Г. Е. Минц, Бескванторные и однокванторные системы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 115–133

Г.Е.Минц

БЕСКВАНТОРНЫЕ И ОДНОКВАНТОРНЫЕ СИСТЕМЫ [ж)]

Будем рассматривать примитивно рекурсивную арифметику (ПРА) с функциональными переменными и два ее расширения формулами, не содержащими "перемен кванторов" (с правилом индукции по таким формулам): одно из этих расширений включает все формулы упомянутого типа, не содержащие предикатных переменных; в языке второго расширения имеются свободные предикатные переменные. Мы докажем, что первое из этих расширений погружается в ПРА с помощью естественного перевода: например, формула

$$\forall z \forall x M(z,x,a,b) \vee \exists y N(y) \supset \forall x S(x) \vee (\forall v T(v) \& \exists w \mathcal{U}(a,w,c)) \qquad (1)$$

переходит в "бесконечную дизъюнкцию" бескванторных формул вида

$$M(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), a, b) \vee N(y) \supset S(x) \vee (T(v) \vee \mathcal{U}(a, \theta(\alpha), c)), \qquad (2)$$

где α обозначает список a, b, c, x, y, v, а φ, ψ, θ - примитивно рекурсивные функции.

Это утверждение позволяет дать алгорифмически инвариантную характеристику примитивно рекурсивных функций: класс ПРФ совпадает с классом функций, доказуемо рекурсивных в $\exists$-расширении бескванторной арифметики элементарных по Кальмару функций.

Для системы со свободными предикатными переменными верно лишь более слабое утверждение, позволяющее, однако, обосновать возможность некоторой специализации формы вывода, используемой в [I].

ж) Основные результаты заметки доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 15 января 1970 г.

Арифметические формулы строятся обычным образом из примитивно рекурсивных равенств, содержащих, возможно, функциональные переменные, с помощью пропозициональных связок $\&, \vee$ и кванторов по предметным переменным. При построении предикатно-арифметических формул допускаются, кроме того, элементарные формулы вида $P(t_1,\ldots,t_n)$ и $\bar{P}(t_1,\ldots,t_n)$, где P –предикатная переменная, $t_1,\ldots,t_n$ – примитивно рекурсивные термы*). Сложностью формулы будем, следуя [2], называть максимальное число перемен знаков в цепочках управляющих друг другом вхождений кванторов в данную формулу. Пример: сложность формулы

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y \forall v (\exists z_1 \exists z_2 \exists w R \& \forall u S)$$

равна 2 (число перемен знаков в цепочке $\exists x_1 \exists x_2 \forall y \forall v \exists z_1 \exists z_2 \exists w$) а сложность формулы $\forall x R \vee \exists y S$ равна 0 (подразумевается, что R, S – бескванторные формулы).

Выберем формализацию ПРА в виде исчисления многосукцедентных секвенций, составленных из бескванторных арифметических формул, которое содержит I) постулаты классического исчисления предикатов с равенством (применительно к рассматриваемому языку); 2) определяющие равенства для примитивно рекурсивных функторов, правило подстановки вместо свободных предметных переменных и правило индукции в форме:

$$\frac{\rightarrow f(b,X)=f(b',X) \qquad \rightarrow f(0,X)=0}{\rightarrow f(b,X)=0}.$$

Посредством КА будем обозначать секвенциальный вариант классической арифметики, близкий к рассмотренному в [3] : выводимыми объектами являются многосукцедентные секвенции, составленные из арифметических формул, а система постулатов – это расширение PRA предикатными и пропозициональными правилами исчисления LK и

---

*) Отрицание арифметической формулы вводится в качестве сокращения с помощью обычного в классической логике индуктивного определения, (при этом $\neg(a=b)$ означает $sg|a-b|=1$), после чего вводится импликация $A \supset B$ как сокращение для $\neg A \vee B$.

правилом индукции:

$$\frac{A(b), \Gamma \to \Delta, A(b')}{A(0), \Gamma \to \Delta, A(t)}.$$

Посредством KA^{P} будем обозначать систему, отличающуюся от КА лишь использованием предикатно-арифметических формул вместо арифметических и наличием аксиом:

$$\to P(t_1, \ldots, t_n), \bar{P}(t_1, \ldots, t_n)$$

$$\tau = s,\ P(t_{1\div(i-1)}, \tau, t_{(i+1)\div n}) \to P(t_{1\div(i-1)}, s, t_{(i+1)\div n}),$$

где $t_{1\div n}$ означает список $t_1, \ldots, t_n$. Посредством $KA_{[n]}(KA^{P}_{[n]})$ будем обозначать систему, которая получается из КА (соответственно, из KA^{P}), если ограничить язык, оставив лишь секвенции сложности $\leqslant n$ (сложность секвенции - это, по определению, максимум сложностей входящих в нее формул).

Предваренную формулу назовем *стандартной*, если в ее префиксе нет соседних вхождений одноименных кванторов. Стандартной формой предваренной формулы

$$Q_0 x_{00} \ldots Q_0 x_{0n_0} \ldots Q_m x_{m0} \ldots Q_m x_{mn_m} R(x_{00}, \ldots, x_{mn_m}), \tag{3}$$

где R - бескванторная формула, $Q_{i-1} \neq Q_i$ $(i=1,\ldots,m)$, будем называть формулу

$$Q_0 x_0 \ldots Q_m x_m R((x_0)_0, \ldots, (x_0)_{n_0}, \ldots (x_m)_0, \ldots, (x_m)_{n_m}). \tag{4}$$

Здесь $(z)_i$ имеет тот же смысл, что и в [4], т.е. обозначает терм $\varphi(z,i)$, где φ - символ примитивно рекурсивной функции, дающей по паре (z,i) показатель, с которым i-е простое число входит в разложение z. Переход от (3) к (4) будем называть склеиванием кванторов.

