{65}{12} \omega_0 - \cdots \right] + \gamma \{ \cdots \}, \tag{4.6}$$

* В фигурных скобках точки выражают такие же члены, какие имеет и система (2.18) в соответствующих местах

$$\omega_2' = -15\,m\,\frac{\omega_0}{\Theta_0} + \beta_x\left[\frac{17}{2}\,\omega_0 + \cdots\right] + \gamma\,\{\cdots\}.$$

$$\omega_0' = \frac{1}{K_4}\left\{\left[b_0\left(\frac{5}{6}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_3} - \frac{5}{2}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_1}\right) + K_4\right]\frac{\omega_0}{\Theta_0}\,\Theta_0' + HF + b_0\left[\left(\frac{25}{3}\,\frac{\omega_0}{\Theta_0} - 16\,\frac{\omega_1}{\Theta_1} + \right.\right.\right.$$
$$\left. + 12\,\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \frac{16}{3}\,\frac{\omega_3}{\Theta_3}\right)\Theta_0' + 16\left(\Phi_2' + \frac{5}{32}\,\Phi_1' - \frac{\omega_1}{\Theta_1}\,\Theta_1'\right)\frac{\Theta_0}{\Theta_1} -$$
$$\left.\left. - 12\,\frac{\Theta_0}{\Theta_2}\left(\omega_2' - \frac{\omega_2}{\Theta_2}\,\Theta_2'\right) - \frac{\Theta_0}{\Theta_3}\left(\frac{5}{6}\,\Phi_1' + \frac{16}{3}\,\frac{\omega_3}{\Theta_3}\,\Theta_3'\right)\right]\right\},$$

где

$$\Phi_1 = \omega_0 - \frac{32}{5}\,\omega_3, \qquad \Phi_2 = \omega_1 + \omega_3,$$

$$K_4 = \begin{cases} b_0\left[\left(\frac{25}{3} + \frac{5}{2}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_1} - \frac{5}{6}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_3}\right) - \left(\frac{25}{3}\,\frac{\omega_0}{\Theta_0} - 16\,\frac{\omega_1}{\Theta_1} + 12\,\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \frac{16}{3}\,\frac{\omega_3}{\Theta_3}\right)\times\right. \\ \qquad \left.\times\left(\frac{1}{2\,(1-\omega_0/\Theta_0)} - \frac{1}{1-\omega_0/\Theta_0 + c_1}\right)\right] + \\ \qquad + \frac{\Theta_0}{\gamma}\left[\mathrm{Pr}\,m + 4\lambda\left(1 - \frac{\omega_0}{\Theta_0}\right)^3\right] \qquad \text{для вдува,} \\ b_0\left[\left(\frac{25}{3} + \frac{5}{2}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_1} - \frac{5}{6}\,\frac{\Theta_0}{\Theta_3}\right) - \left(\frac{25}{3}\,\frac{\omega_0}{\Theta_0} - 16\,\frac{\omega_1}{\Theta_1} + 12\,\frac{\omega_2}{\Theta_2} - \frac{16}{3}\,\frac{\omega_3}{\Theta_3}\right)\times\right. \\ \left.\times\left(\frac{1}{2\,(1-\omega_0/\Theta_0)} - \frac{1}{1-\omega_0/\Theta_0 + c_1}\right)\right] + \frac{\Theta_0}{\gamma}\,4\lambda\left(1 - \frac{\omega_0}{\Theta_0}\right)^3 \quad \text{для отсоса.} \end{cases}$$

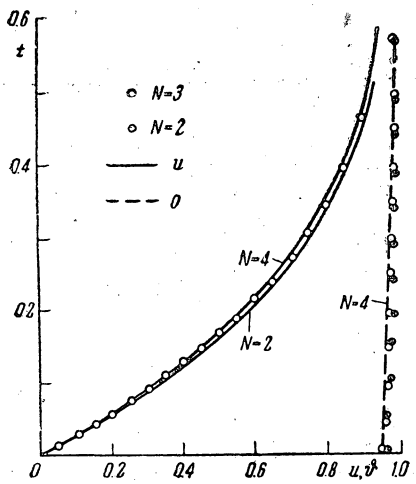
Расчеты проведены при $\lambda = 0.0178$; $m = -0.1, 0.0, 0.1$. При вычислении начальных значений для Θ_k, ω_k по формулам (4.2) было взято $x_0 = 0.001$, что обеспечивает точность до пяти знаков. При численном решении аппроксимирующих уравнений методом Рунге — Кутта шаг выбирался следующим образом: в начале вычисления при $x_0 = 0.001$, $h = 0.5\cdot10^{-4}$

