О. Е. Щербакова, Скорость сходимости для приращений случайных полей, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2003, том 298, 304–315

https://www.mathnet.ru/znsl1210

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 298, 2003 г.

О. Е. Щербакова

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ПРИРАЩЕНИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

1. Введение

Пусть далее $X_n, n \in \mathbb{N}_0^d$ – независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины с

$$EX_n = 0 \tag{1}$$

и с производящей функцией $\phi(t) = E\exp(tX_n)$, конечной в правосторонней окрестности нуля

$$0 < t_0 = \sup\{t : \phi(t) < \infty\}. \tag{2}$$

Приращением частичных сумм будем называть случайную величину

$$S_{(i,j]} = \sum_{i<k\le j} X_k, \quad (i,j] \subset \mathbb{N}_0^d.$$

Относительно последовательности целых чисел $\{a_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ будем предполагать, что $a_N = [a(N)]$, где $[\cdot]$ – целая часть, а функция $a(t)$, $t \ge 1$, $t \in \mathbb{R}$:

$$1 \le a(t) \le t,$$

$$a(t) \ \text{ и } \ \frac{t}{a(t)} \ \text{ не убывают }. \tag{3}$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ рассматриваются максимумы приращений частичных сумм на параллелепипедах, объем которых либо точно равен a_N либо не превосходит a_N, лежащих внутри d-мерных параллелепипедов вида $(0, n]$, объем которых не превосходит N:

$$S_{N,a_N} = \max_{\substack{|j|\le N\\ |j-i|\le a_N}} S_{(i,j]}, \quad S^\star_{N,a_N} = \max_{\substack{|j|\le N\\ |j-i|= a_N}} S_{(i,j]}.$$

Работа выполнена при поддержке грантов Министерства Образования Российской Федерации No. E02-1.0-56 и “Ведущая научная школа” НШ-2258.2003.1.

Пусть $I(N, a_N)$ – максимум приращений на параллелепипедах объема не более, чем a_N, лежащих внутри d-мерного куба $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$, где $1^0 = (1, \ldots, 1)$,

$$I(N, a_N) = \max_{\substack{J \subset (0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]] \\ |J| \le a_N}} S_J, \quad I^\star(N, a_N) = \max_{\substack{J \subset (0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]] \\ |J| = a_N}} S_J.$$

Отметим, что объем куба $(0, 1^0 \cdot [N^{\frac{1}{d}}]]$ отличается от N не более чем на $dN^{1-1/d}$.

Обозначим $m(u) = (\log \phi(u))'$, $\sigma^2(u) = m'(u)$

$$p(\alpha) = \inf_{t \in [0, t_0)} \phi(t) e^{-\alpha t} = \phi(t^\star) e^{-\alpha t^\star}.$$

Положим $c(\alpha) = -1/\log p(\alpha)$, известно, (можно найти, например, в [3]), что функция $c(\alpha)$ – убывающая дифференцируемая функция от

$$\alpha \in (0, A), \quad A = \lim_{t \uparrow t_0} m(t),$$

причем,

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} c(\alpha) = \infty \quad \lim_{\alpha \uparrow A} c(\alpha) = c_0 = 1 / \int_0^{t_0} t m'(t) dt.$$

Всюду далее будем предполагать, что $\log x = \log(x \vee e)$, $\log_2 N = \log\log N$, $x_N \asymp y_N$ означает, что для достаточно больших N существуют такие константы C_1, $C_2 > 0$, что $C_1 < |x_N / y_N| < C_2$, асимптотические соотношения рассматриваются при $N \to \infty$.

Изучением скорости сходимости для приращений длины $[c \log N]$ в одномерном случае для независимых одинаково распределенных случайных величин занимались Девельс, Деврой и Линч [3]. Для приращений длины $[c \log N + \lambda \log\log N]$ для неодинаково распределенных случайных величин получены результаты Мартикайненым, Фроловым и Штайнебахом [4].

Вопрос о скорости сходимости для полей изучался Штайнебахом и Пфулем [5]. Они рассматривали приращения по кубам объема $[c \log N + \lambda \log\log N]$.