Произвольную формулу назовем стандартной, если она является стандартной предваренной формулой или имеет вид

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} (\exists x_i R_i \vee \forall y_i S_i), \tag{5}$$

где $\exists x_i R_i$, $\forall y_i S_i$ $(i=1,\ldots,n)$ – стандартные предваренные формулы. Секвенция считается стандартной, если все ее члены стандартны.

Отметим, что известный процесс вынесения кванторов вперед можно организовать таким образом, чтобы, не меняя сложности, приводить любую формулу (или секвенцию) к эквивалентной квазипредваренной форме (квазипредваренными будем называть произвольные формулы, построенные из предваренных с помощью $\&$ и $\vee$). Для этого следует пользоваться эквивалентностями

$$(QxA \circ QyB) \equiv QxQy(A \circ B)$$
$$QxGQyA \equiv QxQyGA, \tag{6}$$

где A, B – произвольные формулы, и рассматриваемым вхождением Qy в формулу $QxGQyA$ не управляет никакое вхождение квантора, кроме Qx (слово G не является формулой!)

Любую квазипредваренную формулу можно, не меняя сложности, привести к стандартной форме путем следующих преобразований:

I) склеивания кванторов;

2) приведения к конъюнктивной нормальной форме относительно булевских компонент (результат этого шага отличается от (5) лишь наличием более чем двучленных дизъюнкций);

3) применения эквивалентности (6) к конъюнктивным членам, приведения результата к квазипредваренной форме;

4) повторения шага I.

Описанный процесс приведения произвольной формулы к стандартной форме будем называть процессом стандартизации. Результат его применения к формуле A будем обозначать посредством A^* . К секвенциям этот процесс будет применяться почленно.

<u>Лемма I</u>. Если

$$S_1,\ldots,S_m \vdash_{KA^p_{[n]}} S \quad , \text{ то}$$

$$S^*_1,\ldots,S^*_m \vdash_{KA^p_{[n]}} S^*,$$

причем новый вывод можно построить из стандартных секвенций.

Лемма доказывается рассмотрением всех правил системы KA^P . Вставки для фигур, получающихся из правил после стандартизации, пишутся с помощью секвенций, выводимых средствами исчисления предикатов (следовательно, со свойством подформульности).

Следствие. Если $S_1, \ldots, S_m \vdash_{KA_{[n]}} S$, то $S_1^*, \ldots, S_m^* \vdash_{KA_{[n]}} S^*$, причем вывод можно построить из стандартных секвенций.

Действительно, достаточно взять вывод в $KA^P_{[n]}$, существующий согласно лемме I, и заменить элементарные формулы, содержащие предикатные переменные, на $0=0$.

Ниже будет сформулировано (теорема I) одно обобщение дедукционной теоремы для ПРА. Это утверждение было независимо доказано Н.А.Шаниным, которому принадлежит приводимое ниже замечание, позволяющее упростить некоторые доказательства.

Замечание I. В ПРА выводима любая формула вида

$$[A]^{x_{0\div n}}_{(t)_{0\div n}} \supset [A]^{x_{0\div n}}_{t^0_{0\div n}} \& \ldots \& [A]^{x_{0\div n}}_{t^k_{0\div n}}$$

,где $t^i_{0\div n}$ $(i=0,\ldots,k)$ – произвольные термы, и использованы обозначения:

$$t \leftrightharpoons \mu z_{\leq u} \neg [A]^{x_{0\div n}}_{z_{0\div n}}$$

$$u \leftrightharpoons \prod_{i=0}^{k} p_i^{\tau_i}$$

$$\tau_i \leftrightharpoons max(t_i^0, \ldots, t_i^k) \quad i=0,\ldots,k.$$

Теорема I. Если $\Gamma, A \vdash_{ПРА} B$ и $x_1, \ldots, x_n$ – полный список параметров формулы А, варьируемых в данном выводе, то найдутся такие термы $t_0, \ldots, t_n$, что

$$\Gamma \vdash_{ПРА} ([A]^{x_{0\div n}}_{t_{0\div n}} \supset B)$$

Доказательство. Сначала индукцией по длине вывода установим, что

$$\Gamma \vdash ([A]^{x_{0\div n}}_{t^0_{0\div n}} \& \dots \& [A]^{x_{0\div n}}_{t^k_{0\div n}} \supset B).$$

(Для этого удобно использовать формализацию ПРА с использованием ограниченного μ-оператора вместо правила индукции - если поднять все применения правила подстановки наверх, то можно сослаться на обычную дедукционную теорему). Затем используется замечание I.

