

УДК 517.9

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ¹

А. И. Короткий, Е. И. Грибанова

Рассматривается обратная задача динамики, состоящая в восстановлении априори неизвестных управлений, порождающих наблюдаемое движение динамической системы. Динамическая система описывается краевой задачей для уравнения с частными производными гиперболического типа, управляющие воздействия находятся на границе объекта. Исходной информацией для решения обратной задачи служат результаты приближенных измерений текущих фазовых положений наблюдаемого движения системы. Задача решается в статическом варианте, когда для решения задачи используется вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения. Рассматриваемая задача некорректна, и для ее решения предлагается воспользоваться методом Тихонова со стабилизатором, содержащим сумму среднеквадратичной нормы и полной вариации по времени допустимого управления. На этом пути удается обосновать не только сходимость регуляризованных приближений в пространствах Лебега, но и кусочно-равномерную сходимость. Это открывает возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе обоснован метод проекции субградиента получения минимизирующей последовательности для функционала Тихонова, описана двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, граничное управление, реконструкция, наблюдение, измерение, обратная задача, регуляризация, метод Тихонова, вариация, кусочно-равномерная сходимость.

A. I. Korotkii, E. I. Gribanova. Reconstruction of boundary controls in hyperbolic systems.

The inverse problem of dynamics consisting in reconstructing of a priori unknown controls generating the observed motion of dynamic system is considered. The dynamic system is defined by a boundary value problem for the equation with private derivatives of the hyperbolic type, controls are on a boundary of the object. The source information for solving the inverse problem is results of approximate measurements of the current phase positions of the observed system's motion. The problem is solved in static case, when to solve the problem, all the cumulative during the definite observation period totality of results of measurements is used. This problem is ill-posed and to solve this problem, Tikhonov's method with a stabilizer containing the sum of root mean square norm and total variation of control in time is used. This way provides not only the convergence of regularized approximations in Lebesgue spaces but piecewise uniform convergence. This permits numerical reconstruction of desired control's subtle structure. In this paper subgradient projection method of the obtaining minimizing sequence for the Tikhonov's functional is justified, two-stage finite-dimensional approximation of the problem is described. Results of numerical experiments are presented.

Keywords: dynamical system, boundary control, reconstruction, observation, measurement, inverse problem, regularization, Tikhonov's method, variation, piecewise uniform convergence.

Введение

В работе рассматривается задача о восстановлении априори неизвестных граничных управлений, функционирующих в управляемой динамической системе, описываемой краевой задачей для уравнения с частными производными гиперболического типа. Управляющие воздействия в динамической системе заранее неизвестны и должны быть определены в результате наблюдений за системой по приближенным измерениям текущих фазовых положений системы. Подобного рода задачи восстановления для динамических систем изучались в различных постановках в теории управления, теории дифференциальных игр, теории оценивания и идентификации [1–10]. Хорошо известно, что рассматриваемая задача некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации [11–13].

¹Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках” при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1009) и поддержана РФФИ (проект 11-01-00073).

Для решения задачи предлагается воспользоваться вариационным методом Тихонова, состоящим в минимизации некоторого подходящего функционала невязки на множестве допустимых управлений. Задача будет решаться в статическом варианте, когда используется вся совокупность результатов измерений, накопленная в течение какого-либо заданного промежутка времени наблюдения за системой.

Известно, что стабилизирующие функционалы, содержащие норму пространств Соболева, обладают сильным регуляризирующим эффектом, что неизбежно приводит к заглаживанию искомой функции и потере ее тонкой структуры. Стабилизирующие функционалы, содержащие нормы пространств Лебега, достаточно часто привлекаются для регуляризации задач, но они обеспечивают довольно грубую аппроксимацию. Поэтому возникает необходимость конструирования стабилизаторов, приспособленных к восстановлению негладких функций и функций с особенностями. К настоящему времени в вариационных методах регуляризации предложено несколько классов стабилизирующих функционалов, которые неплохо зарекомендовали себя как для гладких, так и для негладких восстанавливаемых функций. В случае, когда искомое решение является функцией одной переменной, часто задействуются стабилизаторы, содержащие классическую или обобщенную вариацию в совокупности с какой-нибудь строго выпуклой нормой [14–22]. На этом пути удается получить сходимость в пространствах Лебега, поточечную сходимость, сходимость вариаций, а также кусочно-равномерную сходимость регуляризованных приближений. В случае, когда искомое решение является функцией нескольких переменных, часто используются стабилизаторы, содержащие обобщенную вариацию [23–26]. Здесь можно добиться сходимости в пространствах Лебега, поточечной сходимости и сходимости обобщенных вариаций регуляризованных приближений [15–17; 21–26]. Для получения равномерной аппроксимации непрерывного, но в общем случае недифференцируемого решения привлекаются стабилизаторы в виде нормы пространства Липшица [16; 17]. Обращение к норме пространства Соболева с дробными производными, как стабилизатору, может оказаться полезным для восстановления как непрерывных, так и разрывных искомых функций [14; 17]. Использование многомерных классических вариаций в ряде случаев приводит к поточечному и кусочно-равномерному восстановлению негладкой или разрывной искомой функции нескольких переменных [21; 22; 27; 28]. Упомянутые выше результаты установлены для линейных и нелинейных операторных уравнений первого рода.

В данной работе показано, что при использовании стабилизаторов в виде суммы классической вариации и среднеквадратичной нормы в задаче восстановления управления можно получить поточечную сходимость, сходимость в пространствах Лебега, сходимость классических вариаций и кусочно-равномерную сходимость. Эти результаты открывают возможность для численной реконструкции тонкой структуры искомого управления. В работе обоснован метод проекции субградиента построения минимизирующей последовательности для функционала Тихонова и выполнена двухэтапная конечномерная аппроксимация задачи. На первом этапе методом разделения переменных исходная бесконечномерная задача аппроксимируется более простой задачей для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказана соответствующая теорема об аппроксимации. На втором этапе задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений аппроксимируется конечномерной дискретной задачей. Проведены вычислительные эксперименты, показавшие, что разработанные методы и алгоритмы могут применяться для восстановления искомого управления и его тонкой структуры. Приводятся результаты численного моделирования. Работа продолжает исследования [29–35].

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система, состояние которой в момент времени t из заданного ограниченного отрезка времени $T = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta$) характеризуется парой функций $z[t] = (y[t], y_t[t]) = (y(t, \cdot), y_t(t, \cdot))$, определенных в некоторой области Ω евклидова

пространства \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Эволюция состояний во времени описывается краевой задачей [36–38]:

$$y_{tt} = Ly + f(t, x), \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \quad (1.1)$$

$$y(t_0, x) = y_0(x), \quad y_t(t_0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial y}{\partial N} + \sigma y = g(x) u(t), \quad t \in T, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.3)$$

где σ — неотрицательная постоянная; y_0 — начальное положение системы; y_1 — начальная скорость системы; f и g — заданные функции; $\partial y / \partial N$ — внешняя кономальная производная, соответствующая оператору L ; $u = (u_1, \dots, u_m)$ — векторная функция управляющего воздействия; L — линейный самосопряженный коэрцитивный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка

$$Ly = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) - a(x)y, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad a \geq a_0 = \text{const} > 0.$$

Допустимые текущие значения управления подчинены ограничению $u(t) \in P \subset \mathbb{R}^m$, $t \in T$.