Сформулируем теорему Штайнебаха и Пфуля.

Теорема 1.1. *Пусть $X_n, n \in \mathbb{N}_0^d$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям* (1), (2).

Предположим, что

$$a_N = c\log N + \lambda \log_2 N + o(\log_2 N), \quad \textit{где} \quad c > c_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть $\alpha \in (0, A)$ *– единственное решение уравнения* $c = c(\alpha)$ *и* $t^\star \in (0, t_0)$ *– единственное решение уравнения* $\alpha = m(t^\star)$.

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I(N, a_N) - \alpha a_N}{\log_2 N} = -\frac{1/2 + \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{по вероятности},$$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{I(N, a_N) - \alpha a_N}{\log_2 N} = -\frac{1/2 + \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.},$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{I(N, a_N) - \alpha a_N}{\log_2 N} = \frac{1/2 - \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.}$$

Причем, эти утверждения останутся справедливыми, если I_{N,a_N} *заменить на* $I^\star_{N,a_N}$.

Целью настоящей работы является получение аналогичного результата для статистик S_{N,a_N} и $S^\star_{N,a_N}$.

Теорема 1.2. *Пусть* X_n, $n \in \mathbb{N}_0^d$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины, удовлетворяющие условиям* (1), (2).

Предположим, что

$$a_N = c\log N + \lambda \log_2 N + o(\log_2 N), \quad \textit{где} \quad c > c_0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Пусть $\alpha \in (0, A)$ *– единственное решение уравнения* $c = c(\alpha)$ *и* $t^\star \in (0, t_0)$ *– единственное решение уравнения* $\alpha = m(t^\star)$.

Тогда

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} = \frac{d - 3/2 - \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{по вероятности},$$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} = \frac{d - 3/2 - \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.},$$

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{S_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} = \frac{d - 1/2 - \lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.}$$

Причем, эти утверждения останутся справедливыми, если S_{N,a_N} *заменить на* $S^\star_{N,a_N}$.

Таким образом, хотя статистики S_{N,a_N}, $S^\star_{N,a_N}$ имеют ту же асимптотику возрастания, что и I_{N,a_N}, $I^\star_{N,a_N}$, их флуктуации, имея тот же размах, оказываются сдвинуты на $d-1$. Отсюда, в частности, следует, что

$$P(S^{\star}_{N,a_N} \le \alpha a_N \text{ б.ч.}) = P(S_{N,a_N} \le \alpha a_N \text{ б.ч.}) = 0$$

$$\text{при} \quad d > 3/2 + \lambda/c.$$

2. Вспомогательные утверждения

Далее будем предполагать, что $d \ge 2$.

Пусть $A(N) = \{n \in \mathbb{N}_0^d \colon |n| \le N\}$.

Лемма 2.1. *Положим* $B_d(N) = \operatorname{Card}\{n \in \mathbb{N}_0^d \colon |n| = N\}$.

Тогда для любого $\epsilon > 0$ *и достаточно больших* N

$$B_d(N) \le N^{\epsilon},$$

$$\operatorname{Card}(A(N)) = \sum_{n \le N} B_d(n) = N \cdot P_{d-1}(\log N) + O\Big(N^{\frac{d-1}{d+2}+\epsilon}\Big),$$

где P_{d-1} *многочлен степени* $d-1$.

Замечание 2.1. Прежде всего, следует отметить, что $B_d(N)$ можно рассматривать как число способов представления N в виде произведения d множителей. Доказательство можно найти в [1] или в [2].

Лемма 2.2. *Пусть* $a_N^0 = (a_N, 1, \dots, 1)$. *Если выполнено* (1), (2), *то для любой последовательности* y_N, *такой что* $y_N^2 a_N \to 0$, $N \to \infty$, *будет выполнено*

$$P(S_{(0,a_N^0]} \ge a_N(\alpha + y_N)) \sim C a_N^{-1/2} p^{a_N}(\alpha) \exp\{-t^{\star} a_N y_N\},$$

где константа $C > 0$ *зависит только от распределения* X_n.

