ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 1997, том 37, № 8, с. 908–913

УДК 519.642.8

АТТРАКТОРЫ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ[1)]

© 1997 г. А. Ф. Измаилов

(Москва)

Поступила в редакцию 19.03.96 г.
Переработанный вариант 16.05.96 г.

Рассматриваются некоторые вопросы поведения итерационных процессов при наличии неубывающих помех. Получены выражения для аттракторов метода Ньютона.

1. Пусть U – произвольное множество. Под (*одношаговым*) *итерационным процессом* на множестве U понимается пара (W, G), состоящая из множества $W \subset U$ и отображения $G\colon \mathbb{Z}_+ \times W \longrightarrow U$. Последовательность $\{x^k\} \subset U$, удовлетворяющая условиям

$$x^0 \in W, \quad x^{k+1} = G(k, x^k), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

называется траекторией итерационного процесса (W, G). Ясно, что заданная точка $x^0 \in W$ корректно определяет траекторию тогда и только тогда, когда

$$G(k-1, G(k-2, \ldots, G(0, x^0)\ldots)) \in W \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В связи с этим иногда [1] под итерационным процессом понимают тройку (W, G, W_0), где $W_0 \subset W$ – множество начальных точек, корректно определяющих траектории. Кроме того, иногда бывает продуктивным рассмотрение многозначных итерационных отображений G (см. [2]). Однако для наших целей вполне удобна введенная терминология. Множество всех точек $x^0 \in W$, удовлетворяющих (1), обозначим $W_0(W, G)$.

Пусть теперь (U, ρ) – метрическое пространство. Замкнутое множество $A \subset U$ называется *аттрактором* (*ρ-аттрактором, множеством притяжения*) итерационного процесса (W, G) на U, если существует открытое множество W_0 в (U, ρ) такое, что

$$A \subset W_0 \subset W_0(W, G)$$

и любая точка $x^0 \in W_0$ определяет траекторию $\{x^k\}$ процесса (W, G), удовлетворяющую условию

$$\rho(x^k, A) = \inf\{\rho(x^k, x) \,|\, x \in A\} \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Множество W_0 при этом называется *стягивающейся областью* аттрактора A.

Отыскание аттракторов – важнейший момент исследования итерационных процессов. Для традиционных рассмотрений (при отсутствии помех либо когда помехи могут считаться бесконечно малыми при $k \longrightarrow \infty$) характерно выделение одноточечных аттракторов (т.е., в стандартной терминологии [1], *точек притяжения* итерационных процессов). В общем же случае влияние неопределенных неубывающих помех может приводить к существенному искажению аттрактора. При этом обычно речь идет о выделении как можно более узкого аттрактора (и его стягивающейся области), содержащего точку притяжения исходного невозмущенного процесса. Именно "размер" такого аттрактора служит характеристикой помехоустойчивости исходного процесса.

2. Пусть $B_U(\bar{x}, \delta)$ – открытый шар в метрическом пространстве (U, ρ) с центром в точке $\bar{x} \in U$, радиуса $\delta > 0$ (в случае $\delta = \infty$ формально полагаем $B_U(\bar{x}, \delta) = U$).

При анализе итерационных процессов ньютоновского типа весьма удобен следующий результат (ср. с леммой 1 из [3, гл. 2, § 2] и построениями в [4, с. 42]).

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 95-01-00126 и 96-01-00288).

Теорема 1. *Пусть для некоторого итерационного процесса* (W, G) *на метрическом пространстве* (U, ρ) *и некоторой точки* $\bar{x} \in U$ *существуют числа* $\delta \in (\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$, $q \in [0, 1)$ *и* $\chi \geq 0$ *такие, что*

$$B_U(\bar{x}, \delta) \subset W, \tag{2}$$

$$\rho(G(k, x), \bar{x}) \leq q\rho(x, \bar{x}) + \chi \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall x \in B_U(\bar{x}, \delta) \tag{3}$$

и (в случае конечного δ*)*

$$\chi/(1-q) < \delta. \tag{4}$$

Тогда любая точка $x^0 \in B_U(\bar{x}, \delta)$ *корректно определяет траекторию* $\{x^k\}$ *итерационного процесса* (W, G), *удовлетворяющую условиям*

$$x^k \in B_U(\bar{x}, \delta) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$\rho(x^k, \bar{x}) \leq q^k\rho(x^0, \bar{x}) + \chi(1-q^k)/(1-q) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x^k, \bar{x}) \leq \chi/(1-q). \tag{7}$$

Доказательство для случая конечного δ проведем индукцией по номеру k.