Пусть за движением $z = z[t] = (y[t], y_t[t])$, $t \in T$, управляемой динамической системы осуществляется наблюдение в течение промежутка времени T и в соответствующие текущие моменты времени $t \in T$ приближенно измеряются состояния системы, причем результаты этих измерений $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}[t], y_t^{(\delta)}[t])$ удовлетворяют условию

$$R(z_\delta, z) = \int_T \|y^{(\delta)}[t] - y[t]\|_{L_2(\Omega)}^2 dt + \int_T \|y_t^{(\delta)}[t] - y_t[t]\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 dt \leq \delta^2, \quad (1.4)$$

где δ — числовой параметр, характеризующий точность измерений, $0 \leq \delta \leq \delta_0$.

Задача восстановления состоит в том, чтобы по результатам приближенных измерений $z_\delta = z_\delta[t]$, $t \in T$, наблюдаемого движения системы $z = z[t]$, $t \in T$, приближенно определить (восстановить) ту функцию управляющего воздействия на динамическую систему $u = u(t)$, $t \in T$, которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом результат восстановления $u^{(\delta)} = u^{(\delta)}(t)$, $t \in T$, искомого управляющего воздействия $u = u(t)$, $t \in T$, должен быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений

$$\int_T \|u^{(\delta)}(t) - u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Рассматриваемой задаче можно дать следующую содержательную интерпретацию. В некотором теле (области) Ω с границей Γ распространяется возмущение под действием граничных источников с составляющей по времени u . Эта управляющая составляющая u априори неизвестна и недоступна прямому измерению. Процесс распространения возмущений в теле Ω наблюдается в течение некоторого конечного отрезка времени T . По ходу процесса в текущие моменты времени $t \in T$ измеряется с ошибкой δ положение тела $y[t] = y(t, x)$, $x \in \Omega$, и его скорость $y_t[t] = y_t(t, x)$, $x \in \Omega$. Результатом этих измерений в момент времени $t \in T$ является пара функций $z_\delta[t] = (y^{(\delta)}(t, x), y_t^{(\delta)}(t, x))$, $x \in \Omega$, которые в совокупности для всех моментов времени $t \in T$ удовлетворяют оценке (1.4). Требуется по поступившей информации $z_\delta[t]$, $t \in T$, о приближенных состояниях тела на промежутке времени T приближенно восстановить ту управляющую функцию u , которая порождает наблюдаемое движение системы. При этом восстановление должно быть тем точнее, чем меньше ошибки измерений состояний тела.

Перейдем к математической формализации задачи. Пусть P — выпуклое компактное множество из \mathbb{R}^m ; U — множество всех допустимых управлений в задаче, представляющее собой

множество всех измеримых и интегрируемых с квадратом вектор-функций, которые при почти всех $t \in T$ принадлежат компакту P ,

$$U = \{u \in E : u(t) \in P \text{ п.в. } t \in T\}, \quad E = L_2(T; \mathbb{R}^m).$$

Будем считать, что Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей Γ (для дальнейшего достаточно, чтобы область Ω была строго липшицевой [37, с. 30]). Пусть $f \in L_2(Q)$, $g \in L_2^m(\Gamma)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$, коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям: $a_{ij} \in L_\infty(\Omega)$, $a \in L_\infty(\Omega)$, причем существуют такие постоянные $\nu = \text{const} > 0$ и $\mu = \text{const} \geq \nu$, что для любого $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$ выполняются неравенства

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

Известно [38; 39], что при указанных условиях на параметры краевой задачи (1.1)–(1.3) для каждого управления $u \in E$ имеется единственное слабое решение $y = y(t, x) = y(t, x; u)$, $(t, x) \in Q$, этой краевой задачи из пространства $L_2(Q)$ такое, что $y \in C(T; L_2(\Omega))$, $y_t \in C(T; W_2^1(\Omega)^*)$. Пару функций $z = (y, y_t) = (y(\cdot; u), y_t(\cdot; u))$ иногда будем называть движением динамической системы (1.1)–(1.3), порожденным управлением $u \in U$, и будем обозначать его символом $z = z[\cdot; u] = z[t; u] = (y(t, \cdot; u), y_t(t, \cdot; u))$, $t \in T$.

Введем в рассмотрение множество $Z = \{z = z[\cdot; u] : u \in U\}$ всех возможных движений системы (1.1)–(1.3), отвечающих всем возможным управлениям. Для каждого движения $z = (y, y_t) \in Z$ введем множество $U(z) = \{u \in U : z[\cdot; u] = z\}$ всех допустимых управлений, порождающих данное движение, и множество всех возможных измерений этого движения

$$Y_\delta(z) = \{z_\delta \in Y : R(z_\delta, z) \leq \delta^2\}, \quad Y = L_2(T; L_2(\Omega)) \times L_2(T; W_2^1(\Omega)^*).$$

Решение задачи восстановления будем искать в классе алгоритмов, каждый из которых отождествим с семейством отображений (методов)

$$D = \{D_\delta : 0 \leq \delta \leq \delta_0\}, \quad D_\delta : Y \rightarrow E.$$

Для формулировки задачи введем обозначения

$$r_\delta(z) = \sup \{\rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] : z_\delta \in Y_\delta(z)\}, \quad z = (y, y_t) \in Z,$$

$$\rho[D_\delta(z_\delta), U(z)] = \min \{\|D_\delta(z_\delta) - v\|_E : v \in U(z)\}.$$

З а д а ч а. Требуется построить алгоритм D , который на любом наблюдаемом движении динамической системы $z \in Z$ обладает регуляризующим свойством

$$r_\delta(z) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Все рассматриваемые в работе числовые величины и пространства считаются вещественными, измеримость и интегрируемость понимаются по Лебегу, определения используемых пространств имеются, например, в [36–38].

2. Решение задачи

Отметим некоторые свойства динамической системы и ее движений, которые будут использоваться при обосновании выбранных способов решения задачи восстановления.

Множество U выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в E .

Если последовательность управлений $\{u_k\} \subset E$ слабо в E сходится к элементу $u_0 \in E$, то соответствующая последовательности управлений последовательность движений $\{z[\cdot; u_k]\}$ сходится в пространстве $\mathfrak{B} = C(T; L_2(\Omega)) \times C(T; W_2^1(\Omega)^*)$ к движению $z[\cdot; u_0]$.

Отображение $A: E \ni u \rightarrow z[\cdot; u] \in \mathfrak{B}$ линейно и компактно.

Множество Z выпукло и компактно в пространстве \mathfrak{B} .

Для любого $z \in Z$ множество $U(z)$ непусто, выпукло, ограничено, замкнуто и слабо компактно в E , оно содержит в себе единственный элемент $u^*(z)$ минимальной E -нормы.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам подобных утверждений в [29–35; 38]. Укажем, что отображение A не может иметь непрерывного обратного отображения [40, с. 228], поэтому данная задача восстановления некорректна и ее решение требует привлечения методов регуляризации.

