

N. V. Nikitin, Numerical simulation of turbulent flows in a pipe of square cross-section,  
*Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 353, Number 3, 338–342

<https://www.mathnet.ru/eng/dan50296>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

May 21, 2025, 17:34:47



УДК 532.516

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТРУБЕ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

© 1997 г. Н. В. Никитин

Представлено академиком Г.Г. Черным 25.10.95 г.

Поступило 26.10.95 г.

1. Распределения средних и пульсационных характеристик турбулентных течений вблизи гладких стенок подробно изучались во многих экспериментах (см. например, обзор в [1, гл. 6]) и уточнялись прямым численным моделированием [2–4]. Однако аккуратных измерений структуры турбулентных потоков вдоль внешних и внутренних углов после работ Никурадзе [5] почти не проводилось, хотя результаты таких исследований имеют не только фундаментальный интерес, но и большое практическое значение. В частности, такие данные необходимы для проектирования рабочих частей аэродинамических труб и специальных теплообменников. Другая важная область их применения – построение и тестирование полуэмпирических методов расчета турбулентности.

Ламинарное течение в трубах прямоугольного сечения теоретически было исследовано Бусси-неском. Для секундного расхода  $Q$  им было получено выражение [5]

$$Q = \frac{4}{3} D_p \frac{ab^3}{\nu} \times \left[ 1 - \frac{192b}{\pi^5 a} \left( \operatorname{tgh} \frac{\pi a}{2b} + \frac{1}{3^5} \operatorname{tgh} \frac{3\pi a}{2b} + \dots \right) \right], \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – половины сторон прямоугольника,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $D_p$  – взятый с обратным знаком градиент кинематического давления. При  $a = b$ , т.е. в случае квадратного поперечного сечения, из (1) получается следующий закон сопротивления:

$$C_f = \frac{28.45}{\operatorname{Re}}.$$

Здесь коэффициент сопротивления

$$C_f = \frac{D_p R}{U_m^2 / 2} \quad (2)$$

и число Рейнольдса

$$\operatorname{Re} = \frac{2RU_m}{\nu} \quad (3)$$

определены через гидравлический радиус  $R$  (площадь поперечного сечения, деленная на полупериметр;  $R = a$  для квадратного сечения) и среднюю скорость  $U_m = Q/4ab$ . Это отличается от закона сопротивления для труб кругового сечения, где  $C_f = 32/\operatorname{Re}$ . Оказывается, однако, что в турбулентных режимах течения законы сопротивления для труб квадратного и кругового сечения практически совпадают и хорошо описываются формулой Блазиуса

$$C_f = \frac{0.1582}{\operatorname{Re}^{1/4}}. \quad (4)$$

Последнее было установлено Шиллером [5]. Переход к турбулентности в опытах Шиллера происходил при  $\operatorname{Re} \sim 2000$ – $2200$ , что также соответствует трубам кругового сечения. Таким образом, с гидравлической точки зрения турбулентные течения в трубах кругового и квадратного сечения эквивалентны.

В настоящей работе проведен расчет турбулентных течений в трубе квадратного сечения на основе полных уравнений Навье–Стокса без привлечения каких-либо эмпирических данных или подгоночных констант, т.е. методом прямого численного моделирования. Целью проведенных расчетов было изучение структуры течения в угловых областях, а также определение пределов возможного расширения отмеченной выше аналогии между течениями в трубах кругового и квадратного сечения.

2. Рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости в трубе квадратного сечения, задаваемой областью декартовых координат

$$(x, y, z) \in \{|x| < \infty, 0 \leq y \leq 2R, 0 \leq z \leq 2R\}. \quad (5)$$

Течение описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left( p + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) - \nu \nabla \times \boldsymbol{\omega},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \omega = \nabla \times \mathbf{v}.$$

В направлении  $x$  (вдоль трубы) течение считается статистически однородным, что позволяет использовать условие периодичности:

$$\mathbf{v}|_{x+L_x} = \mathbf{v}|_x.$$

На остальных границах области (5) (на стенках трубы) ставятся условия прилипания. Уравнения интегрируются с условием постоянства внешнего градиента давления:

$$\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle = -D_p = \text{const},$$

где угловые скобки обозначают осреднение вдоль  $x$  по отрезку периодичности течения. Начальные условия задаются в виде суммы ламинарного течения  $u_0(y, z)$  и случайного поля  $\mathbf{v}'(x, y, z)$ , удовлетворяющего уравнению неразрывности и имеющего амплитуду  $\sim 2\%$  от  $\max u_0$ . Начальное возмущение  $\mathbf{v}'$  создается с помощью датчика случайных чисел, а  $u_0$  находится из решения задачи