Доказательство (6) можно найти в работе Девельса, Девроя и Линча [3].

Лемма 2.3 (Джун, Эрдеш, 1952). *Для произвольных событий* $A_1, \dots, A_n$ *имеем:*

$$P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{i \ne j} P(A_i \cap A_j)}. \tag{7}$$

Лемма 2.4. *Пусть* $1 \le i \le k$, $\hat{i} = (i, 0, \dots, 0)$. *Тогда для любых* x, q *и* $t \in (0, t^\star)$ *будет выполняться:*

$$P(S_{(0,k^0]} > x, S_{(\hat{i}, \hat{i}+k^0]} > x) \le \\ \le (\phi(t^\star))^{k-i} e^{-t^\star q} + P(S_{(0,k]} > x)(\phi(t))^i e^{-t(x-q)}.$$

Доказательство леммы 2.4 можно найти в работе Девельса, Девроя и Линча [3].

Далее будем преполагать, что условия теоремы 1.2 выполнены.

Лемма 2.5. *Для любого* y *получим следующую оценку:*

$$P(S_{(0,a_N^0]} \ge a_N(\alpha + (y + d - 1/2 - \lambda/c)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})) \asymp \frac{(\log N)^{-d-y+o(1)}}{N}.$$

Лемма 2.6. *Пусть* $r^0 = (r, 1, \dots, 1)$. *Для любого* r, *такого что* $a_N - a_N^{1/3} \le r \le a_N$, *и любого* y *получим следующую оценку:*

$$P(S_{(0,r^0]} \ge a_N(\alpha + (y + d - 1/2 - \lambda/c)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})) \asymp \\ \asymp \frac{(\log N)^{-d-y+1/2+o(1)}}{N r^{1/2}} \phi(t^\star)^{r-a_N}. \quad (8)$$

Доказательство. Применяя лемму 2.2, где заменим a_N на r и

$$y_N = \alpha(a_N - r) + (y + d - \lambda/c - 1/2)\frac{\log_2 N}{t^\star},$$

получим (8):

$$P(S_{(0,r^0]} \ge a_N(\alpha + (y + d - \lambda/c - 1/2)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})) \asymp \\ \asymp \frac{(\log N)^{-d-y-\lambda/c+1/2+o(1)}}{r^{1/2} N} e^{-r/c+(r-a_N)t^\star\alpha} = \\ = \frac{(\log N)^{-d-y+1/2+o(1)}}{r^{1/2} N} \phi(t^\star)^{r-a_N}.$$

□

Обозначим $A_{(i,j]} = \{S_{(i,j]} \ge x\}$.

Лемма 2.7. *Пусть* $\widehat{i} = (i, 0, \dots, 0)$, $x = a_N\alpha + (d-3/2-\lambda/c-u)\frac{\log_2 N}{t^\star}$ *и* $q = a_N\alpha - \log\phi(t^\star)\frac{i}{t^\star} + (d-1-\lambda/c)\frac{\log_2 N}{t^\star} + \frac{v}{t^\star}\log i$, *где* $u, v \in \mathbb{R}$.

Тогда для всех $t \in (0, t^\star)$ *и* $1 \le i \le a_N$ *будет выполняться*

$$P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i},\widehat{i}+a_N^0]}) \le$$
$$\le \frac{i^{-v}N^{-1}}{\log^{d-1} N} + P(A_{(0,a_N^0]})\Big(\frac{\phi(t)}{\phi(t^\star)^{\frac{t}{t^\star}}}\Big)^i \log^{(u+1/2)\frac{t}{t^\star}} N i^{\frac{vt}{t^\star}}$$
$$\le \frac{i^{-v}N^{-1}}{\log^{d-1} N} + P(A_{(0,a_N^0]})\log^{u+v+1/2} N e^{-i\theta},$$
$$\theta = t\Big(\frac{\log\phi(t^\star)}{t^\star} - \frac{\log\phi(t)}{t}\Big) > 0.$$

Заметим, что $\theta > 0$, так как $E^{1/t}e^{tX} \le E^{1/s}e^{sX}$, для $t < s$.