Рассмотрим один из вариантов решения задачи. Введем обозначения

$$F_\alpha^*(z) = \min \{F_\alpha(z, u) : u \in U\}, \quad (2.1)$$

$$U_\alpha^*(z) = \{u \in U : F_\alpha(z, u) = F_\alpha^*(z)\}, \quad (2.2)$$

$$F_\alpha = F_\alpha(z, u) = R(z, z[\cdot; u]) + \alpha \|u\|_E^2, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Отметим некоторые свойства функционала (2.3), экстремальной задачи (2.1) и множества ее решений (множества минимизирующих элементов) (2.2).

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ функционал (2.3) полунепрерывен снизу по u относительно слабой сходимости в E .

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ экстремальная задача (2.1) однозначно разрешима, множество ее решений $U_\alpha^*(z)$ состоит из одного элемента $u_\alpha^*(z) \in U$.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (2.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^*(z)$.

Эти утверждения доказываются так же, как доказываются аналогичные утверждения в [29–35; 40–44].

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для $\delta \in [0, \delta_0]$ и $z = (y, y_t) \in Y$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(z)$ по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U : F_\alpha^*(z) \leq F_\alpha(z, v) \leq F_\alpha^*(z) + \varepsilon, \quad (2.4)$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (2.1). Величины α и ε будут являться параметрами метода (параметрами регуляризации), они будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ .

Теорема 2.1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.4), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z = (y, y_t) \in Z$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.4) при $\delta \rightarrow 0$ имеет место сильная в E сходимость $v^{(\delta)} \rightarrow u^*(z)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобного утверждения в [29–35].

Рассмотрим еще один вариант решения задачи восстановления.

Пусть W есть банахово пространство функций ограниченной полной вариации [14; 21; 40]: $W = \{u \in E : V[u] < \infty\}$, $\|u\|_W = \|u\|_E + V[u]$, где $V[u]$ — полная вариация функции $u : T \ni t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^m$,

$$V[u] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^l \|u(t_i) - u(t_{i-1})\|_{\mathbb{R}^m} : \sigma \in \Sigma \right\};$$

супремум берется по множеству Σ всех конечных разбиений σ отрезка T , $\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = \vartheta$.

Отметим некоторые свойства пространства W и его нормы.

Пространство W компактно вкладывается в E , т.е. оператор вложения W в E непрерывен и каждое ограниченное множество из W он переводит в предкомпактное множество из E . Всякое замкнутое множество из W замкнуто и в E .

Поточечный предел ограниченной в W последовательности функций также является функцией из W .

Функционал $V[\cdot]$ и норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывны снизу относительно поточечной сходимости аргументов, т.е. если последовательность функций ограниченной вариации $\{v_k\}$ сходится поточечно на T к некоторой функции ограниченной вариации v_0 , то $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$ и $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.

Функционал $V[\cdot]$ и норма $\|\cdot\|_W$ полунепрерывны снизу относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W , т.е. если $\{v_k\}$ есть ограниченная последовательность из W , которая в E сходится к некоторой функции $v_0 \in E$, то $v_0 \in W$ и $V[v_0] \leq \liminf V[v_k]$, $\|v_0\|_W \leq \liminf \|v_k\|_W$.

Для любого замкнутого шара $S_r[w_0] = \{w \in W: \|w - w_0\|_W \leq r\}$ множество $U \cap S_r[w_0]$ выпукло, замкнуто в E и W , компактно и слабо компактно в E , компактно относительно поточечной сходимости на T .

Эти утверждения обосновываются так же, как обосновываются аналогичные утверждения в [29–31].

Введем обозначения

$$\widehat{F}_\alpha^*(z) = \min \{\widehat{F}_\alpha(z, u): u \in U_W\}, \quad U_W = U \cap W, \quad (2.6)$$

$$\widehat{U}_\alpha^*(z) = \{u \in U_W: \widehat{F}_\alpha(z, u) = \widehat{F}_\alpha^*(z)\}, \quad (2.7)$$

$$\widehat{F}_\alpha = \widehat{F}_\alpha(z, u) = R(z, z[\cdot; u]) + \alpha \Lambda(u), \quad \Lambda(u) = \|u\|_E^2 + V[u]. \quad (2.8)$$

Сформулируем несколько утверждений, которые будут использоваться в дальнейшем.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ функционал (2.8) полунепрерывен снизу по u относительно сходимости в E ограниченных последовательностей из W .

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ экстремальная задача (2.6) однозначно разрешима, множество ее решений $\widehat{U}_\alpha^*(z)$ состоит из одного элемента $\widehat{u}_\alpha^*(z) \in U_W$.

При любых $\alpha > 0$, $z \in Y$ всякая минимизирующая последовательность в задаче (2.6) сходится сильно в E к элементу $\widehat{u}_\alpha^*(z)$.

Пусть для $z \in Z$ множество $S = U(z) \cap W \neq \emptyset$, тогда во множестве S существует единственный (Λ, S) -нормальный элемент $\widehat{u} = \widehat{u}(\Lambda, S)$, т.е. элемент, удовлетворяющий условию $\Lambda(\widehat{u}) = \inf \{\Lambda(u): u \in S\}$.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам подобных утверждений, сформулированных выше.

Построим алгоритм, решающий задачу восстановления. Для $\delta \in [0, \delta_0]$ и $z = (y, y_t) \in Y$ определим реализацию (значение) метода $D_\delta(z)$ по правилу

$$D_\delta(z) = v \in U_W: \widehat{F}_\alpha^*(z) \leq \widehat{F}_\alpha(z, v) \leq \widehat{F}_\alpha^*(z) + \varepsilon. \quad (2.9)$$

Теорема 2.2. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования (2.5). Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.9), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z \in Z_* = \{z \in Z: U(z) \cap W \neq \emptyset\}$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, если \widehat{u} есть (Λ, S) -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, то при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.9) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $v^{(\delta)} \rightarrow \widehat{u}$ сильно в E ; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \widehat{u}$ в \mathbb{R}^m поточечно на T ; 3) $V[v^{(\delta)}] \rightarrow V[\widehat{u}]$; 4) $v^{(\delta)}(t) \rightarrow \widehat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m равномерно по t на любом отрезке, не содержащем точек разрыва функции \widehat{u} .

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству подобного утверждения в [29–35].

3. Восстановление распределенных по границе управлений

Рассмотрим случай распределенных по границе управлений $u = u(t, x)$, $t \in T$, $x \in \Gamma_* \subseteq \Gamma$. В этом случае, когда искомая функция является функцией нескольких переменных, полученные выше результаты не переносятся на данную ситуацию непосредственно. Кроме того, для функций нескольких переменных существует около десятка не эквивалентных определений вариации [22; 23; 27; 28]. В этом разделе сформулируем несколько утверждений, близких к теореме 2.2 и использующих то или иное понятие вариации. Пусть для простоты $n = 2$, $m = 1$. Допустим, что некоторая часть Γ_* границы Γ параметризована переменной $s \in [s_1, s_2]$ и допустимые управления сосредоточены на параметризованном участке. Пусть $\Pi = T \times [s_1, s_2]$, $E = L_2(\Pi)$, $U = \{u \in E: u(t, s) \in P \text{ п.в. } (t, s) \in \Pi\}$. В качестве стабилизатора рассмотрим функционал $\Lambda(u) = \|u\|_E^2 + \|u\|_W$, где $\|\cdot\|_W$ — норма в банаховом пространстве W функций двух переменных $u = u(t, s)$, $(t, s) \in \Pi$, с конечной полной вариацией $VH(u, \Pi)$ [22, с. 89]. Повторяя приведенную выше схему решения задачи восстановления и опираясь на результаты [22, с. 89–91], получим следующее утверждение, аналогичное теореме 2.2.