Таблица 4

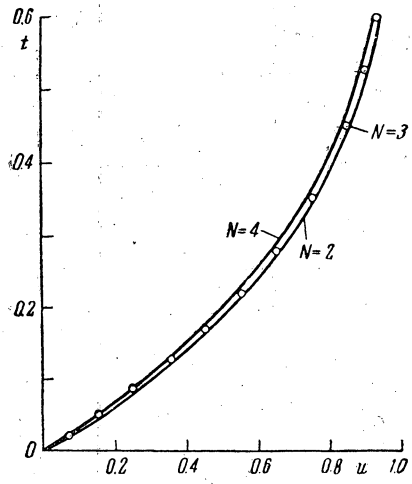
x	1 приближение	2 приближение	3 приближение	4 приближение
0.001	$\Theta_0 = 0.4938\cdot10^{-3}$ $\vartheta_0 = 0.9830$	$0.5741\cdot10^{-3}$ 0.9675	$0.5775\cdot10^{-3}$ 0.9628	$0.5782\cdot10^{-3}$ 0.9604
0.01	$0.4937\cdot10^{-2}$ 0.9830	$0.5741\cdot10^{-2}$ 0.9675	$0.5774\cdot10^{-2}$ 0.9628	$0.5782\cdot10^{-2}$ 0.9604
0.1	$0.4876\cdot10^{-1}$ 0.9834	$0.5652\cdot10^{-1}$ 0.9672	$0.5685\cdot10^{-1}$ 0.9627	$0.5693\cdot10^{-1}$ 0.9603
0.2	$0.9733\cdot10^{-1}$ 0.9836	0.1128 0.9662	0.1134 0.9622	0.1135 0.9598
0.4	0.1897 0.9825	0.2179 0.9583	0.2192 0.9565	0.2194 0.9542
0.6	0.2636 0.9803	0.2990 0.9441	0.3004 0.9462	0.3008 0.9441
0.8	0.3124 0.9769	0.3501 0.9245	0.3503 0.9324	0.3508 0.9303
1.0	0.3280 0.9721	0.3590 0.8972	0.3594 0.9149	0.3601 0.9049

для первого и второго приближений, $h = 0.5\cdot10^{-5}$ для третьего приближения, $h = 0.1\cdot10^{-5}$ для четвертого приближения. Такой выбор шага обеспечивает получение численных решений с шестью верными знаками. В дальнейшем вычислении шаг можно постепенно увеличивать.

В табл. 4 приводятся результаты различных приближений функций Θ_0, ϑ_0 для параметра $m = 0$. На фиг. 1 и 2 изображены профили величин u



