



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина, О вычислении некоторых особых рядов,
Чебышевский сб., 2011, том 12, выпуск 4, 85–92

<https://www.mathnet.ru/cheb111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 11:07:05



ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ
РЯДОВ

С. А. Гриценко, Н. Н. Мотькина (г. Белгород)

Посвящается 60-летию В.Н. Чубарикова

Аннотация

Получены аналитические выражения для сумм особых рядов, возникающих в аддитивных задачах с простыми числами специального вида.

1 Введение

Ряд классических проблем теории чисел сводится к вопросу о числе решений уравнения

$$p_1^n + p_2^n + \dots + p_k^n = N \quad (1)$$

в простых числах p_1, p_2, \dots, p_k , где $k \geq 2$ и $n \geq 1$ — натуральные числа.

Рассмотрим простые числа, на которые налагаются дополнительные ограничения вида

$$a < \{\eta p^n\} < b,$$

где a и b — произвольные действительные числа, $0 \leq a < b \leq 1$, η — квадратичная иррациональность. Пусть $J_{k,n}(N)$ — число решений уравнения (1) с такими простыми числами, $I_{k,n}(N)$ — число решений уравнения (1) с произвольными простыми числами. Для задач Гольдбаха ($k = 3$, $n = 1$), Хуа Ло-Кена ($k = 5$, $n = 2$) нами получены приближенные формулы ([1], [2])

$$J_{k,n}(N) \sim \sigma_k(N, a, b) I_{k,n}(N),$$

где

$$\sigma_k(N, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0,5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

В данной работе мы рассмотрим поведение ряда $\sigma_k(N, a, b)$, $k = 2, 3, \dots$. Обозначим $\alpha = \eta N - aj - b(k - j)$. При нечетном k получено равенство

$$\begin{aligned} \sigma_k(N, a, b) &= (b - a)^k + \\ &+ \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{\{\alpha\}^k}{k!} - \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} + \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2^{k-2}} (-1)^{\frac{3k-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l+1}}{(2l+1)!} \right). \end{aligned}$$

При четном k имеем

$$\begin{aligned} \sigma_k(N, a, b) &= (b - a)^k + \\ &+ \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(-\frac{\{\alpha\}^k}{k!} + \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} - \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2^{k-1}} (-1)^{k/2} \sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l}}{(2l)!} \right). \end{aligned}$$

2 Особый ряд

1. Рассмотрим

$$\sigma_k(N, a, b) = \sum_{|m| < \infty} e^{2\pi i m(\eta N - 0,5k(a+b))} \frac{\sin^k \pi m(b-a)}{\pi^k m^k}.$$

Поскольку

$$\sin^k \gamma = \frac{1}{(2i)^k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} e^{i\gamma(2j-k)},$$

то

$$\sigma_k(N, a, b) = (b - a)^k + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i m)^k} s_k(N, a, b, m),$$

где

$$s_k(N, a, b, m) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \cdot (e^{2\pi i m(\eta N - aj - b(k-j))} + e^{-2\pi i m(\eta N - a(k-j) - bj)}).$$

Воспользовавшись свойством биномиальных коэффициентов, имеем

$$s_k(N, a, b, m) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \cdot ((-1)^k e^{2\pi i m(\eta N - aj - b(k-j))} + e^{-2\pi i m(\eta N - aj - b(k-j))}).$$

При k нечетном $i^k = (-1)^{0,5(k-1)} i$ и

$$\sigma_k(N, a, b) = (b-a)^k + \frac{1}{2^{k-1}} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m(\eta N - aj - b(k-j))}{(\pi m)^k}.$$

При k четном $i^k = (-1)^{k/2}$,

$$\sigma_k(N, a, b) = (b-a)^k + \frac{1}{2^{k-1}} (-1)^{k/2} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m(\eta N - aj - b(k-j))}{(\pi m)^k}.$$

2. Преобразуем ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{(\pi m)^k}.$$

При нечетном $k \geq 2$ ряд сходится равномерно по x . Продифференцировав его $(k-2)$ раз по x , получим ряд вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{(\pi m)^2}.$$

Воспользуемся представлением функции $f(x) = x^2$ на промежутке $-\pi \leq x \leq \pi$ рядом Фурье

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m^2}.$$

Выделив в сумме по m слагаемые с четными m , получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{(\pi m)^2} = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Известно, что при $-\pi \leq x \leq \pi$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}.$$

Тогда при $0 \leq x \leq \pi$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2mx}{(\pi m)^2} = \frac{x^2}{\pi^2} - \frac{x}{\pi} + \frac{1}{6}.$$

В результате имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{(\pi m)^2} = \{x\}^2 - \{x\} + \frac{1}{6}. \quad (2)$$

Проинтегрировав $(k-2)$ раз по x обе части равенства (2), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi mx}{(\pi m)^k} &= 2 \left(\frac{2\{x\}^k}{k!} - \frac{\{x\}^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\{x\}^{k-2}}{6(k-2)!} \right) (-4)^{\frac{k-3}{2}} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{2\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}} (-4)^l \frac{\{x\}^{2l+1}}{(2l+1)!}. \end{aligned}$$

3. Тогда при нечетном k

$$\begin{aligned} \sigma_k(N, a, b) &= (b-a)^k + \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(\frac{\{\alpha\}^k}{k!} - \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} + \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2^{k-2}} (-1)^{\frac{3k-1}{2}} \sum_{l=0}^{\frac{k-5}{2}} \frac{\zeta(k-1-2l)}{\pi^{k-1-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l+1}}{(2l+1)!} \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \eta N - aj - b(k-j)$.