Редукцией секвенции S назовем секвенцию, которая получается из S^* последовательным применением следующих преобразований:

I) переименования переменных (в соответствии с заранее фиксированным алгорифмом), если разные вхождения кванторов связывают одинаковые переменные;

2) вычеркивания всех положительных кванторов;

3) замены элементарных подформул вида $P(t_1,\dots,t_n)$ на $f(t_1,\dots,t_n)=0$, где f - новая функциональная переменная (своя для каждой предикатной переменной P);

4) замены подформул вида $Qx\,B$ (оставшиеся кванторы происходят от отрицательных кванторов исходной секвенции) на $[B]^x_{\varphi(\alpha)}$, где φ - новая функциональная переменная (своя для каждого вхождения квантора); α - полный список свободных переменных формулы, полученной после преобразования 3.

Функциональные переменные, вводимые на шаге 4, назовем минус-переменными. Редукцию секвенции S будем обозначать через S^-.

Восполнением секвенции S будем называть любую секвенцию, получающуюся из S^- подстановкой каких-либо функторов вместо минус-переменных. Из доказываемой ниже теоремы 2 следует, что любая формула из $KA_{[0]}$ разлагается в "бесконечную дизъюнкцию" своих восполнений.

Следующее утверждение касается, по существу, свойств формального отрицания.

Лемма 2. Если A - формула сложности 0, $\to B$ - какое-либо восполнение секвенции $\to A$, и $C\to$ - какое-либо восполнение секвенции $A\to$, то из $\to B$, $C\to$ выводимо в ПРА противоречие.

Доказательство. Запишем стандартную форму формулы A в виде (5); i-й конъюнктивный член формулы (5) обозначим через $\mathcal{D}_i$; тогда восполнения секвенций $\to A$ и $A\to$ имеют, соответственно, вид

$$\to \mathop{\&}_{i=1}^{n} (R_i(\varphi_i(\alpha, Y)) \vee S_i(y_i)) \tag{7}$$

$$\mathop{\&}_{i}^{n} (R_i(x_i) \vee S_i(\psi_i(\alpha, X))\to \tag{8}$$

где $X \leftrightharpoons x_1, \ldots, x_n$, $Y \leftrightharpoons y_1, \ldots, y_n$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ - некоторые функторы. Будем уменьшать n. Применяя к последней дизъюнкции из (8) дистрибутивность, имеем:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_i, R_n(x_n)\to \qquad \mathop{\&}_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_i, S_n(\psi_n(\alpha, X))\to \tag{9}$$

Последний конъюнктивный член (7) в сочетании со второй секвенцией из (9) дает

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i \to R_n(t)$$, где t есть $\varphi_n(\alpha, y_{1\div(n-1)}, \psi_n(\alpha, X))$,

что вместе с первой секвенцией из (9) дает

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_i, \left[\mathop{\&}_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_i\right]_t^{x_n}\to$$

Остается применить замечание I.

Теорема 2. Если

$$S_1, \ldots, S_m \vdash_{KA^P_{[0]}} S,$$

то найдется такое восполнение S' секвенции S, что $S_1^*, \ldots, S_m^* \vdash_{ПРА} S'$.

Доказательство проводится индукцией по длине вывода S^* из $S_1^*, \dots S_m^*$, состоящего из стандартных секвенций с аксиомами по бескванторным формулам (такой вывод существует согласно лемме I). Базис индукции очевиден. Для обоснования индукционного перехода достаточно рассмотреть выводы, состоящие из единственного применения правила. Рассмотрим ряд случаев в зависимости от вида этого правила.

<u>Случай I.</u> Пропозициональное правило, правило для положительного квантора ($\to\forall$, $\exists\to$), или структурное правило, отличное от сечения и сокращения повторений. Восполнение заключения переносится из восполнений посылок.

<u>Случай 2.</u> Сокращение повторений. Рассмотрим для простоты записи случай

$$\frac{\forall x\, R(x) \vee \exists y\, S(y),\ \forall x\, R(x) \vee \exists y\, S(y), \Gamma \to \Delta}{\forall x\, R(x) \vee \exists y\, S(y), \Gamma \to \Delta}$$

Восполнение посылки имеет вид

$$R^*(\Phi(\alpha, y, v)) \vee S^*(y),\ R^*(\Psi(\alpha, y, v)) \vee S^*(v),\ \Gamma^* \to \Delta^*$$

Искомое восполнение заключения должно иметь вид

$$R'(\theta(\alpha, y)) \vee S'(y),\ \Gamma' \to \Delta'$$

где R', S', Γ', Δ' отличаются от $R^*, S^*, \Gamma^*, \Delta^*$ лишь размерностью (т.е. количеством аргументов) восполняющих функторов (т.к. заключение имеет меньше параметров). Все восполняющие функторы заключения, кроме θ, получаются из соответствующих функторов посылки отождествлением переменных v и y. Фиксация этих функторов определяет формулы $R'(x)$ и $S'(y)$. Положим теперь по определению

$$\theta(\alpha, y) = \mu x_{\leq \tau}(R'(x) \vee S'(y)), \quad \tau \leftrightharpoons max(\Phi(\alpha, y, y), \Psi(\alpha, y, y))$$

<u>Случай 3.</u> Правило для отрицательного квантора (т.е. $\to\exists$ или $\forall\to$). Восполнение конструируется из собственного терма этого

правила.