Пусть $x_0 \in B_U(\bar{x}, \delta)$, тогда, в силу (2), корректно определена точка $x^1 = G(0, x^0)$, причем, в силу (3),

$$\rho(x^1, \bar{x}) \leq q\rho(x^0, \bar{x}) + \chi.$$

Это и есть (6) при $k = 1$. Отсюда, учитывая (4), получаем

$$\rho(x^1, \bar{x}) \leq q\delta + \chi < \delta,$$

что дает (5) при $k = 1$.

Пусть наше утверждение верно при $k = l \in \mathbb{N}$. А именно, пусть при $k = l$ выполнены соотношения (5), (6). Тогда, в силу (2), корректно определена точка $x^{l+1} = G(l, x^l)$, причем, в силу (3),

$$\rho(x^{l+1}, \bar{x}) \leq q\rho(x^l, \bar{x}) + \chi \leq q\left(q^l\rho(x^0, \bar{x}) + \chi\sum_{i=0}^{l-1} q^i\right) + \chi = q^{l+1}\rho(x^0, \bar{x}) + \chi\sum_{i=0}^{l} q^i.$$

Это и есть (6) при $k = l + 1$. Отсюда с учетом условий $q \in [0, 1)$ и (4) следует, что

$$\rho(x^{l+1}, \bar{x}) \leq q^{l+1}\delta + \chi(1-q^{l+1})/(1-q) = q^{l+1}(\delta - \chi/(1-q)) + \chi/(1-q) \leq$$
$$\leq q(\delta - \chi/(1-q)) + \chi/(1-q) = q\delta + \chi < \delta,$$

что дает (5) при $k = l + 1$. Индукция завершена.

Оценка (7) немедленно следует из (6) и условия $q \in [0, 1)$.

Если $\delta = \infty$, то, в силу (2), $W_0(W, G) = W = U = B_U(\bar{x}, \delta)$. Соотношение (5) при этом становится тривиальным и в проверке не нуждается. В остальном доказательство полностью аналогично случаю конечного δ. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 $\chi = 0$, то, в силу (7), $\bar{x}$ – точка притяжения итерационного процесса (W, G). Пусть $\chi > 0$ и $U \subset X$, X – линейное нормированное пространство, а метрика ρ на U порождена нормой $\|\cdot\|$ пространства X. Фиксируем $x^0 \in B_U(\bar{x}, \delta)$. Без ограничения общности считаем, что определяемая точкой x^0 траектория $\{x^k\}$ лежит целиком вне шара $\bar{B}_U(\bar{x}, \chi/(1-q))$; тогда, в силу (7),

$$\rho(x^k, \bar{B}_U(\bar{x}, \chi/(1-q))) = \rho(x^k, \bar{x}) - \chi/(1-q) \longrightarrow 0, \quad k \longrightarrow \infty.$$

Отсюда вытекает, что $\bar{B}_U(\bar{x}, \chi/(1-q))$ – аттрактор итерационного процесса (W, G) (черта означает замыкание), а соответствующей стягивающейся областью является $B_U(\bar{x}, \delta)$. Оценка (6) характеризует скорость сходимости траекторий процесса к такому аттрактору:

$$\rho(x^k, \bar{B}_U(\bar{x}, \chi/(1-q))) \le q^k \rho(x^0, \bar{x}) + \chi(1-q^k)/(1-q) - \chi/(1-q) \le$$
$$\le q^k(\rho(x^0, \bar{x}) - \chi/(1-q)) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

т.е. гарантирована сходимость со скоростью геометрической прогрессии.

3. В качестве очевидного приложения теоремы 1 приведем следующее обобщение известной теоремы Островского [1], [4].

Теорема 2. *Пусть* $W \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \operatorname{int} W$ – *неподвижная точка отображения* $G_1\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *причем отображение* G_1 *дифференцируемо в точке* $\bar{x}$ *и его производная* $G_1'(\bar{x})$ *имеет спектральный радиус* $\sigma < 1$.