3. Доказательство теоремы 1.2

В этом параграфе будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.2.

Лемма 3.1.

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{S_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} \le \frac{d-1/2-\lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$. Пусть $j \ge 1$ и рассмотрим последовательность $N_j = \min\{N : [a_N] = j\}$.

Для $N_j \le N < N_{j+1}$ будем иметь $a_N = j$, $S_{N,a_N} \le S_{N_{j+1}-1,j}$.

Воспользуемся леммой 2.1:

$$P_j = P(S_{N_{j+1}-1,j} \ge j(\alpha + (d-1/2-\lambda/c+\epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})) \le$$
$$\le N_j P_{d-1}(j)\sum_{r=1}^{j} r^{\epsilon/2} P(S_{(0,r^0]} \ge j(\alpha + (d-1/2-\lambda/c+\epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})).$$

Разобьем сумму на две $\sum_{r=1}^{j} = \sum_{r=1}^{l} + \sum_{r=l+1}^{j}$, $l = j - j^{1/3}$, первую оценим с помощью неравенства Маркова, а вторую, используя лемму 2.6.

$$N_j P_{d-1}(j)\sum_{r=1}^{l} r^{\epsilon/2}\phi(t^\star)^{r-j} N_j^{-1} j^{-d+1/2-\epsilon} \le$$

$$\leq Cl^{1+\epsilon/2}\phi(t^\star)^{l-j}j^{-1/2-\epsilon} \leq Cj^{1/2-\epsilon/2}\phi(t^\star)^{-j^{1/3}} = O(j^{-1-\epsilon/2}).$$

Применим первое утверждение леммы 2.6:

$$N_j P_{d-1}(j)\sum_{r=l}^{j} r^{\epsilon/2}\phi(t^\star)^{r-j}N_j^{-1}r^{-1/2}j^{-d+1/2-\epsilon} \leq Cj^{-1-\epsilon/2}.$$

Таким образом, $\sum_{j=1}^{\infty} P_j < \infty$. Применение леммы Бореля–Кантелли завершает доказательство. □

Лемма 3.2.

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{S_{N,a_N}-\alpha a_N}{\log_2 N} \leq \frac{d-3/2-\lambda/c}{t^\star} \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения предыдущей леммы, приходим к

$$P(S_{N,a_N} \geq a_N(\alpha + (d-3/2-\lambda/c+\epsilon)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})) \leq C\log^{-\epsilon/2} N \to 0.$$

□

Лемма 3.3. *Для любого* $\epsilon > 0$

$$P(S^\star_{N,a_N} \geq a_N(\alpha + (d-3/2-\lambda/c-\epsilon)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})) \to 1.$$

Доказательство. Построим систему d-мерных прямоугольников следующим образом:

$$J_N = \{(i-a_N^0, i] : i \in A(N), i-a_N^0 > 0\}.$$

Мощность множества можно оценить по лемме 2.1 $\mathrm{Card}\,(J_N) \sim NP_{d-1}(\log N)$. Обозначим

$$A_{(i,j]} = \{S_{(i,j]} \geq a_N(\alpha + (d-3/2-\lambda/c-\epsilon)\frac{\log_2 N}{t^\star a_N})\}.$$

Благодаря неравенству из леммы 2.3 достаточно показать, что

(1) $\sum_{(i,j]\in J_N} P(A_{(i,j]}) \to \infty$,

(2) $(\sum_{(i_1,j_1]\neq(i_2,j_2]} P(A_{(i_1,j_1]}\cap A_{(i_2,j_2]}))/(\sum_{(i,j]\in J_N} P(A_{(i,j]}))^2 \leq 1 + o(1)$.