Случай 4. Сечение. Для простоты записи предположим, что рассматриваемое сечение имеет вид

$$\frac{\Gamma\to A \quad A\Gamma\to}{\Gamma\to}$$

Восполнения посылок имеют вид

$$\Gamma'\to B,\ C\Gamma''\to \qquad (10)$$

где B и C удовлетворяют условию леммы 2, а Γ', Γ'' - некоторые восполнения секвенции $\Gamma\to$. В силу леммы 2 и теоремы I найдутся такие термы $t_1,\dots,t_n$, $\tau_1,\dots,\tau_n$, что $\vdash_{\text{ПРА}} [B]^{y}_{t_{1\div n}} \to [C]^{x}_{\tau_{1\div n}}$. Отсюда и из (10):

$$[\Gamma']^{y}_{t_{1\div n}},[\Gamma'']^{x}_{\tau_{1\div n}}\to$$

Остается применить замечание 1.

Случай 5. Индукция. Используя предыдущие случаи можно ограничиться применениями правила вида:

$$\frac{A(0) \quad A(b)\to A(b')}{A(0)\to A(b)}$$

Рассмотрим ряд подслучаев.

5.1. A имеет вид $\exists x R$, где R - бескванторная; рассматриваемое применение имеет вид:

$$\frac{\exists x R(0,x,\alpha) \quad \exists x (b,x,\alpha)\to\exists x R(b',x,\alpha)}{\exists x R(b,x,\alpha)}$$

Требуется обосновать переход

$$\frac{R(0,\Phi_0(\alpha),\alpha) \quad R(b,x,\alpha)\to R(b',\Phi(b,x,\alpha),\alpha)}{R(b,\varphi(b,\alpha),\alpha)},$$

построив предварительно φ. Определяем φ примитивной рекурсией: $\varphi(0,\alpha)=\Phi_0(\alpha)$; $\varphi(b',\alpha)=\Phi(b,\varphi(b,\alpha),\alpha)$.

Посылки (I0′) дают $R(b,\varphi(b,\alpha),\alpha) \to R(b',\varphi(b',\alpha),\alpha)$, откуда по (бескванторной) индукции получаем заключение (I0′).

5.2. A имеет вид $\forall x R$. Так как предикатные переходы уже рассмотрены, то, применяя контрапозицию, достаточно обосновать $\exists$ -индукцию спуска

$$\frac{\exists x R(t,x,\alpha)\ \exists x R(b',x,\alpha) \to \exists x R(b,x,\alpha)}{\exists x R(0,x,\alpha)} \tag{II}$$

Она, в свою очередь, сводится к обычной $\exists$-индукции заменой "направления аргумента", т.е. введением нового предиката: $S(z,x,\alpha) \leftrightharpoons R(t-z,x,\alpha)$, так как из посылок (II) получается по предикатным и бескванторным правилам:

$$\exists x S(0,x,\alpha)\ \exists x S(z,x,\alpha) \to \exists x S(z',x,\alpha)$$

5.3. A имеет вид

$$\mathop{\&}_{i=0}^{n} [\exists x_i R_i(b,x_i,y) \vee \forall z_i S_i(b,z_i,y)],$$

где R_i, S_i – бескванторные. Требуется обосновать переход (для упрощения записи опускаем параметры y):

$$\frac{\to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [R_i(0,\psi_i^0(Z)) \vee S_i(0,z_i)] \qquad \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [R_i(b,x_i) \vee S_i(b,\varphi_i(b,X,Z))] \to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [R_i(b',\psi_i(b,X,Z)) \vee S_i(b',z_i)]}{\to \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} [R_i(b,\Psi_i(b,Z)) \vee S_i(b,z_i)],} \tag{I2}$$

где $X \leftrightharpoons x_{1\div n}$, $Z \leftrightharpoons z_{1\div n}$ и функции Ψ_i подлежат построению. Обозначим вторую посылку (I2) через T, заключение – через M, и выведем из T импликацию

$$\forall Z M(b,Z) \supset \forall Z M(b',Z), \tag{I3}$$

пользуясь предикатными правилами и бескванторной индукцией. После того, как это будет сделано, мы получим M, используя случай 2.I

2.I. Начальные значения функций Ψ_i очевидны: $\Psi_i(0,Z) = \psi_i^0(Z)$

Для определения значений в остальных точках воспользуемся следующими наводящими соображениями. Аналогично тому, как это было сделано при рассмотрении правила сечения, будем уменьшать n . Допустим, что Ψ_i уже задана в точке b .

Подставим в $\forall Z\, M(b,Z)$ вместо z_i терм $\varphi_i(b,\circledcirc,Z)$, где $\circledcirc$ обозначает список из n нулей. Если при всех $i(0<i\leq n)$ оказывается $S_i(b,\varphi_i(b,\circledcirc,Z))$, то полагаем $\Psi_i(b',Z)=\varphi_i(b,\circledcirc,Z)$. Истинность $M(b',Z)$ следует из T . Если же для некоторого i утверждение $S_i(b,\varphi_i(b,\circledcirc,Z))$ оказывается ложным (пусть, для простоты записи, $i=n$), то истинно $R_n(b,\Psi_n(b,Z_1))$, где

$Z_1 \Leftrightarrow \varphi_{1\div n}(b,\circledcirc,Z)$. Зафиксировав в посылке правила (I2) $x_n=\Psi_n(b,Z_1)$, мы уменьшаем n на I, так как последний конъюнктивный член антецедента оказывается истинным.