Тогда для всякого числа $\varepsilon \in (0, 1-\sigma)$ *найдутся (зависящие от* ε!) *норма* $\|\cdot\|$ *в* $\mathbb{R}^n$ *и числа* $\bar{\chi} > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что для любого отображения* $G_2\colon \mathbb{Z}_+ \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющего условию*

$$\chi(G_2) = \sup\{\|G_2(k, x)\| \,|\, k \in \mathbb{Z}_+, x \in W\} \le \bar{\chi}, \tag{8}$$

любая точка $x^0 \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta)$ *корректно определяет траекторию* $\{x^k\}$ *итерационного процесса* $(W, G_1 + G_2)$, *удовлетворяющую условиям*

$$\|x^k - \bar{x}\| \le (\sigma+\varepsilon)^k \|x^0 - \bar{x}\| + \chi(G_2)(1-(\sigma+\varepsilon)^k)/[1-(\sigma+\varepsilon)] \quad \forall k \in \mathbb{N},$$
$$\varlimsup_{k \to \infty} \|x^k - \bar{x}\| \le \chi(G_2)/[1-(\sigma+\varepsilon)].$$

Здесь шар $B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta)$ *записан в метрике, порожденной указанной нормой на* $\mathbb{R}^n$, *а отображение* $G_1 + G_2\colon \mathbb{Z}_+ \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *определяется формулой* $(G_1 + G_2)(k, x) = G_1(x) + G_2(k, x)$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0, 1-\sigma)$. В соответствии с теоремой 2.2.8 из [1] найдется норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\|G_1'(\bar{x})\| = \sigma + \varepsilon/2. \tag{9}$$

Кроме того, условие дифференцируемости отображения G_1 в точке $\bar{x} \in \operatorname{int} W$ гарантирует существование числа $\delta > 0$ такого, что

$$B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta) \subset W, \tag{10}$$
$$\|G_1(x) - G_1(\bar{x}) - G_1'(\bar{x})(x - \bar{x})\| \le \varepsilon\|x - \bar{x}\|/2 \quad \forall x \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta).$$

Тогда, учитывая (9), а также тот факт, что $\bar{x}$ – неподвижная точка G_1, имеем

$$\|G_1(x) - \bar{x}\| \le (\sigma+\varepsilon)\|x - \bar{x}\| \quad \forall x \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta). \tag{11}$$

Выберем число $\bar{\chi} > 0$ из условия

$$\bar{\chi}/[1-(\sigma+\varepsilon)] < \delta; \tag{12}$$

тогда для любого отображения $G_2\colon \mathbb{Z}_+ \times W \longrightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего (8), в силу (11), (12) имеем

$$\|G_1(x) + G_2(k, x) - \bar{x}\| \le (\sigma+\varepsilon)\|x - \bar{x}\| + \chi(G_2) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall x \in B_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, \delta), \tag{13}$$

$$\chi(G_2)/[1-(\sigma+\varepsilon)] < \delta. \tag{14}$$

Условия (10), (13), (14) позволяют применить к итерационному процессу $(W, G_1 + G_2)$ теорему 1 при $q = \sigma + \varepsilon$, $\chi = \chi(G_2)$, что и дает требуемое. Теорема доказана.

Замечание 2. Применение теоремы 2 к отображению $G_2(\cdot) \equiv 0$ дает теорему Островского [1]. В этом случае $\bar{x}$ – точка притяжения итерационного процесса (W, G_1). В общем случае отображение G_2 описывает помеху, возмущающую исходный процесс (W, G_1). Используя эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$, в метрике, порожденной некоторой стандартной нормой $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$, можем переформулировать результат теоремы 2 так: в ее условиях найдется число $\bar{\chi} > 0$ такое, что для любого отображения G_2, удовлетворяющего (8), итерационный процесс $(W, G_1 + G_2)$ имеет аттрактор вида $\bar{B}_{\mathbb{R}^n}(\bar{x}, K\chi(G_2))$, где $K > 0$ – не зависящее от G_2 число.

Ниже приводятся результаты об искажении аттрактора итерационного процесса Ньютона. При этом используется теорема 1, поскольку она дает несколько более точные оценки, чем теорема 2.

4. Пусть X и Y – банаховы пространства, U – открытое множество в X, метрика на X порождена нормой. Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0, \tag{15}$$

где $F: U \longrightarrow Y$ – дифференцируемое по Фреше на U отображение.

Пусть $\bar{x} \in U$ – решение уравнения (15).