Используя лемму 2.5 с $y = -\epsilon - 1$, получим

$$\mathrm{Card}\,(J_N) P(A_{(0,a_N^0]}) \geq C \log^{d-1} N \cdot \log^{-d+1+\epsilon} N \geq C \log^{\epsilon} N \to \infty.$$

Для доказательства второго утверждения воспользуемся леммой 2.7, где положим $v = 2$ и $u = \epsilon$.

Тогда получим

$$P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i},\widehat{i}+a_N^0]}) \leq$$
$$\leq \frac{i^{-2}}{N \cdot \log^{d-1} N} + P(A_{(0,a_N^0]}) \log^{\epsilon+5/2} N \cdot e^{-i\theta}, \quad \theta > 0.$$

Заметим, что

$$\sum_{(i_1,j_1] \neq (i_2,j_2]} P(A_{(i_1,j_1]} \cap A_{(i_2,j_2]}) \leq \mathrm{Card}\,(J_N) P(A_{(0,a_N^0]}) + \tag{9}$$

$$+ (\mathrm{Card}\,(J_N) P(A_{(0,a_N^0]}))^2 + \mathrm{Card}\,(J_N) \sum_{i=1}^{a_N} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i},\widehat{i}+a_N^0]}). \tag{10}$$

Пусть $l = [a_N^{\epsilon/2}]$, тогда

$$\mathrm{Card}\,(J_N) \sum_{i=1}^{a_N} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{((\widehat{i},\widehat{i}+a_N^0]}) \leq$$

$$\leq C \cdot \mathrm{Card}\,(J_N) P(A_{(0,a_N^0]}) \left(l + \sum_{j=l+1}^{\infty} j^{-2} + \frac{\log^{\epsilon+5/2} N \cdot e^{-\theta l}}{1 - e^{-\theta}} \right) =$$

$$= O(\log^{\frac{3}{2}\epsilon} N).$$

□

Лемма 3.4.

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{S^{\star}_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} \geq \frac{d - 1/2 - \lambda/c}{t^{\star}} \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$. Пусть $j \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность $N_j = \min\{N : [a_N] = j\}$. Построим семейство d-мерных прямоугольников, расположенных в слое

$$A(N_j) \setminus A(N_{j-1})$$

следующим образом:

$$L_{N_j} = \{(i - a_N^0, i] : |i| \le N_j, |i - a_N^0| > N_{j-1}\}.$$

Заметим, что $N_j \sim e^{1/c} N_{j-1}$.

Для оценки мощности используем лемму 2.1:

$$\mathrm{Card}\,(L_{N_j}) = \sum_{K=N_{j-1}}^{N_j} B_d(K) \asymp N_j j^{d-1}.$$

Рассмотрим независимые случайные величины

$$T_j = \max_{(i-a_N^0, i] \in L_{N_j}} S_{(i-a_N^0, i]} \le S^\star_{N, a_N},$$

где неравенство выполннено для $N_j \le N < N_{j+1}$.

Обозначим $A_{(i,k]} = \{S_{(i,k]} \ge j(\alpha + (d - 1/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})\}$.

Применим лемму 2.5 с $y = -\epsilon$, получим $P(A_{(0,a_N^0]}) \asymp j^{-d+\epsilon}/N_j$, $\mathrm{Card}\,(L_{N_j}) P(A_{(0,a_N^0]}) \asymp j^{-1+\epsilon}$.

Пусть $l = [j^{\epsilon/2}]$, тогда

$$\mathrm{Card}\,(L_{N_j}) \sum_{i=1}^{j} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i}, \widehat{i}+a_N^0]}) \le$$

$$\le C \cdot \mathrm{Card}\,(L_{N_j})(P(A_{(0,a_N^0]})l + \sum_{i=l+1}^{j} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i}, \widehat{i}+a_N^0]}).$$