Перейдем к точным терминам. Определим функции Ψ_i следующей рекурсией, используя следующие обозначения:

$$\mathcal{D}_i(b,x,z)\Leftrightarrow R_i(b,x)\vee S_i(b,z),\quad S_0\Leftrightarrow 0=0,\quad R_0\Leftrightarrow 0=0,$$

$$Z^0\Leftrightarrow Z,\quad X^0\Leftrightarrow\circledcirc,\quad i_0\Leftrightarrow 0,\quad Z_{k+1}\Leftrightarrow\{\varphi_{1\div n}(b,X_k,Z)\}$$

$$i_{k+1}\Leftrightarrow\mu i_{\leq n}\{i\neq i_0,\dots,i_k\ \&\ R_i(b,\Psi_i(b,X_k,Z_{k+1}))\}$$

$$c_{k+1}\Leftrightarrow\Psi_{i_{k+1}}(b,X_k,Z_{k+1})\qquad X_{k+1}\Leftrightarrow[X_k]^{x_{i_{k+1}}}_{c_{k+1}}$$

$$\varkappa_k\Leftrightarrow\mathop{\&}_{\substack{i\leq n\\ i\neq i_0,\dots,i_k}} S_i(b,\varphi_i(b,X_k,Z)),\quad R^k\Leftrightarrow\mathop{\&}_{j\leq k} R_{i_j}(b,c_j)$$

$$\gamma_k\Leftrightarrow\varkappa_k\ \&\ \mathop{\&}_{i<k}\neg\varkappa_i,\ k<n;\quad \gamma_n\Leftrightarrow\mathop{\&}_{i\leq n}\varkappa_i$$

$$\Psi_i(b',Z)=\begin{cases}\Psi_i(b,X_0,Z_0) & \text{если } \gamma_0,\\ \Psi_i(b,X_1,Z) & \text{если } \gamma_1,\\ \quad\cdots & \\ \Psi_i(b,X_k,Z) & \text{если } \gamma_k\\ \Psi_i(b,X_n,Z) & \text{если } \gamma_n\end{cases}$$

Из $M(b, Z_{k+1})$ получаем

$$\neg \varkappa_k \to R_{i_{k+1}}(b, c_{k+1}) \quad (0 \leq k < n) \tag{I4}$$

Установим, что

$$\mathcal{J}_k \,\&\, \varkappa_k \,\&\, R^k \to M(b', Z) \tag{I5}$$

Подставляя в посылку фигуры (I2) X_k вместо X, получаем импликацию, посылка которой следует из $R^k \& \varkappa_k$ (а именно, конъюнктивные члены с индексами $i_1, \ldots, i_k$ следуют из R^k, а остальные – из $\varkappa_k$). В силу $\mathcal{J}_k$ заключение этой импликации эквивалентно $M(b', Z)$. Так как одно из $\mathcal{J}_k$ обязательно верно, остается вывести $\mathcal{J}_k \supset \varkappa_k \,\&\, R^k$. Здесь $\varkappa_k$ совпадает с первым конъюнктивным членом антецедента, а остальные конюнктивные члены получаются согласно (I4). Теорема доказана.

<u>Следствие I.</u> Если $\vdash_{KA_{[0]}} \exists y\, R(y, \alpha)$, то найдется функтор Φ, равномерно примитивно рекурсивный относительно функциональных переменных *) из R, для которого

$$\vdash_{ПРА} R(\Phi(\alpha), \alpha).$$

Иными словами, все доказуемо-рекурсивные в $KA_{[0]}$ функции примитивно рекурсивны.

Приводимое ниже легко доказываемое утверждение, чуть более сильное, чем обращение следствия I, дает возможность указать характеристику примитивно рекурсивных функций.

Будем говорить, что одноместная функция φ д о к а з у е м о р е к у р с и в н а в системе S, если найдется такая двупараметрическая формула $R(x, \alpha)$, что $\vdash_S \exists x\, R(x, \alpha)$ и для любых натуральных чисел m, k имеет место $R(m, k) \to m = \varphi(k)$ (т.е. φ является единственным решением задачи нахождения x из условия $\exists x\, R(x, \alpha)$).

---

*) Т.е. допускающий построение в виде терма из исходных примитивно рекурсивных функций и функциональных переменных с помощью операторов подстановки и примитивной рекурсии.

Рассмотрим какой-либо бескванторный язык Б , содержащий функцию следования и средства, достаточные для изображения функции $(x)_y$ и ограниченных кванторов. Подходящим является, например, язык, содержащий символы для функций, элементарных по Кальмару [4, § 57]. Рассмотрим бескванторное исчисление, соответствующее языку Б , и его расширение $S_Б$ одноkванторными формулами. Легко видеть, что в системе $S_Б$ доказуемо-рекурсивны все примитивно рекурсивные функции. Например, если

$$x \approx R[f,g](\alpha,y) \leftrightharpoons \exists z\left((z)_0 \approx f(\alpha) \,\&\, (z)_y = x \,\&\, \forall i_{<y}\, z_{i'} \approx g(\alpha, i, z_i)\right),$$

то легко вывести "определяющие равенства" для $R[f,g]$:

$$a \approx f(\alpha) \rightarrow a \approx R[f,g](\alpha,0)$$

$$a \approx R[f,g](\alpha,y),\ b \approx g(\alpha,y,a) \rightarrow b \approx R[f,g](\alpha,y'),$$

откуда легко получается по индукции:

$$\exists x\,(x \approx f(\alpha)),\ \exists x\,(x \approx g(\alpha,b,c)) \vdash \exists x\,(x \approx R[f,g](\alpha,y)).$$

Тем самым обосновано

Следствие 2. Функция доказуемо-рекурсивна в системе $S_Б$ тогда и только тогда, когда она примитивно рекурсивна. По-видимому, внимательный анализ доказательства теоремы Матиясевича [5] о диофантовости перечислимых множеств покажет, что в качестве Б достаточно взять язык $\{+,\cdot,'\}$, если допустить в качестве формул, "доказывающих рекурсивность", формулы вида $\exists x_1,\ldots,\exists x_n R$.