Пусть существует число $\nu > 0$ такое, что верно следующее:

1) $B_X(\bar{x}, \nu) \subset U$;

2) $F \in C^{1,1}(B_X(\bar{x}, \nu) \longrightarrow Y)$ с константой Липшица $L > 0$;

будем предполагать, что оператор $F'(\bar{x})$ непрерывно обратим, тогда можно считать, что

3) $\|\{F'(x)\}^{-1}\| \le C \quad \forall x \in B_X(\bar{x}, \nu)$, где $C > 0$ – некоторое число.

Итерационный процесс (W, G) метода Ньютона зададим формулами

$$W = \{x \in U \mid F'(x) \text{ – непрерывно обратимый оператор}\}, \tag{16}$$

$$G(k, x) = x - (\{F'(x)\}^{-1}F(x) + D_\Sigma(k, x)). \tag{17}$$

Здесь, следуя [2], [3], мы ввели отображение $D_\Sigma: \mathbb{Z}_+ \times U \longrightarrow X$, описывающее суммарную погрешность вычисления $\{F'(\cdot)\}^{-1}F(\cdot)$ на k-й итерации:

$$\|D_\Sigma(k, x)\| \le \Delta_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall x \in U, \tag{18}$$

где $\Delta_\Sigma \ge 0$ – некоторое число (*уровень помех*).

Тогда

$$\|G(k, x) - \bar{x}\| \le \left\|x - \{F'(x)\}^{-1}F(x) - \bar{x}\right\| + \|D_\Sigma(k, x)\| \le CL\|x - \bar{x}\|^2 + \Delta_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \ \forall x \in B_X(\bar{x}, \nu). \tag{19}$$

Фиксируем число $\delta \in (0, \nu]$ такое, что $CL\delta < 1$; тогда в силу условий 1) и 3) имеем

$$B_X(\bar{x}, \delta) \subset W, \tag{20}$$

а в силу (19)

$$\|G(k, x) - \bar{x}\| \le CL\delta\|x - \bar{x}\| + \Delta_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall x \in B_X(\bar{x}, \delta), \tag{21}$$

причем $CL\delta \in (0, 1)$.

Соотношения (20), (21) позволяют воспользоваться теоремой 1 при $q = CL\delta$, $\chi = \Delta_\Sigma$.

Теорема 3. *В сделанных предположениях для любых чисел* $\delta \in (0, \nu]$ *и* $\Delta_\Sigma \ge 0$ *таких, что*

$$CL\delta < 1, \tag{22}$$

$$\Delta_\Sigma/(1 - CL\delta) < \delta, \tag{23}$$

любая точка $x_0 \in B_X(\bar{x}, \delta)$ *корректно определяет траекторию* $\{x^k\} \subset B_X(\bar{x}, \delta)$ *итерационного процесса* (W, G), *заданного формулами* (16)–(18), *причем*

$$\left\|x^{k+1} - \bar{x}\right\| \le CL\left\|x^k - \bar{x}\right\|^2 + \Delta_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

$$\left\|x^k - \bar{x}\right\| \le (CL\delta)^k\left\|x^0 - \bar{x}\right\| + \Delta_\Sigma(1 - (CL\delta)^k)/(1 - CL\delta) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

$$\varlimsup_{k \to \infty}\left\|x^k - \bar{x}\right\| \le \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta). \tag{26}$$

Замечание 3. Если отображение F линейно, то $L = 0$ и оценка (26) является "точной".

Элементарный анализ показывает, что система неравенств (22), (23) относительно δ имеет решение на $(0, \nu]$ тогда и только тогда, когда

$$\Delta_\Sigma < 1/(4CL), \tag{27}$$

$$(1 - \sqrt{1 - 4CL\Delta_\Sigma})/(2CL) < \nu. \tag{28}$$

Таким образом, если число $\Delta_\Sigma \geq 0$ удовлетворяет неравенствам (27), (28), то, в силу замечания 1, рассматриваемый итерационный процесс имеет семейство аттракторов вида $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta))$, которым соответствуют стягивающиеся области $B_X(\bar{x}, \delta)$, $\delta \in \mathfrak{D} = (\delta_-, \delta_+) \cap (-\infty, \nu]$, где $\delta_\pm = (1 \pm \pm \sqrt{1 - 4CL\Delta_\Sigma})/(2CL)$ – корни уравнения $\Delta_\Sigma = (1 - CL\delta)\delta$. Может возникнуть впечатление, что качество начального приближения (величина $\delta \in \mathfrak{D}$) влияет на итоговую погрешность, однако это не так.

