С. Ю. Фаворов, Об одном свойстве целых кривых, *Функц. анализ и его прил.*, 1975, том 9, выпуск 1, 87–88

Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 1, 1975, 87—88.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ

С. Ю. Фаворов

В теории мероморфных функций в C имеется ряд утверждений, показывающих, что для «почти всех» значений $a \in \mathrm{C}$ функция $m(r, a, f)$ растет существенно медленнее функции $T(r, f)$. Так, хорошо известен следующий результат Р. Неванлинны [1]: для любого $\alpha > 0{,}5$ и всех $a \in \mathrm{C}$, кроме, быть может, множества нулевой емкости, имеет место соотношение $m(r, a, f) = O(T^{\alpha}(r, f))$, $r \to \infty$.

В настоящей заметке показано, что подобная ситуация имеет место и для целых кривых над C^l. При этом в качестве характеристики исключительных множеств мы используем введенное Л. И. Ронкиным понятие Г-емкости *). Метод, который применен для изучения целых кривых, позволяет также получить обобщение одной теоремы Р. Неванлинны о функциях, мероморфных в единичном круге.

1. Определения и обозначения. *Целой кривой порядка k* назовем упорядоченный набор целых в C^l функций $G(z) = (g_1(z), \ldots, g_k(z))$. При этом предполагается, что в этом наборе найдутся хотя бы две линейно независимые функции. Пусть $A = (A_1, \ldots, A_k)$ и $\lambda \in S^{2l-1} = \{\lambda \in \mathrm{C}^l : |\lambda| = 1\}$. Обозначим через $n(t; A; G; \lambda)$ число корней функции **) $G(\lambda\zeta)\cdot A$ в круге $\{\zeta \in \mathrm{C}: |\zeta| \leqslant t\}$. Если при каких-нибудь значениях λ и A справедливо тождество $G(\lambda\zeta)\cdot A \equiv 0$ $\forall \zeta \in \mathrm{C}$, то полагаем $n(t; A; G; \lambda) \equiv \infty$, $\forall t \geqslant 0$. Положим также

$$n(t; A) = n(t; A; G) = \int_{S^{2l-1}} n(t; A; G; \lambda)\, d\sigma(\lambda),$$

где σ — равномерное распределение единичной массы на сфере S^{2l-1}. Далее, положим

$$N(r, r_0; A) = N(r, r_0; A; G) = \int_{r_0}^{r} \frac{n(t; A)}{t}\, dt,$$

$$m(r; A) = m(r; A; G) = \int_{S^{2l-1}} \ln \frac{\|G(\lambda)r)\|\,\|A\|}{|G(\lambda r)\cdot A|}\, d\sigma(\lambda),$$

$$T(r) = T(r; G) = \int_{S^{2l-1}} \ln \|G(\lambda r)\|\, d\sigma(\lambda).$$

Рост этих функций ***) характеризует распределение значений для целой кривой G.

Заметим, что при $l = 1$ эти характеристики совпадают в существенном с соответствующими известными характеристиками Р. Неванлинны, Л. Альфорса, Г. Вейля (см. [3]).

Следующее утверждение является для целых кривых над C^l аналогом первой основной теоремы для мероморфных функций.

Теорема 1. *Для всех $A \in \mathrm{C}^k$ таких, что $G(z)\cdot A \not\equiv 0$, имеет место равенство*

$$m(r_0; A) + T(r) = N(r, r_0; A) + m(r; A) + T(r_0), \quad r > r_0 > 0.$$

Все члены этого равенства конечны. При этом, если $G(0)\cdot A \neq 0$, то справедливо

$$T(r) = N(r, 0; A) + m(r; A) + \ln|G(0)\cdot A| - \ln\|A\|, \quad r > 0.$$

2. Основной результат. Рассмотрим целую кривую порядка $k = \binom{p+m}{m}$. Ее компоненты будем нумеровать с помощью мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_m)$, $0 \leqslant |n| \leqslant p$, где $|n| = n_1 + \ldots + n_m$. Рассмотрим такие векторы $A \in \mathrm{C}^k$, у которых компонента A_n равна $\overline{w}^n = \overline{w}_1^{n_1} \ldots \overline{w}_m^{n_m}$ для некоторого $w \in \mathrm{C}^m$. Для векторов A указанного вида

$$G(z)\cdot A = \sum_{|n|=0}^{p} g_n(z)\cdot w^n.$$

С этих пор вместо $m(r; A)$ и $N(r, r_0; A)$ условимся писать $m(r; w)$ и $N(r, r_0; w)$.

---

*) Определение и свойства Г-емкости см. в [2], стр. 141—152.