Обоснуем теперь одну теорему о специализации формы вывода в $KA^P_{[0]}$.

Рассмотрим исчисление $KA^P_{[0^+]}$, получающееся добавлением к языку исчисления $KA^P_{[0]}$ ограниченных кванторов, а к списку постулатов - правил введения этих кванторов в антецедент и сукцедент, которые мы обозначим через $\rightarrow\forall_<,\ \rightarrow\exists_<,\ \forall_<\rightarrow,\ \exists_<\rightarrow$.

Если S - произвольная секвенция сложности 0 , то посредством $S^{\exists}$ будем обозначать "экзистенциальную форму" секвенции S, т.е. результат вычеркивания положительных кванторов (предварительно производится переименование связанных переменных), перенесения всех антецедентных членов в сукцедент (с отрицанием), вынесения всех оставшихся кванторов вперед (они перейдут в кванторы существования) и стандартизации полученной секвенции.

Вывод назовем экзистенциальным, если в него не входят неограниченные кванторы всеобщности [*].

Теорема 3. Если $S_1, \ldots, S_k \vdash_{KA^P_{[0]}} S$, то можно построить экзистенциальный вывод секвенции $S^{\exists}$ из $S_1^{\exists}, \ldots, S_n^{\exists}$ в $KA^P_{[0']}$

В силу теоремы 2 достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 3. Если $S_1^*, \ldots, S_n^* \vdash_{\text{ПРА}} S'$, где S' - некоторое восполнение секвенции S, то можно построить экзистенциальный вывод секвенции $S^{\exists}$ из $S_1^{\exists}, \ldots, S_n^{\exists}$.

Для доказательства мы должны научиться исключать функциональные переменные из выводов в ПРА. Это будет сделано с помощью обычного метода введения представляющих предикатов (см., например,[5] § 74).

Следует лишь проверить, что в нашем случае можно, не нарушая структуры вывода, обойтись экзистенциальными секвенциями.

Рассмотрим произвольный вывод в ПРА; пусть

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_n \tag{I6}$$

- полный список расположенных в порядке включения (если Φ_i входит в Φ_j, то $i<j$) функторов, входящих в этот вывод и содержащих функциональные переменные; пусть $F_1, \ldots, F_n$ - список попарно различных формул с соответствующим числом параметров (т.е. число параметров формулы F_i на I больше числа аргументов Φ_i).

Терм будем называть f-содержащим, если он со-

---

*) Напомним, что в языке наших исчислений нет ни импликации, ни отрицания неэлементарных формул.

держит функциональные переменные, и f-несодержащим в противном случае. Определим операцию, сопоставляющую каждому терму τ f-несодержащий терм τ^* и список L_τ, состоящий из формул вида $F_i(a, t_1, \ldots, t_m)$, где a - переменная, $t_1, \ldots, t_m$ - f-несодержащие термы.

Если τ - f-несодержащий, то $\tau^* = \tau$ и L_τ пусто. В противном случае представим τ в виде $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ и пусть $L^+ \leftrightharpoons L_{\tau_1} \cup \ldots \cup L_{\tau_k}$. Если $\varphi \notin$ (I6), то $\tau^* = \varphi(\tau_1^*, \ldots, \tau_k^*)$ и $L_\tau = L^+$. Если $\varphi \in$ (I6), то L_τ есть результат добавления к L^+ формулы $F_i(a, \tau_1^*, \ldots, \tau_k^*)$, где a - первая в алфавитном порядке новая переменная; при этом τ^* есть a.

Если S - бескванторная секвенция, входящая в данный вывод, то L_S есть $L_{\tau_1} \cup \ldots \cup L_{\tau_k}$, где $\tau_1, \ldots, \tau_k$ - полный список термов из S. Посредством S^* будем обозначать результат приписывания L_S к антецеденту секвенции, получающейся из S заменой $\tau_1, \ldots, \tau_k$ на $\tau_1^*, \ldots, \tau_k^*$.

Обозначим через $\exists! \Phi$ список, состоящий из секвенций

$$\to \exists x F_i(x, y_1, \ldots, y_{m_i}),\ F_i(x, y_1, \ldots, y_{m_i}),\ F_i(z, y_1, \ldots, y_{m_i}) \to x = z \ (1 \leq i \leq m);$$

<u>Лемма 4</u>. Если S получается из $S_1, \ldots, S_k$ по одному из правил системы ПРА, и $F_1, \ldots, F_n$ - элементарные формулы вида $P(x_1, \ldots, x_m)$, то имеется вывод секвенции S^* из $S_1^*, \ldots, S_k^*$ и списка $\exists! \Phi$, в котором индукционные формулы элементарны и все кванторные секвенции являются членами списка $\exists! \Phi$, входящими в вывод в качестве посылок $\exists$-удаления.