4. При четном $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi mx}{(\pi m)^k} &= \left(\frac{2\{x\}^k}{k!} - \frac{\{x\}^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\{x\}^{k-2}}{6(k-2)!} \right) (-4)^{\frac{k-2}{2}} + \\ &+ \sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}} (-4)^l \frac{\{x\}^{2l}}{(2l)!}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma_k(N, a, b) &= (b-a)^k + \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left(-\frac{\{\alpha\}^k}{k!} + \frac{\{\alpha\}^{k-1}}{2(k-1)!} - \frac{\{\alpha\}^{k-2}}{12(k-2)!} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2^{k-1}} (-1)^{k/2} \sum_{l=0}^{\frac{k-4}{2}} \frac{\zeta(k-2l)}{\pi^{k-2l}} (-4)^l \frac{\{\alpha\}^{2l}}{(2l)!} \right), \end{aligned}$$

где $\alpha = \eta N - aj - b(k-j)$.

3 Примеры

1. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \sigma_2(N, a, b) &= (b-a)^2 + \{\eta N - a - b\}^2 - \{\eta N - a - b\} - \\ &- 0,5(\{\eta N - 2a\}^2 - \{\eta N - 2a\} + \{\eta N - 2b\}^2 - \{\eta N - 2b\}). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$t = \eta N - a - b, \quad \Delta = b - a.$$

При фиксированном Δ построим график функции

$$f(t) = \Delta^2 + t^2 - t - 0,5(\{t + \Delta\}^2 - \{t + \Delta\} + \{t - \Delta\}^2 - \{t - \Delta\}).$$

Для $0 \leq \Delta \leq 1/2$

$$f(t) = \begin{cases} \Delta - t, & \text{если } 0 \leq t < \Delta, \\ 0, & \text{если } \Delta \leq t < 1 - \Delta, \\ t + \Delta - 1, & \text{если } 1 - \Delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

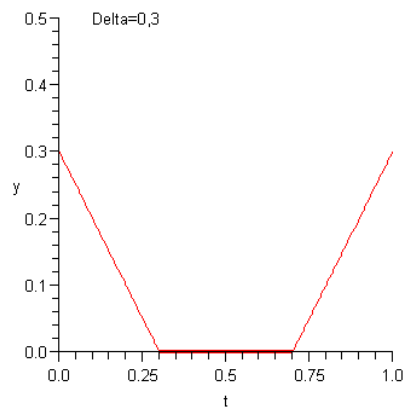


Рис.1. $k = 2$, $0 \leq \Delta \leq 1/2$

Для $1/2 < \Delta \leq 1$

$$f(t) = \begin{cases} \Delta - t, & \text{если } 0 \leq t < 1 - \Delta, \\ 2\Delta - 1, & \text{если } 1 - \Delta \leq t < \Delta, \\ t + \Delta - 1, & \text{если } \Delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

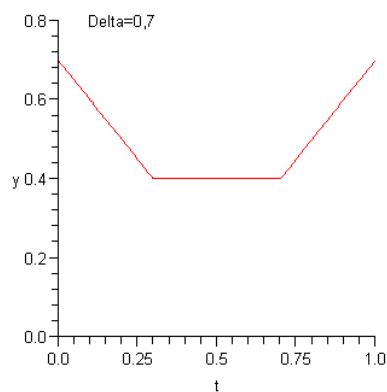


Рис.2. $k = 2$, $1/2 < \Delta \leq 1$

2. При $k = 3$

$$\begin{aligned} \sigma_3(N, a, b) = & (b - a)^3 + \\ & + 1,5 \left(\frac{\{\eta N - 2a - b\}^3}{3} - \frac{\{\eta N - 2a - b\}^2}{2} + \frac{\{\eta N - 2a - b\}}{6} \right) - \\ & - 1,5 \left(\frac{\{\eta N - a - 2b\}^3}{3} - \frac{\{\eta N - a - 2b\}^2}{2} + \frac{\{\eta N - a - 2b\}}{6} \right) - \\ & - 0,5 \left(\frac{\{\eta N - 3a\}^3}{3} - \frac{\{\eta N - 3a\}^2}{2} + \frac{\{\eta N - 3a\}}{6} \right) + \\ & + 0,5 \left(\frac{\{\eta N - 3b\}^3}{3} - \frac{\{\eta N - 3b\}^2}{2} + \frac{\{\eta N - 3b\}}{6} \right). \end{aligned}$$