Теорема 3.1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования (2.5). Пусть $z \in Z_*$ и управление $\hat{u} - (\Lambda, S)$ -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, пусть это управление является единственным в существенном [22, с. 90] и непрерывным в области $\Pi_* \subseteq \Pi$ вместе с функцией $\pi(t, x) = VH(\hat{u}, \Pi_{t_0 s_1}^{t, s})$ [22, с. 89]. Тогда алгоритм D , состоящий из методов (2.9), решает задачу восстановления на наблюдаемом движении z , т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta(z_\delta)$ методов (2.9) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R} поточечно на Π ; 3) $VH(v^{(\delta)}, \Pi) \rightarrow VH(\hat{u}, \Pi)$; 4) $v^{(\delta)}(t, s) \rightarrow \hat{u}(t, s)$ в \mathbb{R} равномерно по (t, s) из любой замкнутой подобласти $\Pi^* \subset \Pi_*$.

Аналогичное утверждение справедливо при замене полной вариации $VH(u, \Pi)$ на вариацию Арцела $VA(u, \Pi)$ [22, с. 89–91]. При этом второе утверждение переформулируется так: 2) $v_\delta \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R} в точках непрерывности функции \hat{u} .

4. Построение минимизирующих последовательностей

Для приближенного решения задачи (2.6), т.е. для получения ε -оптимальных решений, удовлетворяющих условию (2.9), необходимо уметь строить минимизирующие последовательности для задачи (2.6). Для построения таких последовательностей можно воспользоваться градиентными и субградиентными методами [41–44]. Установим в этом направлении некоторые вспомогательные утверждения. Исследование аналогичных вопросов для задачи (2.1) проще, поскольку в целевом функционале (2.3) отсутствует вариация.

Представим функционал \hat{F}_α в виде суммы соответствующих слагаемых:

$$\hat{F}_\alpha(z, u) = J_1(z, u) + \alpha J_2(u) + \alpha J_3(u),$$

$$J_1(z, u) = R(z, z[\cdot; u]), \quad J_2(u) = \|u\|_E^2, \quad J_3(u) = V[u].$$

Функционалы J_1 и J_2 дифференцируемы по Фреше по переменной u в каждой точке $u \in E$ (как функционалы $E \rightarrow \mathbb{R}$) и в каждой точке $u \in W$ (как функционалы $W \rightarrow \mathbb{R}$), функционал J_3 не является дифференцируемым по Фреше или Гато в каждой точке $u \in W$ (например, он не дифференцируем по Гато в точке $u = 0$). Функционал \hat{F}_α выпуклый и непрерывный на W и поэтому он субдифференцируем по u на W [42]: $\partial_u \hat{F}_\alpha(z, u) = J'_{1u}(z, u) + \alpha J'_2(u) + \alpha \partial J_3(u)$.

Однако практическое применение субградиентных методов для минимизации функционала \hat{F}_α наталкивается на трудности, связанные со сложностью вычисления субдифференциала $\partial J_3(u)$ и описания сопряженного пространства W^* . Некоторые из возможных подходов к

численной реализации задачи минимизации могут быть связаны с аппроксимацией функционала J_3 подходящими дифференцируемыми функционалами [14; 22–26]. В данной работе будет реализован подход [15–20], связанный с заменой пространства W каким-либо гильбертовым пространством, например пространством Соболева $H = W_2^1(T)^m$, которое должно быть вложено в W и достаточно хорошо аппроксимировать его элементы. Это позволит воспользоваться техникой гильбертова пространства и упростить вычисление градиентов и субградиентов целевого функционала.

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$F_\alpha^\circ(z) = \inf \{ \widehat{F}_\alpha(z, u) : u \in U_H \}, \quad U_H = U \cap H. \quad (4.1)$$

Как и в [29–31], можно показать, что $F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z)$. Для элемента $u \in H$

$$V[u] = \int_T \| \dot{u}(t) \|_{\mathbb{R}^m} dt. \quad (4.2)$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (2.6) воспользуемся методом проекции субградиента [41, гл. 5, § 3; 43]:

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k w_k), \quad \beta_k > 0, \quad w_k \in \partial_u \widehat{F}_\alpha(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение из U_H ; $Pr(w)$ — проекция точки $w \in H$ на множество U_H (поскольку множество U_H выпукло и замкнуто в H , то проекция существует и единственна [41, гл. 8, § 4]); $\{\beta_k\}$ — параметры метода, подлежащие подходящему выбору.

Теорема 4.1. Пусть в итерационном процессе (4.3) $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение из U_H , w_k — произвольный субградиент из субдифференциала $\partial_u \widehat{F}_\alpha(z, u^{(k)})$, параметры метода $\{\beta_k\}$ удовлетворяют условию

$$\beta_k = 1, \quad \text{если } w_k = 0; \quad \beta_k = \gamma_k / \|w_k\|_H, \quad \text{если } w_k \neq 0; \quad (4.4)$$

$$\gamma_k > 0, \quad \gamma_k \rightarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty. \quad (4.5)$$

Тогда 1) $\widehat{F}_\alpha(z, u_*^{(k)}) \rightarrow F_\alpha^\circ(z) = \widehat{F}_\alpha^*(z)$, где $\widehat{F}_\alpha(z, u_*^{(k)}) = \min \{ \widehat{F}_\alpha(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k} \}$; 2) минимизирующая последовательность $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$ задачи (4.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^*(z)$; 3) $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_\alpha^*(z)]$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [33].

5. Аппроксимация задачи

Воспользуемся для аппроксимации задачи методом разделения переменных. Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) представим в виде ряда Фурье

$$y = y(t, x; u) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in \Omega,$$

$$\ddot{y}_i(t) = -\lambda_i y_i(t) + f_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(t_0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(t_0) = y_{1i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$y_i(t) = y_i(t; u) = y_{0i} \cos(\sqrt{\lambda_i}(t - t_0)) + y_{1i} (\lambda_i)^{-1/2} \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - t_0))$$

$$+ (\lambda_i)^{-1/2} \int_{t_0}^t f_i(\tau) \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)) d\tau + (\lambda_i)^{-1/2} g^{(i)} \int_{t_0}^t u(\tau) \sin(\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)) d\tau,$$

где $y_{0i} = \langle y_0, \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$; $y_{1i} = \langle y_1, \omega_i \rangle_*$ — значение функционала $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$ на элементе $\omega_i \in W_2^1(\Omega)$; $g^{(i)} = (\langle g_1, \omega_i \rangle_{L_2(\Gamma)}, \dots, \langle g_m, \omega_i \rangle_{L_2(\Gamma)})$; $f_i(t) = \langle f(t, \cdot), \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}$; $\{\lambda_i, \omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ — решение в $W_2^1(\Omega)$ спектральной задачи

$$L\omega = -\lambda\omega \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \omega}{\partial N} + \sigma\omega = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \langle \omega, \omega \rangle_{L_2(\Omega)} = 1.$$

Известно [36; 37], что спектральная задача разрешима для счетного набора вещественных положительных чисел $\lambda = \lambda_i$, $i \in \mathbb{N}$, каждое из которых имеет конечную кратность, и их можно упорядочить (с учетом их кратности) в порядке возрастания $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$, $\lambda_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, соответствующие собственным числам λ_i собственные функции ω_i образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ и базис в $W_2^1(\Omega)$.