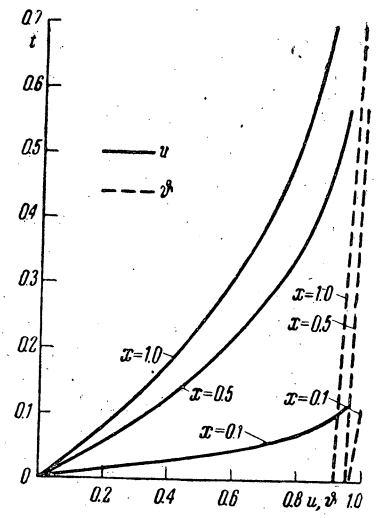
Фиг. 1



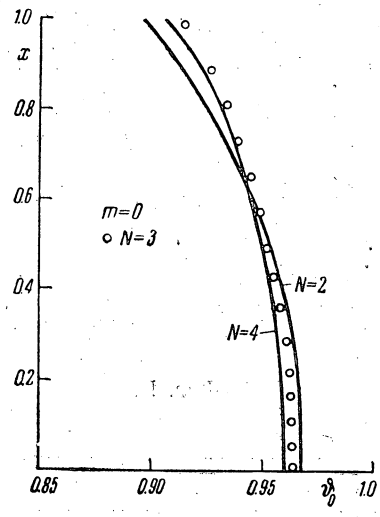
Фиг. 2

Таблица 5

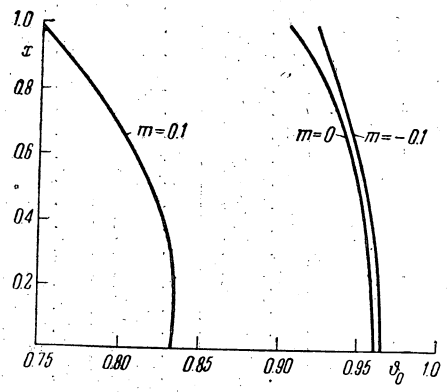
x	$m=-0.1$	$m=0.0$	$m=0.1$	x	$m=-0.1$	$m=0.0$	$m=0.1$
	$\Theta_0=0.5389\cdot10^{-3}$	$0.5782\cdot10^{-3}$	$0.6843\cdot10^{-3}$		0.2464	0.2654	0.3169
	$\Theta_1=0.6609\cdot10^{-3}$	$0.7042\cdot10^{-3}$	$0.8209\cdot10^{-3}$		0.3053	0.3265	0.3837
	$\Theta_2=0.8973\cdot10^{-3}$	$0.9494\cdot10^{-3}$	$0.1089\cdot10^{-2}$		0.4197	0.4454	0.5149
	$\Theta_3=0.1520\cdot10^{-2}$	$0.1592\cdot10^{-2}$	$0.1778\cdot10^{-2}$		0.7232	0.7590	0.8530
0.001	$\vartheta_0=0.9645$	0.9604	0.8339	0.5	0.9541	0.9496	0.8188
	$\vartheta_1=0.9691$	0.9645	0.8536		0.9599	0.9557	0.8405
	$\vartheta_2=0.9745$	0.9710	0.8776		0.9687	0.9649	0.8688
	$\vartheta_3=0.9831$	0.9806	0.9177		0.9814	0.9787	0.9140
	$0.5389\cdot10^{-2}$	$0.5782\cdot10^{-2}$	$0.6843\cdot10^{-2}$		0.2781	0.3008	0.3621
	$0.6609\cdot10^{-2}$	$0.7072\cdot10^{-2}$	$0.8208\cdot10^{-2}$		0.3471	0.3725	0.4414
	$0.6973\cdot10^{-2}$	$0.9494\cdot10^{-2}$	$0.1089\cdot10^{-1}$		0.4815	0.5128	0.5972
	$0.1520\cdot10^{-1}$	$0.1592\cdot10^{-1}$	$0.1778\cdot10^{-1}$		0.8380	0.8820	0.9968
01	0.9645	0.9604	0.8339	0.6	0.9490	0.9441	0.8084
	0.9691	0.9654	0.8536		0.9554	0.9508	0.8315
	0.9745	0.9711	0.8776		0.9658	0.9616	0.8623
	0.9831	0.9806	0.9177		0.9804	0.9774	0.9109
	$0.5314\cdot10^{-1}$	$0.5693\cdot10^{-1}$	$0.6725\cdot10^{-1}$		0.3025	0.3288	0.4000
	$0.6525\cdot10^{-1}$	$0.6944\cdot10^{-1}$	$0.8087\cdot10^{-1}$		0.3789	0.4084	0.4884
	$0.8878\cdot10^{-1}$	$0.9385\cdot10^{-1}$	0.1077		0.5282	0.5646	0.6636
	0.1510	0.1580	0.1767		0.9293	0.9810	1.1175
0.1	0.9644	0.9603	0.8346	0.7	0.9430	0.9376	0.7962
	0.9690	0.9651	0.8538		0.9501	0.9450	0.8210
	0.9743	0.9709	0.8773		0.9622	0.9576	0.8545
	0.9830	0.9804	0.9174		0.9791	0.9758	0.9066
	0.1061	0.1135	0.1338		0.3207	0.3508	0.4327
	0.1304	0.1386	0.1611		0.4058	0.4401	0.5332
	0.1776	0.1875	0.2148		0.5713	0.6137	0.7284
	0.3024	0.3163	0.3532		1.0137	1.0737	1.2307
0.2	0.9638	0.9598	0.8356	0.8	0.9363	0.9303	0.7817
	0.9684	0.9646	0.8547		0.9443	0.9386	0.8086
	0.9741	0.9707	0.8782		0.9584	0.9533	0.8457
	0.9830	0.9805	0.9178		0.9778	0.9741	0.9024
	0.1576	0.1688	0.1992		0.3227	0.3548	0.4436
	0.1940	0.2063	0.2401		0.4107	0.4474	0.5488
	0.2645	0.2795	0.3205		0.5854	0.6323	0.7622
	0.4515	0.4723	0.5279		1.0622	1.1315	1.3163
0.3	0.9617	0.9577	0.8329	0.9	0.9288	0.9220	0.7656
	0.9666	0.9628	0.8525		0.9376	0.9311	0.7943
	0.9730	0.9695	0.8769		0.9527	0.9480	0.8347
	0.9828	0.9802	0.9175		0.9759	0.9712	0.8961
	0.2045	0.2194	0.2601		0.3243	0.3601	0.4591
	0.2527	0.2693	0.3146		0.4162	0.4574	0.5713
	0.3465	0.3668	0.4220		0.5984	0.6507	0.7961
	0.5944	0.6228	0.6975		1.1002	1.1774	1.3846
0.4	0.9585	0.9542	0.8270	1.0	0.9206	0.9049	0.7408
	0.9637	0.9597	0.8475		0.9304	0.9231	0.7783
	0.9712	0.9676	0.8736		0.9489	0.9424	0.8229
	0.9823	0.9796	0.9163		0.9740	0.9693	0.8897