<u>Доказательство.</u> I. Применения логических и структурных правил переходят в применения тех же правил. Особого рассмотрения требует лишь сечение:

$$\frac{L_1, L_2, \Gamma \to \Delta, A \quad L_1, L_2, A\Gamma \to \Delta}{L_1, \Gamma \to \Delta}$$

Здесь L_2 содержит все нужные формулы $F(\tau^*, t_1^*, \ldots t_k^*)$,

9 164

где τ - f-содержащий терм, входящий в посылки, но не в заключение. В этом случае τ^* - переменная, не входящая в $L_1, \Gamma \to \Delta$; поэтому, применив $\exists$ -удаление с формулой $\exists x F(x, t_1^*, \ldots, t_k^*)$, мы получим секвенцию $L_1, \Gamma \to \Delta$ из секвенции $L_1, L_2, \Gamma \to \Delta$.

2. Правило подстановки. Можно считать, что подставляемый терм t либо является f-несодержащим, либо имеет вид $\Phi_i(x_1, \ldots, x_{m_i})$, где $x_1, \ldots, x_{m_i}$ - переменные. В первом случае возникает применение того же правила, во втором добавляется еще применение утончения по формуле $F_i(a, x_1, \ldots, x_{m_i})$.

3. Правило для равенства

$$\frac{\Gamma \to \tau = s}{\Gamma \to f(\mathcal{U}, \tau) = f(\mathcal{U}, s)}.$$

Переход (рассмотрим самый сложный случай - $f \in$ (I6))

$$\frac{\Sigma \to \tau^* = s^*}{F(a, u^*, \tau^*), F(b, u^*, s^*), \Sigma \to a = b}$$

обосновывается ссылкой на обычное правило для равенства и на соответствующий член списка $\exists!\Phi$ (выражающий однозначность F по первому аргументу).

4. Правило индукции. Применение

$$\frac{f(0, X) = 0 \quad f(b, X) = f(b', X)}{f(b, X) = 0}$$

переходит в фигуру

$$\frac{F(d, 0, X) \to d = 0 \quad F(a, b, X), F(c, b', X) \to a = c}{F(a, b, X) \to a = 0}$$

Заметим, что из $F(d, 0, X) \to d = 0$ получается $F(d, 0, X) \to F(0, 0, X)$ Аналогично, вторая посылка дает после подстановки $a = 0$

$$F(0, b, X), F(c, b', X) \to F(0, b', X)$$

Применяя $\exists$ -удаление к первому члену списка $\exists!\Phi$, получаем $F(0, 0, X)$, $F(0, b, X) \to F(0, b', X)$, откуда по индукции $F(0, b, X)$. В силу однозначности F по первому аргументу отсюда следует $F(a, b, X) \to a = 0$.

Опишем теперь предикаты, которые будут подставлены вместо $F_1, \ldots, F_n$. Если Φ_i – функциональная переменная, введенная при построении развертки вместо предиката P, то

$$\mathcal{F}_i(a,X) \Leftrightarrow a \leq 1 \,\&\, (a=0 \equiv P(X)).$$

Если $\Phi_{i_1}, \ldots, \Phi_{i_\ell}$ – функциональные переменные, введенные при построении развертки вместо отрицательных кванторов $Q_1 x_1, \ldots, Q_\ell x_\ell$ (имеется в виду, что это – полный список), то введем предикат

$$\mathcal{F}(x,\alpha) \Leftrightarrow A((x)_1, \ldots, (x)_\ell, \alpha) \,\&\, \forall y_{<x} \neg A((y)_1, \ldots, (y)_\ell, \alpha)$$

(иными словами, $\mathcal{F}(a,\alpha) \Leftrightarrow a = \mu x\, A((x)_1, \ldots, (x)_\ell, \alpha)$.)

Здесь $A(x_1, \ldots, x_\ell, \alpha)$ – это формульный образ секвенции, получающейся из развертываемой секвенции в результате вычеркивания всех кванторов, α – список параметров этой секвенции, отличных от $x_1, \ldots, x_n$. Напомним, что $\neg A$ есть сокращение. Положим

$$\mathcal{F}_{i_k}(a,\alpha) \Leftrightarrow \exists x\, (\mathcal{F}(x,\alpha) \,\&\, a=(x)_k) \qquad (k=1,\ldots,\ell).$$

Если Φ_i получается подстановкой (будем для простоты записи считать, что функция, в которую происходит подстановка, двуместная, и все функции, участвующие в подстановке, принадлежат списку (I6)), $\Phi_i = S[\Phi_j; \Phi_k, \Phi_\ell]$, то

$$\mathcal{F}_i(a,X) \Leftrightarrow \exists z \exists u\, (\mathcal{F}_k(z,X) \,\&\, \mathcal{F}_\ell(u,X) \,\&\, \mathcal{F}_j(a,z,u)).$$

Если Φ_i получается рекурсией, $\Phi_i = R[\Phi_j, \Phi_k]$, то

$$\mathcal{F}_i(a,X,y) \Leftrightarrow \exists z\, ((z)_y = a \,\&\, \mathcal{F}_j((z)_0, X) \,\&\, \forall w_{<y} \mathcal{F}_k((z)_{w'}, X, w, (z)_w)).$$

<u>Лемма 5.</u> Все секвенции списка $\exists!\,\Phi$ имеют экзистенциальные выводы из $S_1^{\exists}, \ldots, S_n^{\exists}$; если E – определяющее равенство для одного из членов списка (I6), то $\rightarrow E^*$ имеет экзистенциальный вывод.