**) Для A, $B \in \mathrm{C}^k$ $A\cdot B = A_1\overline{B}_1 + \ldots + A_k\overline{B}_k$, $\|A\| = (A\cdot A)^{1/2}$.

***) Отметим, что величина $T(r)$ неограниченно растет при $r \to \infty$.

Теорема 2. *Для всех* $w \in \mathbf{C}^m$, *кроме, быть может, множества* Г-*емкости нуль* *), *имеет место соотношение*

$$m(r;\ w) = O(T^{\alpha}(r)) \qquad \forall \alpha > 0{,}5 \text{ при } r \to \infty.$$

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, обобщающую известное соотношение Фростмана.

Лемма. *Для любого борелевского множества* $E \subset \mathbf{C}^m$ *положительной* Г-*емкости существует финитная мера* μ *с носителем в* E *такая, что* $\mu(E) = 1$ *и*

$$\left| \int [m(r;\ w) - m(r_0;\ w)]\, d\mu(w) \right| \leqslant C(E)$$

с константой $C(E) < \infty$, *зависящей только от размерности целой кривой и множества* E.

Отметим вытекающие из теоремы 2 следствия.

Следствие 1. *Предел* $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r, r_0;\ w)}{T(r)}$ *существует и равен* 1 *для всех* $w \in \mathbf{C}^m$, *кроме, быть может, множества нулевой* Г-*емкости* **).

Следствие 2. *Пусть* $G(z) = (g_0(z), \ldots, g_m(z))$ — *целая кривая*,

$$E = \left\{ A \in \mathbf{C}^{m+1}\colon \exists \alpha > 0{,}5 \text{ такое, что } \varlimsup_{r\to\infty} \frac{m(r;\ A)}{T(r)} > 0 \right\}.$$

Тогда множество E *удовлетворяет следующему условию:*

В) *Пересечение* E *с любой комплексной* m-*мерной гиперплоскостью, не проходящей через начало координат, имеет в этой гиперплоскости нулевую* Г-*емкость*.

3. Голоморфные кривые над шаром в $\mathbf{C}^l$. Аналогично рассмотренному выше случаю целой кривой определяется голоморфная кривая над шаром в $\mathbf{C}^l$ и ее характеристика $T(r)$. На такие кривые (в предположении неограниченности $T(r)$) естественным образом распространяется теорема 2 и оба следствия из нее. Кроме этого, при $l = 1$ получаются следующие теоремы, обобщающие теорему Р. Неванлинны о функциях, мероморфных в единичном круге ***).

Теорема 3. *Пусть* $g_0(z), \ldots, g_m(z)$ — *компоненты голоморфной кривой над кругом* $D = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| < 1\}$. *Обозначим через* E *множество тех* $A = (A_0, \ldots, A_m)$, *для которых нули функции* $\Psi_A(z) = A_0 g_0(z) + \ldots + A_m g_m(z)$ *удовлетворяют условию Бляшке в* D. *Тогда, если* E *не удовлетворяет условию* В), *то существует голоморфная в* D *функция* $F(z)$ *такая, что функции* $g_k(z) \cdot F^{-1}(z)$, $k = 0, \ldots, m$, —*ограниченные аналитические функции в* D.

Теорема 4. *Пусть функции* $g_0(z), \ldots, g_m(z)$ — *такие же, как и в теореме* 3. *Тогда, если нули функции* $w^m g_m(z) + \ldots + w g_1(z) + g_0(z)$, *рассматриваемой как функция от* z, *удовлетворяют условию Бляшке в* D *для каждого* w *из некоторого множества положительной емкости, то существует голоморфная в* D *функция* $F(z)$ *такая, что функции* $g_k(z) \cdot F^{-1}(z)$, $k = 0, \ldots, m$,— *ограниченные и аналитические в* D.

Автор выражает искреннюю признательность Л. И. Ронкину за постановку задачи и ценные советы

Харьковский государственный университет

Поступило в редакцию 17 июля 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., Гостехиздат, 1950. 2. Ронкин Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных, М., «Наука», 1971. 3. Гольдберг А. А., Приложение к книге Г. Виттиха «Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям», М., Физматгиз, 1960.

---

*) Отметим, что при $m = 1$ класс множеств нулевой Г-емкости совпадает с классом множеств нулевой логарифмической емкости.

**) Заметим, что для любой допустимой (см. [3], стр. 293) системы $\mathfrak{A}$ векторов w, как это следует из соотношения дефектов Альфорса — Вейля, равенство $\varlimsup\limits_{r\to\infty} N(r, r_0;\ w) \cdot [T(r)]^{-1} = 1$ может нарушаться лишь на счетном множестве векторов $w \in \mathfrak{A}$.

***) См. [1], стр. 183.