ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

УДК 511

ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕСОВОГО РЕШЕТА К ОЦЕНКЕ НАИМЕНЬШЕГО ПОЧТИ ПРОСТОГО ЧИСЛА ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОТ НАТУРАЛЬНОГО АРГУМЕНТА

Е. В. Вахитова (г. Воронеж)

Аннотация

В работе получена оценка наименьшего почти простого числа в полиномиальной последовательности.

In work come out estimate the most smaller almost-prime number in polynomial sequence of natural argument.

Рассмотрим задачу об оценке наименьшего почти простого числа в последовательности

$$A = \{\Phi(n) | n \leqslant x\}, \tag{1}$$

где x - достаточно большое положительное число.

Обозначим наименьшее почти простое число через P_r^* $(r \in \mathbf{N}, r \geqslant 2)$. Будем оценивать число P_r^* как функцию k : $P_r^* \leq k^A$, где A - некоторая постоянная, не зависящая от k.

В 1965 году Левин Б.В. ([1], теорема 2) получил для $\Phi(n) = k^2n^2+1,\ k, n \in \mathbf{N}$, оценку:

$$P_3^* \leq k^{10,9578}.$$

В 1985 году Бухштаб А.А. ([2]) анонсировал новый тип весового решета. В настоящей работе применяется одномерное решето Сельберга с весами Бухштаба нового типа, изученные автором в работе [3]. Отметим, что для получения оценки P_r^* можно применять и метод решета Бруна с весами Бухштаба нового типа, рассмотренный автором в монографии [4] (гл. 6).

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(n) = k^g n^g + l^g$ *- неприводимый полином,* $k, n, l \in \mathbf{Z}$, $g \in \mathbf{N}, 2 \leqslant g \leqslant 16, \rho(p)$ *- число решений сравнения* $\Phi(n) \equiv 0 (mod\, p)$, $\rho(p) < p$ *для всех* p *, а* k *и* l *- такие, что* $\rho(p) \neq 0$ *.*

Тогда наименьшее значение $\Phi(n)$ *, имеющее не более* $g+1$ *простых множителей с учетом их кратности, не превосходит* k^A *, где*

$$A = g + \frac{6g^2}{5,5797 - 0,3g}.$$

В частности, наименьшее значение $\Phi(n) = k^2n^2 + 1$*, имеющее не более трех простых множителей с учетом их кратности, не превосходит* $k^{6,82}$.

Теорема улучшает результат Б.В. Левина и дает оценку для более общей задачи при всех g , удовлетворяющих неравенству $2 \leqslant g \leqslant 16$.

Доказательство. Будем применять результаты работы автора [3] . Для последовательности A , определенной равенством (1), будут выполнены все условия, накладываемые на последовательность в случае одномерного решета. Для числа элементов a_n из последовательности A , имеющих в своем разложении не более r простых чисел с учетом их кратности, получим следующую оценку:

$$\sum_{a_n \in A,\, \nu(a_n) \le r} 1 \ge \frac{ae^{-\gamma}}{2}(f(\alpha a) - B(\alpha, a, b, c, g')) \prod_p \frac{1 - \frac{\rho(p)}{p}}{1 - \frac{1}{p}} \frac{x}{\ln x} \tag{2}$$

для достаточно больших x , где $\alpha, a, b, c, g' \in \mathbf{R}$, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha a - c \le g'$, $1 \le b < c < \alpha a$, $g' + 1 \le \alpha a \le 2(g' + 1)$, $2c - b - 1 > 0$, $(r+1)c - Ma = 2c - b - 1$, γ - постоянная Эйлера ($\gamma \approx 0,57...$) , $\nu(a_n)$ - число простых чисел в разложении a_n с учетом их кратности, $B(\alpha, a, b, c, g')$ определено равенством:

$$B(\alpha, a, b, c, g') = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}}^{\alpha a-1} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \frac{1}{2c-b-1} \left((c-b) \int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'}} \frac{F(z)dz}{\alpha a - z} + \right.$$

$$+ \int\limits_{\alpha a - c}^{g'} F(z) \frac{z - (\alpha a - c)}{\alpha a - z} dz + \int\limits_{\frac{g'^2 \alpha a}{(g'-1)\alpha a+1}}^{\alpha a} \Bigg(\int\limits_{g'}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{g'\alpha a} v} F(z) \frac{dz}{v - z} \Bigg) \frac{dv}{v} +$$

$$+ \frac{g'}{2\alpha a} \int\limits_{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}}^{\alpha a-1} F(g') \frac{(b+1)z - (2\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz +$$

$$\left. + \frac{g'}{\alpha a} \int\limits_{\frac{g'}{\alpha a - g'}}^{\frac{(g'-1)\alpha a+1}{\alpha a-1}} F(g') \frac{(b + 1 - \frac{\alpha a}{g'})z - (\alpha a - b - 1)}{z(1+z)} dz \right),$$

M определено из условия $|a_n| \leq X^M$ для всех $a_n \in A$, $f(u)$, $F(u)$ - функции решета. О свойствах функций решета можно узнать из глав 6 и 7 монографии [5].