Для любых $t \in T$ и $u \in U$ справедлива оценка со сходящимся мажорирующим рядом [39]:

$$\begin{aligned} & \|y(t, \cdot; u)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|y_t(t, \cdot; u)\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2(t; u) + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \dot{y}_i^2(t; u) \leq 8 \sum_{i=1}^{\infty} y_{0i}^2 \\ & + 8 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} y_{1i}^2 + 4 \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau + 8mC_P^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j)^{-1} \langle g_i, \omega_j \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 \right) < \infty, \\ & C_P = \sup \{ \|w\|_{\mathbb{R}^m} : w \in P \}, \end{aligned}$$

из которой, в частности, следует сходимость остатка ряда $R_p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} R_p &= 8 \sum_{i=p}^{\infty} y_{0i}^2 + 8 \sum_{i=p}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} y_{1i}^2 + 4 \sum_{i=p}^{\infty} (\lambda_i)^{-1} \int_T f_i(\tau)^2 d\tau \\ &+ 8mC_P^2 \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=p}^{\infty} (\lambda_j)^{-2} \langle g_i, \omega_j \rangle_{L_2(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned}$$

Фиксируем какое-нибудь $p \in \mathbb{N}$ и рассмотрим экстремальную задачу

$$\Phi_\alpha^{(p)}(z) = \min \{ F_\alpha^{(p)}(z, u) : u \in U_W \}, \quad (5.1)$$

$$F_\alpha^{(p)} = F_\alpha^{(p)}(z, u) = J_1^{(p)}(z, u) + \alpha \Lambda(u),$$

$$J_1^{(p)}(z, u) = \sum_{i=1}^p \int_T (y_i[t] - y_i(t; u))^2 dt + \sum_{i=1}^p (\lambda_i)^{-1} \int_T (\dot{y}_i[t] - \dot{y}_i(t; u))^2 dt,$$

$$y_i[t] = \langle y[t], \omega_i \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \dot{y}_i[t] = \langle y_t[t], \omega_i \rangle_*, \quad z = (y[\cdot], y_t[\cdot]) \in Y.$$

Экстремальная задача (5.1) имеет единственное решение $u_\alpha^{(p)}(z) \in U_W$, всякая минимизирующая последовательность в задаче (5.1) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$.

Рассмотрим следующий алгоритм для решения исходной задачи реконструкции:

$$D = \{ D_\delta^{(p)} : 0 \leq \delta \leq \delta_0, p \in \mathbb{N} \}, \quad D_\delta^{(p)} : Y \rightarrow E.$$

Для любых $\delta \in [0, \delta_0]$, $p \in \mathbb{N}$, $z \in Y$ определим реализацию метода

$$D_\delta^{(p)}(z) = v \in U_W : \Phi_\alpha^{(p)}(z) \leq F_\alpha^{(p)}(z, v) \leq \Phi_\alpha^{(p)}(z) + \varepsilon, \quad (5.2)$$

где ε — неотрицательный параметр, характеризующий точность по функционалу решения экстремальной задачи (5.1). Величины α , ε , p будут являться параметрами регуляризации, они будут выбираться в зависимости от величины погрешности измерений δ .

Теорема 5.1. Пусть параметры регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$, $p = p(\delta)$, $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ удовлетворяют условиям согласования

$$(\varepsilon(\delta) + \delta^2 + R_p(\delta)) \alpha(\delta)^{-1} \rightarrow 0, \quad \varepsilon(\delta) \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad p(\delta) \rightarrow \infty, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда алгоритм D , состоящий из методов (5.2), решает задачу восстановления на любом наблюдаемом движении $z \in Z_*$, т.е. $r_\delta(z) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Кроме того, если \hat{u} есть (Λ, S) -нормальный элемент множества $S = U(z) \cap W$, то при любых измерениях $z_\delta \in Y_\delta(z)$ для реализаций $v^{(\delta)} = D_\delta^{(p(\delta))}(z_\delta)$ методов (5.2) при $\delta \rightarrow 0$ имеют место следующие сходимости: 1) $V[v^{(\delta)}] \rightarrow V[\hat{u}]$; 2) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ сильно в E ; 3) $v^{(\delta)} \rightarrow \hat{u}$ в \mathbb{R}^m поточечно на T ; 4) $v^{(\delta)}(t) \rightarrow \hat{u}(t)$ в \mathbb{R}^m равномерно по t из любого отрезка, не содержащего точек разрыва функции \hat{u} .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2.

Укажем способ построения минимизирующих последовательностей в задаче (5.1). Этот способ аналогичен способу, изложенному в разд. 4.

Рассмотрим новую вспомогательную экстремальную задачу

$$\Psi_\alpha^{(p)}(z) = \inf \{F_\alpha^{(p)}(z, u) : u \in U_H\}. \quad (5.3)$$

Можно показать, что $\Psi_\alpha^{(p)}(z) = \Phi_\alpha^{(p)}(z)$, любая минимизирующая последовательность в задаче (5.3) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$.

Функционал $F_\alpha^{(p)} : H \rightarrow \mathbb{R}$ не дифференцируем по переменной u ни по Фреше, ни по Гато во всех точках $u \in H$, но он субдифференцируем в каждой точке $u \in H$:

$$\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u) = J_{1u}^{(p)'}(z, u) + \alpha J_2'(u) + \alpha \partial J_3(u).$$

Для построения минимизирующих последовательностей в задаче (5.3) воспользуемся методом проекции субградиента

$$u^{(k+1)} = Pr(u^{(k)} - \beta_k w_k), \quad \beta_k > 0, \quad w_k \in \partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.4)$$

где $u^{(0)}$ — начальное приближение из U_H ; $Pr(w)$ — проекция в H точки $w \in H$ на множество U_H ; w_k — субградиент субдифференциала $\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)})$; $\{\beta_k\}$ — параметры метода, подлежащие подходящему выбору.

Теорема 5.2. Пусть в итерационном процессе (5.4) $u^{(0)}$ — произвольное начальное приближение из U_H , w_k — произвольный субградиент из $\partial_u F_\alpha^{(p)}(z, u^{(k)})$, параметры метода $\{\beta_k\}$ удовлетворяют условиям (4.4), (4.5). Тогда 1) $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) \rightarrow \Psi_\alpha^{(p)}(z) = \Phi_\alpha^{(p)}(z)$, где $F_\alpha^{(p)}(z, u_*^{(k)}) = \min \{F_\alpha^{(p)}(z, u^{(i)}) : i \in \overline{0, k}\}$; 2) минимизирующая последовательность $\{u_*^{(k)}\} \subset U_H$ задачи (5.3) сходится сильно в E к элементу $u_\alpha^{(p)}(z)$; 3) $V[u_*^{(k)}] \rightarrow V[u_\alpha^{(p)}(z)]$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.1.