Обозначив

$$t = \eta N - 2a - b, \quad \Delta = b - a,$$

имеем

$$\begin{aligned} f(t) = & \Delta^3 + 1,5 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6} \right) - \\ & - 1,5 \left(\frac{\{t - \Delta\}^3}{3} - \frac{\{t - \Delta\}^2}{2} + \frac{\{t - \Delta\}}{6} \right) - \\ & - 0,5 \left(\frac{\{t + \Delta\}^3}{3} - \frac{\{t + \Delta\}^2}{2} + \frac{\{t + \Delta\}}{6} \right) + \\ & + 0,5 \left(\frac{\{t - 2\Delta\}^3}{3} - \frac{\{t - 2\Delta\}^2}{2} + \frac{\{t - 2\Delta\}}{6} \right). \end{aligned}$$

Для $0 \leq \Delta \leq 1/3$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + t\Delta + 0,5\Delta^2, & \text{если } 0 \leq t < \Delta, \\ t^2 - 2t\Delta + 2\Delta^2, & \text{если } \Delta \leq t < 2\Delta, \\ 0, & \text{если } 2\Delta \leq t < 1 - \Delta, \\ 0,5t^2 + t(\Delta - 1) + 0,5(1 - 2\Delta + \Delta^2), & \text{если } 1 - \Delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

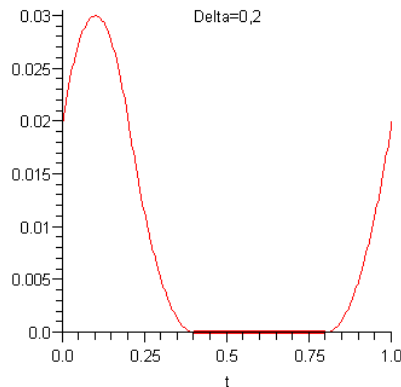
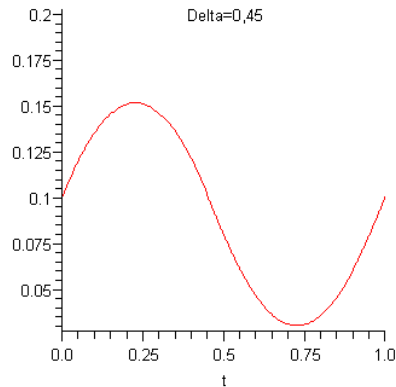


Рис.3. $k = 3, 0 \leq \Delta \leq 1/3$

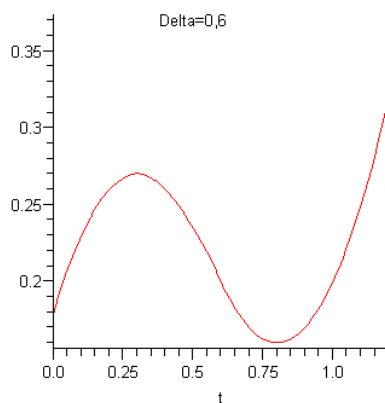
Для $1/3 < \Delta \leq 1/2$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + t\Delta + 0,5\Delta^2, & \text{если } 0 \leq t < \Delta, \\ 0,5t^2 - 2t\Delta + 2\Delta^2, & \text{если } \Delta \leq t < 1 - \Delta, \\ t^2 - t(1 + \Delta) + 0,5(1 - 2\Delta + 5\Delta^2), & \text{если } 1 - \Delta \leq t < 2\Delta, \\ 0,5t^2 + t(\Delta - 1) + 0,5(1 - 2\Delta + \Delta^2), & \text{если } 2\Delta \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Рис.4. $k = 3, 1/3 < \Delta \leq 1/2$

Для $1/2 < \Delta \leq 1$

$$f(t) = \begin{cases} -t^2 + t\Delta + 0,5\Delta^2, & \text{если } 0 \leq t < 1 - \Delta, \\ -0,5t^2 + t(2\Delta - 1) + 0,5 - \Delta + \Delta^2, & \text{если } 1 - \Delta \leq t < \Delta, \\ t^2 - t(1 + \Delta) + 0,5(1 - 2\Delta + 5\Delta^2), & \text{если } \Delta \leq t < 2\Delta. \end{cases}$$

Рис.5.1. $k = 3, 1/2 < \Delta \leq 2/3$

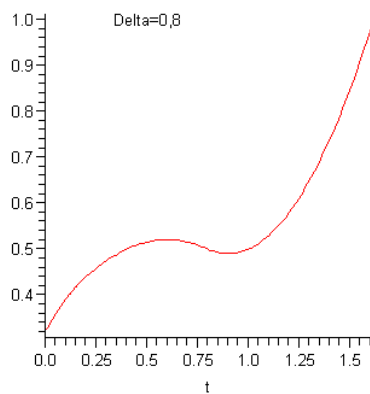


Рис.5.2. $k = 3, 2/3 < \Delta \leq 1$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gritsenko, N. Motkina, Ternary Goldbach's Problem Involving Primes of a special type, <http://arXiv.org/abs/0812.4606> — 25 Dec 2008
- [2] S. Gritsenko, N. Motkina, Hua Loo Keng's Problem Involving Primes of a Special Type, <http://arXiv.org/abs/0812.4665> — 26 Dec 2008

НИУ «Белгородский государственный университет»
Поступило 1.12.11