Оценка (2) доказана в работе [4] (теорема 2.1.1)

Осуществим теперь выбор параметров одномерного решета Сельберга с весами Бухштаба нового типа. Выберем a из условия $\alpha a = 6$, $\alpha = 1$, $r = g + 1$. . Обозначим через $H(b, c)$ произведение

$$H(b, c) = 3e^{-\gamma}(f(6) - B(\alpha, a, b, c, 3)).$$

Применим теорему 4.3.1 из [4] , тогда получим, что

$$H(b, c) \geq \frac{1}{2c - b - 1}\{1,4576291c - 1,4882304b + 8,0666578 - c\ln c - (6 - c)\ln(6 - c)\}.$$

Учитывая условие для $H(b, c)$ ($H(b, c)$ должно быть наименьшее положительное), при $c = 5,7$ получим

$$H(b; 5,7) \geq \frac{1}{2 \cdot 5,7 - b - 1}\{1,4576291 \cdot 5,7 - 1,4882304b + 8,0666578 -$$

$$-5,7\ln 5,7 - (6 - 5,7)\ln(6 - 5,7)\} =$$

$$= \frac{1}{10,4 - b}\{8,30848587 - 1,4882304b + 8,0666578 -$$

$$-9,920657196 + 0,361191841\} = \frac{1}{10,4 - b}\{6,815678315 - 1,4882305b\}.$$

Следовательно,

$$H(b; 5,7) \geq \frac{1}{10,4 - b}\{6,815678315 - 1,4882305b\} > 0$$

Отсюда находим, что при $b = 4,5797$ будет выполнено неравенство:

$$H(b, c) \geq \frac{1}{10,4 - 4,5797}\{6,815678315 - 1,4882305 \cdot 4,5797\} =$$

$$= \frac{1}{5,4203}(6,815678315 - 6,815648763) = \frac{1}{5,4203} \cdot 0,000029552 =$$

$$= 0,000005452 > 0.$$

При этом $P_r^* = k^g n^g + l^g$, $P_r^* \leq k^A$, $|P_r^*| \leq X^M$, $X = k^{\frac{A-g}{g}}$. Отсюда

$$X^M = k^{M \cdot \frac{A-g}{g}},$$

следовательно, учитывая, что

$$(r + 1)c - Ma = 2c - b - 1,$$

получим

$$A = \frac{Mg}{M-g} = g + \frac{g^2}{M-g} = g + \frac{ag^2}{1+b-(a-c)g}.$$

Таким образом, окончательно будем иметь оценку для P_r^*:

$$P_{g+1}^* \leq k^A,$$

где

$$A = g + \frac{6g^2}{5,5797 - 0,3g},$$

если $2 \leq g \leq 16$.

В частности, для $\Phi(n) = k^2n^2 + 1$ получим:

$$A = 2 + \frac{24}{5,5797 - 0,6} = 2 + \frac{24}{4,9797} = 2 + 4,81957 \leq 6,8196 \leq 6,82.$$

Поэтому $P_3^* \leq k^{6,82}$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Левин Б. В. О наименьшем почти простом числе арифметической прогрессии и последовательности $k^2n^2 + 1$ // УМН. - 1965. - Т. 20.- № 4 (124). - С. 158-162.

[2] Бухштаб А. А. Новый тип весового решета // Всесоюз. конф. "Теория чисел и ее приложения". Тез. докл. - Тбилиси, 1985. - С. 22-24.

[3] Вахитова Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Матем. заметки. - 1999. - Т. 66. - № 1. - С. 38-49.

[4] Вахитова Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Монография. - М.: Изд-во МПГУ Прометей 2002. - 268 с. (РЖ Матем. - 2003. - 03.11 - 13А.115К).

[5] Halberstam H., Richert H.-E. Sieve methods. - London: Acad. Press., 1974. - 364 p.

Воронежский государственный университет
algebraist@yandex.ru
Поступило 13.05.2010