З а м е ч а н и е. В случае краевых условий первого рода $y = g(x) u(t)$ задача восстановления формализуется с сохранением результатов в пространстве движений $C(T; \overset{\circ}{W}_{2,0}^1(\Omega)^*) \times C(T; W_{2,0}^2(\Omega)^*)$ с функционалом невязки

$$F_\alpha = F_\alpha(z, u) = \int_T \|y[t] - y(t; u)\|_{\overset{\circ}{W}_{2,0}^1(\Omega)^*}^2 dt + \int_T \|y_t[t] - y_t(t; u)\|_{W_{2,0}^2(\Omega)^*}^2 dt + \alpha \Lambda(u).$$

6. Численное моделирование

Проведем численное моделирование задачи восстановления управления в системе

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = T \times \Omega, \\ y(0, x) &= y_0(x), \quad y_t(0, x) = y_1(x), \quad x \in \Omega = (0, l), \\ y_x(t, 0) &= u(t), \quad y_x(t, l) = 0, \quad t \in T = [0, \vartheta]. \end{aligned}$$

По условию $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in W_2^1(\Omega)^*$, $a = \text{const} > 0$. Пусть множество геометрических ограничений на управления P есть отрезок $P = [\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}$, $\mu_1 < \mu_2$, приближенное измерение положений динамической системы моделируется соотношением

$$\begin{aligned} y^{(\delta)}(t, x) &= y(t, x; u) + \delta \xi(t, x), \quad \int_T \|\xi(t, \cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq 1, \\ y_t^{(\delta)}(t, x) &= y_t(t, x; u) + \delta \eta(t, x), \quad \int_T \|\eta(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)^*}^2 dt \leq 1. \end{aligned}$$

В данном случае $\lambda_0 = 0$, $\omega_0(x) = \sqrt{1/l}$, $g^{(0)} = \sqrt{1/l}$,

$$\lambda_i = \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2, \quad \omega_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos(\sqrt{\lambda_i} x), \quad g^{(i)} = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\ddot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(0) = y_{1i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$y_0(t) = y_0(t; u) = y_{00} + y_{10} t + g^{(0)} \int_0^t \int_0^\tau u(s) ds d\tau,$$

$$\begin{aligned} y_i(t) &= y_i(t; u) = y_{0i} \cos(at \sqrt{\lambda_i}) + y_{1i} (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(at \sqrt{\lambda_i}) \\ &+ (a^2 \lambda_i)^{-1/2} g^{(i)} \int_0^t u(\tau) \sin(a \sqrt{\lambda_i} (t - \tau)) d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$y = y(t, x) = y(t, x; u) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \omega_i(x), \quad t \in T, \quad x \in [0, l].$$

Далее фиксируем какое-либо натуральное число $p \in \mathbb{N}$ и рассматриваем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{y}_i(t) = -a^2 \lambda_i y_i(t) + g^{(i)} u(t), \quad t \in T, \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad \dot{y}_i(0) = y_{1i}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (6.1)$$

Дискретизируем задачу (5.3). Фиксируем разбиение Δ отрезка T с равномерным шагом h точками $t_k \in T$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \vartheta$. На разбиении Δ определим дискретное управление $u_h = (u_0^{(h)}, \dots, u_m^{(h)})$ как элемент евклидова пространства \mathbb{R}^{m+1} , удовлетворяющий геометрическому ограничению $u_h \in P^{m+1} = P_h$. Движение системы (6.1)

$$z^{(p)} = z^{(p)}[t; u] = (y^{(p)}[t; u], \dot{y}^{(p)}[t; u]) = ((y_0(t; u), \dots, y_p(t; u)), (\dot{y}_0(t; u), \dots, \dot{y}_p(t; u))), \quad t \in T,$$

в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1}$, соответствующее управлению $u \in U$, аппроксимируем упорядоченным набором сеточных функций $z_h^{(p)} = z_h^{(p)}[\cdot; u_h] = ((y_{0h}, \dots, y_{ph}), (\dot{y}_{0h}, \dots, \dot{y}_{ph}))$, $y_{ih} = y_{ih}(\cdot; u_h) = (y_{ih}(t_0; u_h), \dots, y_{ih}(t_m; u_h))$, $\dot{y}_{ih} = \dot{y}_{ih}(\cdot; u_h) = (\dot{y}_{ih}(t_0; u_h), \dots, \dot{y}_{ih}(t_m; u_h))$,

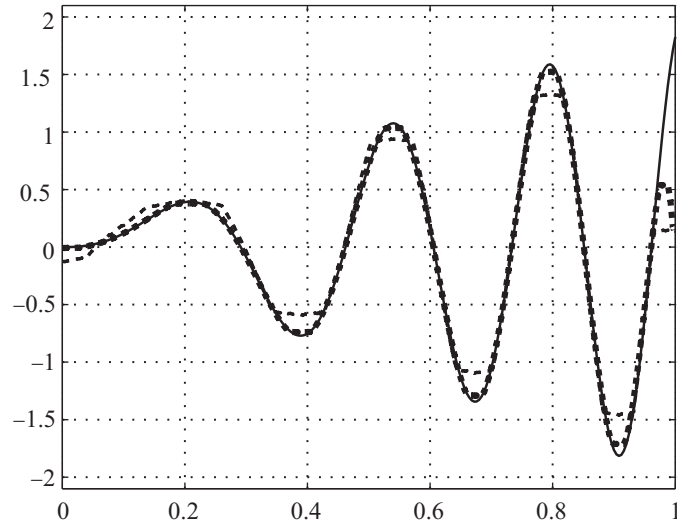


Рис. 1. Восстановление гладкого управления.

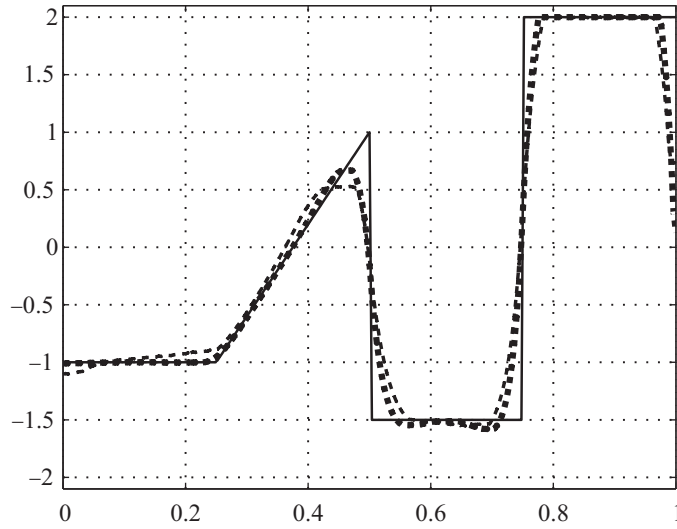


Рис. 2. Восстановление разрывного управления.