Для оценки второго слагаемого используем лемму 2.7, где положим $v = 1 + 2/\epsilon$ и $u = \epsilon - 1$:

$$\sum_{i=l}^{j} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i}, \widehat{i}+a_N^0]}) \le$$

$$\le \sum_{i=l}^{j} \left(\frac{i^{-1-2/\epsilon}}{N_j j^{d-1}} + P(A_{(0,a_N^0]}) e^{-\theta i} j^{(\epsilon - 1/2)\frac{t}{t^\star}} i^{(1+2/\epsilon)\frac{t}{t^\star}} \right)$$

$$\le \frac{j^{-d}}{N_j} + P(A_{(0,a_N^0]}) j^{(2/\epsilon + 1/2 + \epsilon)\frac{t}{t^\star}} \frac{e^{-l\theta}}{1 - e^{-\theta}},$$

$$\mathrm{Card}\,(L_{N_j}) \sum_{i=1}^{j} P(A_{(0,a_N^0]} \cap A_{(\widehat{i}, \widehat{i}+a_N^0]}) = O(j^{-1+\frac{3}{2}\epsilon}).$$

С помощью неравенства, аналогичного (9), можно произвести следующие оценки:

$$P(T_j \geq j(\alpha + (d - 1/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j}) = P(\bigcup_{(i,j]\in L_{N_j}} A_{(i,j]}) \geq$$

$$\geq \frac{(\mathrm{Card}\,(L_{N_j})P(A_{(0,a_N^0]}))^2}{\mathrm{Card}\,(L_{N_j})P(A_{(0,a_N^0]}) + \sum_{(i_1,j_1]\neq(i_2,j_2]} P(A_{(i_1,j_1]} \cap A_{(i_2,j_2]})} \geq j^{-1+\epsilon}.$$

С помощью Леммы Бореля–Кантелли завершаем доказательство. □

Лемма 3.5.

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{S^\star_{N,a_N} - \alpha a_N}{\log_2 N} \geq \frac{d - 3/2 - \lambda/c}{t^\star} \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$. Пусть $j \geq 1$ и рассмотрим последовательность $N_j = \min\{N : [a_N] = j\}$. Для $j \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ и $s \in \mathbb{N}_0^{d-1}$ определим множества

$$\mathbb{N}_j = \{m[j^{\epsilon/2}] : m = 0, 1, \ldots\},$$

$$J_{j,r,s} = \{(i, i + a_N^0] : i_1 \in (2rj, (2r+1)j] \cap \mathbb{N}_j, s = (i_2, \ldots, i_d)\}.$$

Заметим, что $\mathrm{Card}\,(J_{j,r,s}) \sim a_{N_j} j^{-\epsilon/2} \sim cj^{1-\epsilon/2}$.

Цлучайные величины $T_{j,r,s} = \max\limits_{(i-a_N^0,i]\in J_{j,r,s}} S_{(i-a_N^0,i]}$ будут независимыми, и для $N_j \leq N < N_{j+1}$ будем иметь

$$\max_{(0,(r,s)]\in A(\frac{N_j - j}{2j})} T_{j,r,s} \leq S^\star_{N,a_N}.$$

Используя неравенство $1 - x \leq e^{-x}$ и оценку для мощности множества $\mathrm{Card}\,(A(\frac{N_j-j}{2j}))$, получим

$$P_j = P(S^\star_{N_j,j} \leq j(\alpha + (d - 3/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})) \leq$$

$$\exp\{-P(T_{j,r,s} > a_{N_j}(\alpha + (d - 3/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j}))N_j j^{d-2}(1/2 + o(1))\}.$$

Обозначим $A_{(i,k]} = \{S_{(i,k]} \geq j(\alpha + (d - 3/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star a_N})\}$.

Применяя неравенство Бонферрони, получим

$$P(T_{j,r,s} \geq j(\alpha + (d - 3/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})) \geq \Sigma_1 - \Sigma_2.$$

Где Σ_1, сумма по непересекающимся интервалам, оценивается с помощью леммы 2.5 с $y = -1 - \epsilon$, а именно:

$$\Sigma_1 = \mathrm{Card}\,(J_{j,r,s}) P(A_{(0,a_N^0)}) \asymp j^{1-\epsilon/2} j^{1-d+\epsilon}/N_j.$$