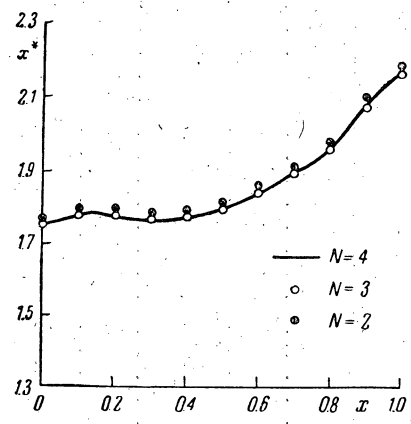
Фиг. 3



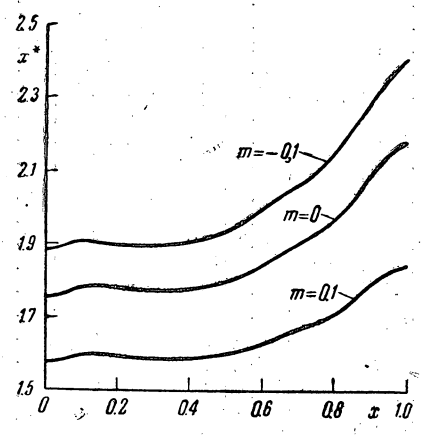
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

и ϑ в пограничном слое в точке $x = 0.5$ в различных приближениях, соответственно, для параметра $m = 0$ и $m = 0.1$. На фиг. 3 показано распределение температуры по цилиндру в различных приближениях (ϑ_0 — абсолютная температура на стенке, отнесенная к температуре торможения). Эти результаты показывают точность вычисления и хорошую сходимость метода.

На фиг. 4 изображены профили u и ϑ при различных значениях x для параметра $m = 0$. На фиг. 5 приведено распределение температуры по цилиндру в соответствии с различными значениями параметра m. На фиг. 6 представлено распределение коэффициента трения

$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho U^2} = \frac{2\sqrt{\nu_{00}}}{\sqrt{V_{\max}\, l}}\,(1-\alpha_0^2)\, b\,(\tau_w)\,\frac{1}{\Theta_0}.$$

в различных приближениях (приведена величина $x^* = xc_f\sqrt{V_{\max}\, l}/2\sqrt{\nu_{00}}$). Та же величина x^* для различных значений параметра m в четвертом приближении приведена на фиг. 7. Вычисленные значения функций Θ_k, ϑ_k в четвертом приближении для различных значений параметра m приводятся в табл. 5.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А. А. Дородницыну за руководство при выполнении этой работы и Ю. Н. Павловскому за ценные советы.

Поступила в редакцию
19.05.1962

Цитированная литература

1. Лю Шэнь-цюань. Расчет ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости при наличии отсоса или вдува. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 4, 666—683.
2. А. А. Дородницын. Об одном методе решения уравнения ламинарного слоя. Прикл. механ. и техн. физ., 1960, № 3, 111—118.
3. А. А. Дородницын. Ламинарный пограничный слой в сжимаемом газе. Сб. теоретических работ по аэродинамике. М., Оборонгиз, 1957, 140—173.
4. Ю. Н. Павловский. Численный расчет ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 5, 884—901.
5. С. А. Христианович, В. Г. Гальперин, М. Д. Миллионщиков, Л. А. Симонов. Прикладная газовая динамика. М., Изд-во Моск. механ. ин-та, 1947.
6. О. М. Белоцерковский. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. В сб. «Вычисл. матем». № 3. М., Изд-во АН СССР, 1958, 149—185.