$i = 0, \dots, p$, и назовем дискретным движением системы (6.1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p+1}$, соответствующим дискретному управлению $u_h \in P_h$. Из (6.1) находим

$$y_{0h}[t_{k+1}; u_h] = y_{0h}[t_k; u_h] + \dot{y}_{0h}[t_k; u_h] h + g^{(0)} u_k^{(h)} (h^2/2), \quad \dot{y}_{0h}[t_{k+1}; u_h] = \dot{y}_{0h}[t_k; u_h] + g^{(0)} u_k^{(h)} h,$$

$$y_{ih}[t_{k+1}; u_h] = y_{ih}[t_k; u_h] \cos(a h \sqrt{\lambda_i}) + \dot{y}_{ih}[t_k; u_h] (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}) + g^{(i)} u_k^{(h)} (a^2 \lambda_i)^{-1} (1 - \cos(a h \sqrt{\lambda_i})),$$

$$\dot{y}_{ih}[t_{k+1}; u_h] = -y_{ih}[t_k; u_h] a \sqrt{\lambda_i} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}) + \dot{y}_{ih}[t_k; u_h] \cos(a h \sqrt{\lambda_i}) + g^{(i)} u_k^{(h)} (a^2 \lambda_i)^{-1/2} \sin(a h \sqrt{\lambda_i}),$$

$$y_{ih}[t_0; u_h] = y_{0i}, \quad \dot{y}_{ih}[t_0; u_h] = \dot{y}_{1i}, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad i = 1, \dots, p.$$

Целевой функционал в (5.3) аппроксимируем конечными суммами

$$F_{\alpha h}^{(p)} = F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) = J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) + \alpha J_{2h}(u_h) + \alpha J_{3h}(u_h),$$

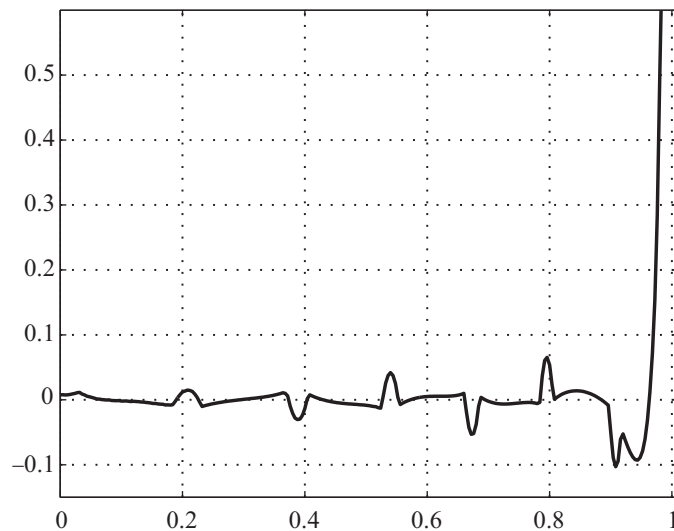


Рис. 3. Погрешность восстановления гладкого управления.

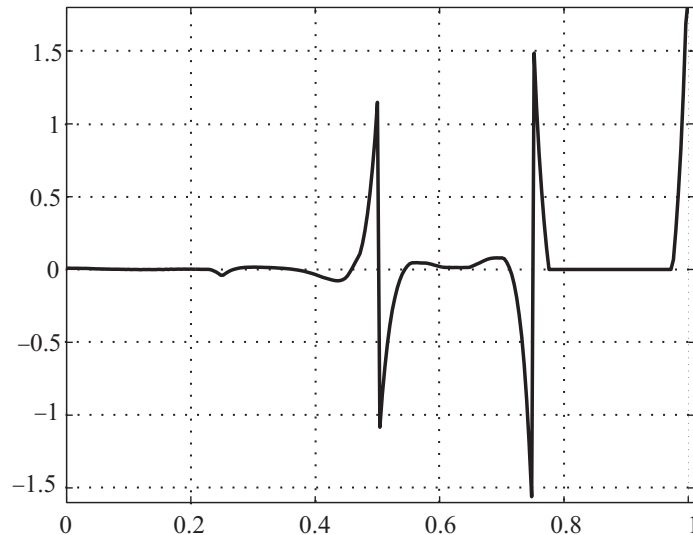


Рис. 4. Погрешность восстановления разрывного управления.

первые две суммы представляют собой соответственно аппроксимацию интегралов $J_1^{(p)}$ и J_2 методом трапеций на разбиении Δ , третья сумма J_{3h} представляет собой аппроксимацию полной вариации $V[u]$ интегральной суммой на разбиении Δ в соответствии с формулой (4.2).

Исходной бесконечномерной экстремальной задаче (5.3) поставим в соответствие конечномерную экстремальную задачу

$$\Psi_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}) = \min \{F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h) : u_h \in P_h\}. \quad (6.2)$$

Решение задачи (6.2) примем за дискретное приближение к решению задачи (5.3). Задача (6.2) разрешима единственным образом, поскольку целевая функция $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ непрерывна и строго выпукла на \mathbb{R}^{m+1} , а множество P_h компактно в \mathbb{R}^{m+1} . Первые два слагаемых $J_{1h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ и $J_{2h}(\cdot)$ функции $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы на \mathbb{R}^{m+1} , третье слагаемое $J_{3h}(\cdot)$ не является дифференцируемым во всех точках \mathbb{R}^{m+1} , но оно непрерывно и выпукло на \mathbb{R}^{m+1} и поэтому является субдифференцируемым на \mathbb{R}^{m+1} . Таким образом, функция $F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, \cdot)$ субдифференцируема на \mathbb{R}^{m+1} . Приближенное решение задачи (6.2)

Т а б л и ц а 1

Результаты восстановления гладкого управления

Погрешность δ	Невязка	Относительная погрешность
0.5	0.5147	64.1706
0.1	0.2288	28.5216
0.05	0.1874	23.3683
0.01	0.1668	20.7941
0.005	0.1656	20.6433

Т а б л и ц а 2

Результаты восстановления разрывного управления

Погрешность δ	Невязка	Относительная погрешность
0.5	0.4886	35.5082
0.1	0.3404	24.7384
0.05	0.3061	22.2442
0.01	0.3051	22.1708
0.005	0.3050	22.1660

будем искать методом проекции субградиента в форме $u_h^{[k+1]} = Pr_h(u_h^{[k]} - \beta_k w_h^{[k]})$, $k = 0, 1, \dots$, где $\partial_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h^{[k]}) \ni w_h^{[k]}$ — субградиент по переменной u_h целевой функции в точке $u_h^{[k]}$; $Pr_h(w_h)$ — проекция точки $w_h \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклое компактное множество P_h ; в качестве начального приближения выбирается какой-нибудь элемент $u_h^{[0]} \in P_h$; $\{\beta_k\}$ — последовательность параметров метода, удовлетворяющая условиям вида (4.4), (4.5).