А Σ_2, сумму по пересекающимся интервалам, оценим, используя лемму 2.7 с $v = 2$ и $u = \epsilon$,

$$\Sigma_2 \leq \mathrm{Card}\,(J_{j,r,s}) \sum_{r=1}^{j^{1-\epsilon/2}} P(A_{(0,a_N^0)} \cap A_{(\widehat{j^{\epsilon/2}}r, a_N^0 + \widehat{j^{\epsilon/2}}r)}) \leq C j^{2-d+\epsilon/2}/N_j,$$

– это, в свою очередь, вытекает из следующих оценок:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{j^{1-\epsilon/2}} P(A_{(0,a_N^0)} \cap A_{(\widehat{j^{\epsilon/2}}r, a_N^0 + \widehat{j^{\epsilon/2}}r)}) \\
&\leq \sum_{r=1}^{j^{1-\epsilon/2}} (N_j^{-1} j^{1-d-\epsilon} r^{-2} + P(A_{(0,a_N^0]}) e^{-\theta(j^{\epsilon/2} r)} j^{(2\epsilon + \frac{1}{2})\frac{t}{t^\star}} r^{2\frac{t}{t^\star}}) \\
&\leq N_j^{-1} j^{1-d-\epsilon/2} + N_j^{-1} j^{1-d-\epsilon} \sum_{r=j^{\epsilon/2}}^{j^{1-\epsilon/2}} r^{-2} + P(A_{(0,a_N^0]}) j^{5/2+\epsilon} \frac{e^{-j^\epsilon \theta}}{1 - e^{-j^{\epsilon/2}\theta}} \\
&\leq C j^{1-d-\epsilon/2}/N_j.
\end{aligned}$$

Цледовательно,

$$\begin{aligned}
P(T_{j,r,s} \geq a_{N_j}(\alpha + (d - 3/2 - \lambda/c - \epsilon)\frac{\log j}{t^\star j})) &\geq \\
\geq C(1 + o(1)) j^{2-d+\epsilon/2}/N_j.
\end{aligned}$$

В итоге, получим $P_j \leq \exp\{-C/2 j^{\epsilon/2}(1 + o(1))\}$.

Таким образом, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} P_j$ сходится, с помощью Леммы Бореля–Кантелли завершаем доказательство леммы. □

Суммируя результаты, изложенные в этом параграфе, можно считать теорему 1.2 доказанной.

Литература

1. Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции.* Меркурий-ПРЕСС (2000).
2. К. Прахар, *Распределение простых чисел.* Мир, Москва (1967).
3. P. Deheuvels, L. Devroye, J. Lynch, *Exact convergence rate in the limit theorems of Erdös–Rényi and Shepp.* — Ann. of Probab. **14**, No. 2 (1986), 209–223.
4. A. Frolov, A. Martikainen, J. Steinebach, *Erdös–Rényi–Shepp type laws in the non-i.i.d. case.* — Philipps-Universität Marburg, Bericht Nr. 42, Fachbereich Mathematik (1966).
5. J. Steinebach, W. Pfuhl, *On precise asymptotics for Erdös–Rényi increments of random fields.* —Pub. Inst. Stat. Univ. **XXXIII**, No. 2 (1988), 49–66.

Shcherbakova O. E. Rate of convergence of increments for random fields.

The purpose of this paper is to obtain exact convergence rate in the limit theorems for maximal increments of random fields

$$S_{N,a_N} = \max\Big\{ \sum_{i<k\le j} X_k : |j| \le N, |j-i| \le a_N \Big\},$$

$$S^{\star}_{N,a_N} = \max\Big\{ \sum_{i<k\le j} X_k : |j| \le N, |j-i| = a_N \Big\},$$

where $N \in \mathbb{N}$ and $a_N = c\log N + \lambda \log_2 N + o(\log_2 N)$, $c > c_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, X_n is a sequence of multi-dimension indexed i.i.d. centered random variables having a finite moment generating function in right neighborhood of zero, $|n|$ is defined by multiplying of coordinates.

С.-Петербургский государственный
Политехнический Университет,
E-mail: helga_scher@mail333.com

Поступило 20 ноября 2003 г.