Фиксируем число $\Delta_\Sigma \geq 0$, удовлетворяющее неравенствам (27), (28), число $\delta \in \mathfrak{D}$ и определим числовую последовательность $\{\delta_i\}$ формулами

$$\delta_0 = \delta, \quad \delta_{i+1} = 0.5[\Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_i) + \delta_i], \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{29}$$

Используя определение множества $\mathfrak{D}$, нетрудно проверить, что формула (29) корректно определяет монотонно убывающую последовательность $\{\delta_i\} \subset \mathfrak{D}$, причем

$$\delta_{i+1} > \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}_+. \tag{30}$$

Такая последовательность $\{\delta_i\}$ сходится, и предельный переход во втором равенстве в (29) дает

$$\lim_{i \to \infty} \delta_i = \delta_-. \tag{31}$$

Фиксируем точку $x^0 \in B_X(\bar{x}, \delta)$ и рассмотрим определяемую ею траекторию $\{x^k\}$. В силу сказанного выше, эта траектория притягивается к множеству $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta))$, а значит, в силу (29), (30), $x^k \in B_X(\bar{x}, \delta_1)$ для любого достаточно большого $k \in \mathbb{N}$. Но тогда эта траектория притягивается к множеству $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_1))$. Продолжая это рассуждение, получаем, что траектория $\{x^k\}$ притягивается к каждому из множеств $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_i))$, $i \in \mathbb{Z}_+$, а значит, с учетом (31), и к множеству $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_-))$. Тем самым доказано

Следствие. В сделанных предположениях для любого числа $\Delta_\Sigma \geq 0$, удовлетворяющего условиям (27), (28), итерационный процесс (W, G), заданный формулами (16)–(18), имеет аттрактор вида $\bar{B}_X(\bar{x}, \Delta_\Sigma/(1 - CL\delta_-)) = \bar{B}_X(\bar{x}, \delta_-) = \bar{B}_X(\bar{x}, 2\Delta_\Sigma/(1 + \sqrt{1 - 4CL\Delta_\Sigma}))$, стягивающейся областью которого является любой шар $B_X(\bar{x}, \delta)$, $\delta \in \mathfrak{D}$.

Замечания. 4. Очевидно, $\delta_- = \delta_-(\Delta_\Sigma) = \Delta_\Sigma + CL\Delta_\Sigma^2 + o(\Delta_\Sigma^2)$, и полученное в следствии 2 выражение для аттрактора точнее соответствующего результата в [2] (по крайней мере, при малых $\Delta_\Sigma \geq 0$; отличие разложений наблюдается в коэффициентах при Δ_Σ^2).

5. Оценка (24) в теореме 1 позволяет более точно, нежели оценка (25), охарактеризовать скорость сходимости траекторий рассматриваемого итерационного процесса к аттрактору. Фиксируем $x^0 \in B_U(\bar{x}, \delta)$, $\delta \in \mathfrak{D}$. Будем считать, что определяемая точкой x^0 траектория $\{x^k\}$ лежит целиком вне шара $\bar{B}_X(\bar{x}, \delta)$; тогда, в силу (24) и определения числа δ_-,

$$\rho(x^{k+1}, \bar{B}_x(\bar{x}, \delta_-)) = \|x^{k+1} - \bar{x}\| - \delta_- \leq CL\|x^k - \bar{x}\|^2 + \Delta_\Sigma - \delta_- = CL(\rho(x^k, \bar{B}_X(\bar{x}, \delta_-)) + \delta_-)^2 + \Delta_\Sigma - \delta_- =$$
$$= CL(\rho(x^k, \bar{B}_X(\bar{x}, \delta_-))^2 + 2CL\delta_-\rho(x^k, \bar{B}_X(\bar{x}, \delta_-) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Таким образом, можно гарантировать сходимость с линейной скоростью, причем, с учетом замечания 4, при $\Delta_\Sigma \longrightarrow 0+$ скорость сходимости возрастает, в пределе становясь квадратичной.

Указанные эффекты подтверждаются вычислительным экспериментом.

Аналогичный анализ может быть проведен и для других итерационных процессов ньютоновского типа (для метода хорд, квазиньютоновских методов и т.п.).

В заключение автор выражает признательность С.К. Завриеву за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.
2. *Завриев С.К.* Помехоустойчивость методов нелинейной оптимизации: Дис. … д-ра физ.-матем. наук (в форме научного доклада). М.: ИПК РАН, 1992.
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
4. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.