Субдифференциал $\partial_u F_{\alpha h}^{(p)}(z_h^{(p)}, u_h)$ целевой функции вычисляется достаточно просто [29–35]. Выпишем только субдифференциал функционала $J_{3h}(u_h)$

$$\partial J_{3h}(u_h) = \partial \left[\sum_{k=0}^{m-1} |u_{k+1}^{(h)} - u_k^{(h)}| \right] = \sum_{k=0}^{m-1} d_k,$$

$d_k = v_k$ при $u_{k+1}^{(h)} > u_k^{(h)}$, $d_k = -v_k$ при $u_{k+1}^{(h)} < u_k^{(h)}$, $d_k = co\{v_k, -v_k\}$ при $u_{k+1}^{(h)} = u_k^{(h)}$, где $v_k = (0, \dots, 0, -1_k, 1_{k+1}, 0, \dots, 0)$ — элемент пространства \mathbb{R}^{m+1} , у которого стоит -1 на месте с номером k и 1 на месте с номером $k+1$; $co\{v_k, -v_k\}$ — замкнутая выпуклая оболочка в \mathbb{R}^{m+1} двух элементов v_k и $-v_k$.

Проекция $Pr_h(v_h) = (w_0, \dots, w_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ элемента $v_h = (v_0, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ на выпуклый компакт P_h вычисляется по правилу: $w_k = v_k$ при $v_k \in P$, $w_k = \mu_1$ при $v_k < \mu_1$, $w_k = \mu_2$ при $v_k > \mu_2$, $k = 0, \dots, m$.

Погрешность измерений для дискретной задачи будем моделировать соотношениями $\xi_{ih} = (\xi_{ih}(t_0), \dots, \xi_{ih}(t_m))$, $\eta_{ih} = (\eta_{ih}(t_0), \dots, \eta_{ih}(t_m))$, $i = 0, \dots, p$; $\xi_{ih}(t_k) = \varkappa_i \sin(\beta_i t_k)$, $\eta_{ih}(t_k) = \varphi_i \sin(\tau_i t_k)$, $k = 0, \dots, m$, $i = 0, \dots, p$, где \varkappa_i , β_i , φ_i , τ_i — вещественные числа; $\vartheta (\varkappa_0^2 + \dots + \varkappa_p^2 + \varphi_0^2 + \dots + \varphi_p^2) \leq 1$.

Численные эксперименты проводились при следующих параметрах задачи: $a = 1$, $\vartheta = 1$, $l = 1$, $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = 2$, $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, $\varkappa_i = \varphi_i = 1/\sqrt{2p}$, $\beta_i = \tau_i = 2$, $i = 0, \dots, p$, $p = 10$.

В качестве модельных восстанавливаемых управлений были выбраны функции:

- 1) $u = u_{(1)}(t) = 2t \sin(20t^{1.5})$ (гладкое управление);
- 2) $u = u_{(2)}(t) = -1$ при $t \in [0, 0.25]$, $u_{(2)}(t) = 8t - 3$ при $t \in (0.25, 0.5)$, $u_{(2)}(t) = -1.5$ при $t \in [0.5, 0.75)$, $u_{(2)}(t) = 2$ при $t \in [0.75, 1]$ (разрывное управление).

Величины γ_k выбирались по формулам: $\gamma_0 = 1$, $\gamma_k = 1/\sqrt{k}$, $k = 1, 2, \dots$. Начальной функцией в методе проекции субградиента служила нулевая сеточная функция. Она достаточно далеко отстоит от модельного управления как по норме, так и по качественному поведению.

Зависимость параметра $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ точности минимизации в задаче (6.2) от погрешности δ в измерении состояний динамической системы напрямую не контролировалась, точность решения задачи (6.2) определялась выбором количества итераций M в методе проекции субградиента и величиной шага h , характеризующего степень дискретизации задачи.

В расчетах полагалось: $h = 0.004$, $\alpha = 10^{-4} \delta$, $M = 500$.

На рис. 1, 2 сплошной линией показано модельное восстанавливаемое управление, пунктирная линия — результат восстановления при $\delta = 0.1$, линия с точками — результат восстановления при $\delta = 0.005$. На рис. 3, 4 показана погрешность восстановления при $\delta = 0.005$ (приводится график разности модельного управления и его реконструкции). На всех рисунках горизонтальная ось — ось времени, вертикальная ось — ось значений управления и погрешности восстановления соответственно. В табл. 1 и 2 приводятся результаты восстановления гладкого и разрывного управлений соответственно при варьировании параметра δ , относительная погрешность указана в процентах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V.** Inverse problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
5. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 237 с.
6. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
7. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
8. **Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.** Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
9. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 304 с.
10. **Крутько П.Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988. 332 с.
11. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
12. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
13. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
14. **Агеев А.Л.** Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 4. С. 819–836.
15. **Васин В.В.** Регуляризация и дискретная аппроксимация некорректных задач в пространстве функций ограниченной вариации // Докл. РАН. 2001. Т. 376, № 1. С. 11–14.
16. **Васин В.В.** Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.
17. **Васин В.В.** Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.
18. **Vasin V.V., Korotkii M.A.** Tikhonov regularization with nondifferentiable stabilizing functional // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, № 8. P. 853–865.
19. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Об одном алгоритме решения уравнения Фредгольма – Стильтеса // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 3–10.
20. **Васин В.В., Серезникова Т.И.** Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.

21. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 212 с.
22. **Леонов А.С.** Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 326 с.
23. **Giusti E.** Minimal surfaces and functions of bounded variations. Basel: Birkhauser, 1984. 239 p.
24. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty method for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10. P. 1217–1229.
25. **Chavent G., Kunish K.** Regularization of linear least squares problems by total bounded variation control // Optimization and Calculus of variation. 1997. Vol. 2. P. 359–376.
26. **Vogel C.R.** Computation methods for inverse problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.
27. **Витушкин А.Г.** О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955. 326 с.
28. **Clarkson J.A., Adams C.R.** On definition of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc.. 1933. Vol. 35(4). P. 824–854.
29. **Короткий М.А.** Восстановление управлений и параметров методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Изв. вузов. Математика. 2009. № 2. С. 76–82.
30. **Короткий М.А.** Восстановление управлений статическим и динамическим методами регуляризации с негладкими стабилизаторами // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 39–53.
31. **Короткий М.А.** Метод регуляризации Тихонова с негладкими стабилизаторами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2009. 132 с.
32. **Соболева Д.О.** Реконструкция управлений в параболических системах // Вестн. Бурятского гос. ун-та. Математика и информатика. 2010. Вып. 9. С. 59–67.
33. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление управлений в параболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 211–227.
34. **Короткий А.И., Грибанова Е.И.** Восстановление управлений в гиперболических системах методом Тихонова с негладкими стабилизаторами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 17, № 1. С. 99–108.
35. **Короткий А.И., Михайлова Д.О.** Восстановление граничных управлений в параболических системах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 178–197.
36. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
37. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
38. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
39. **Короткий А.И.** Прямые и обратные задачи управляемых систем с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1993. 331 с.
40. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
41. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
42. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
43. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
44. **Демьянов В.Ф., Васильев В.П.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Короткий Александр Илларионович

Поступила 21.10.2011

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. отделом

Институт математики и механики УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: korotkii@imm.uran.ru

Грибанова Екатерина Ивановна

магистрант

Уральский федеральный университет

e-mail: egribanova@list.ru