Лемма доказывается индукцией по номеру функтора в списке (I6). Доказательство совершенно стандартно, и мы приводим его лишь затем, чтобы проследить, что получающиеся выводы экзистенциальны. Если Φ_i - функциональная переменная, то соответствующие члены списка $\exists!\Phi$ получаются из $P(X) \vee \neg P(X)$. Если $\Phi_i = S[\Phi_j ; \Phi_k , \Phi_\ell]$, то соответствующий член списка $\exists!\Phi$ получается из таких же формул для $\Phi_j , \Phi_k , \Phi_\ell$. Образ определяющего равенства $\Phi_i(X) = \Phi_j(\Phi_k(X), \Phi_\ell(X))$ имеет вид

$$\mathfrak{F}_i(a,X),\ \mathfrak{F}_k(z,X),\ \mathfrak{F}_\ell(u,X),\ \mathfrak{F}_j(c,z,u) \longrightarrow a=c$$

и легко получается из однозначности $\mathfrak{F}_k, \mathfrak{F}_\ell, \mathfrak{F}_j$ по первому аргументу.

Если $\Phi_i = R[\Phi_j, \Phi_k]$, то $\exists x\, \mathfrak{F}_i(x, X, y)$ доказывается индукцией по y с использованием аналогичных формул для $\mathfrak{F}_j, \mathfrak{F}_k$. Чтобы доказать однозначность по первому аргументу, воспользуемся индукцией спуска

$$\frac{\exists a \exists b (\mathfrak{F}_i(a,X,y') \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,y') \,\&\, a \neq b) \to \exists a \exists b (\mathfrak{F}_i(a,X,y) \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,y) \,\&\, a \neq b)}{\exists a \exists b (\mathfrak{F}_i(a,X,y) \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,y) \,\&\, a \neq b) \to \exists a \exists b (\mathfrak{F}_i(a,X,0) \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,0) \,\&\, a \neq b)}$$

(как отмечено в доказательстве теоремы I, такая индукция сводится к обычной без изменения вида индукционного предиката). Посылка фигуры (I8) обосновывается с помощью однозначности $\mathfrak{F}_k$ по первому аргументу. Из заключения этой фигуры получаем

$$\mathfrak{F}_i(a,X,y) \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,y) \,\&\, a \neq b \longrightarrow \exists a \exists b (\mathfrak{F}_j(a,X) \,\&\, \mathfrak{F}_j(b,X) \,\&\, a \neq b),$$

что вместе с однозначностью $\mathfrak{F}_j$ по первому аргументу дает $\mathfrak{F}_i(a,X,y) \,\&\, \mathfrak{F}_i(b,X,y), a \neq b \to$, что и требовалось.

Наконец, если записать $\mathfrak{F}_i(a,X,y)$ в виде $\exists z\, \mathfrak{A}_i(z,a,X,y)$, то образ определяющего равенства

$$\Phi_i(X,y') = \Phi_k(X, y, \Phi_i(X,y))$$

получается из секвенции

$$\mathfrak{A}_i(z,b,X,y),\ \mathfrak{F}_k(c,X,y,b) \to \mathfrak{A}_i(z * b, c, X, y')$$

с помощью $\exists$-введения и уже доказанной однозначности $\mathfrak{F}_i$ по первому аргументу.

Если Φ_i – переменная, введенная при развертывании отрицательного квантора, то рассмотрим соответствующий предикат $\mathfrak{F}$. Формула $\exists x \mathfrak{F}(x,a)$ доказывается с помощью индукции по предикату $\exists y_{\leq x} \forall u_{\leq x}(A(u) \to A(y) \& \forall z_{<y} \neg A(z))$ (здесь мы для простоты записи предположили, что $n=1$, а α пусто). При этом используется секвенция $S_j^{\exists}$.

Однозначность $\mathfrak{F}$ по первому аргументу очевидна. Отсюда следуют соответствующие свойства для Φ_i.

Чтобы доказать лемму 3, теперь достаточно убедиться, что из S^* экзистенциально выводима $S^{\exists}$. Вывод строится так: сначала по теореме об эквивалентной замене $a=0 \equiv E$, $[\mathfrak{A}]^P_{a=0} \longrightarrow [\mathfrak{A}]^P_E$ восстанавливаем предикатные переменные, исключенные при построении развертки. Затем навешиваем кванторы существования. Наконец, убираем из антецедента формулы вида $\mathfrak{F}_i(a,t_1,\ldots,t_n)$ с помощью $\exists$-удаления по формулам из списка $!\Phi$. Доказательство леммы 3, а тем самым и теоремы 3, закончено.

Автор благодарит С.Ю.Маслова, В.А.Лифшица и Ю.В.Матиясевича, замечания которых помогли улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Минц Г.Е. Точные оценки доказуемости начальных отрезков трансфинитной индукции в арифметике. Настоящий сборник, 134-144.
2. Kreisel G., Levy A. Reflexion principles and their use. "Z. math.Logik und Grundl. Math.", 1968, 14, 2, 97-142.
3. Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости чистой теории чисел. В сб."Математическая теория логического вывода", М., 1967, 154-190.
4. Клини С.К. Введение в метаматематику, М., 1957.
5. Матиясевич Ю.В. Диофантовость перечислимых множеств. "Докл. АН СССР". 191, 2, 179-282, 1970.