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = -\frac{D_p}{\nu},$$

$$u_0 = 0 \quad \text{при } y = 0, 2R \quad \text{и при } z = 0, 2R.$$

Вычислительный алгоритм решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса, применяемый в настоящей работе, является расширением алгоритма [6, 7]. В направлении  $x$  компоненты скорости аппроксимируются тригонометрическими рядами Фурье, в двух других пространственных направлениях используются конечные разности на перемежающихся сетках [8]. В одном из направлений ( $z$ ) применяется неравномерная сетка со сгущением узлов на концах интервала, в другом направлении ( $y$ ) используется сетка с постоянным шагом. Равномерная сетка требует большего числа узлов для разрешения течения вблизи стенки, однако позволяет применять безытерационные методы Фурье [9, гл. 3] для решения эллиптических частей уравнений Навье–Стокса (при определении давления или при вычислении поля скорости через поле завихренности). Интегрирование по времени ведется экономичным методом Рунге–Кутты 3-го порядка точности с автоматическим выбором шага [4, 10]. Расчет проводится до выхода течения на квазистационарный режим, после чего параллельно с интегрированием по времени вычисляются интересные средние величины.

3. Расчеты выполнены при числах Рейнольдса (3)

$$Re = 4000 \quad \text{и} \quad Re = 7500.$$

Протяженность расчетной области  $L_x$  в обоих случаях равнялась  $2\pi R$ . Пространственное разре-

шение вдоль направлений  $x, y$  и  $z$   $(2K - 1) \times N \times M$  в первом расчете было  $21 \times 128 \times 64$ , а во втором —  $43 \times 128 \times 120$ . При этом число степеней свободы  $L \approx 2(2K - 1)MN$  составляет  $L \approx 3.44 \cdot 10^5$  и  $L \approx 1.32 \cdot 10^6$  соответственно. Большее число узлов в направлении  $y$ , чем в направлении  $z$ , связано с отмеченной выше разницей сеток в этих направлениях. Такое неравноправие направлений  $y$  и  $z$  имеет и положительный аспект, позволяя контролировать достаточность разрешения сравнением средних характеристик в точках, симметричных относительно плоскостей  $y = z$  и  $y = 2R - z$ . При меньшем числе Рейнольдса значение  $N$  адекватно  $M$ , во втором же случае имеется некоторая асимметрия в средних характеристиках, что связано, по-видимому, с недостаточно точным разрешением течения вблизи стенок, ортогональных направлению  $y$ . К сожалению, ресурсы используемого компьютера (PC Pentium 66 МГц, 16М RAM) не позволили провести расчеты с большим пространственным разрешением.

В дальнейшем изложении будут рассматриваться только осредненные характеристики движения. В частности, под скоростью  $U$  будем понимать среднее по времени значение продольной компоненты скорости  $u(t, x, y, z)$ . В силу однородности течения вдоль оси трубы средние характеристики не зависят от  $x$ , а из симметрии течения относительно плоскостей  $y = R, z = R, y = z, y = 2R - z$  вытекают определенные свойства симметрии средних величин. Как уже отмечено, осреднение по времени проводилось параллельно с интегрированием уравнений. Из-за конечности интервала осреднения отмеченные свойства средних выполняются лишь приближенно, поэтому для повышения надежности статистик после осреднения по времени каждая величина осреднялась по  $x$ , а также по множеству из 8 симметричных точек в плоскости  $(y, z)$ .

Полученные в результате описанной процедуры осреднения распределения скорости  $U(y, z)$  при  $Re = 4000$  и  $Re = 7500$  изображены на рис. 1а и рис. 1б соответственно. Графики приведены для одной четверти сечения трубы, в остальных четвертях они получаются зеркальным отражением относительно плоскостей  $y = R$  и  $z = R$ . Характерной особенностью распределений скорости является немонотонность профилей  $U(y)$  вблизи стенки  $z = 0$  (и, симметрично, профилей  $U(z)$  вблизи стенки  $y = 0$ ). Особенно ярко выражена эта немонотонность для меньшего числа Рейнольдса — скорость на средней линии сечения ( $y/R = 1$ ) заметно ниже, чем в промежуточной области при  $y/R \approx 0.35$ . Немонотонность ослабляется с удалением от стенки и пропадает при  $z/R \approx 0.4$ . При  $Re = 7500$  минимум в пристенных профилях  $U(y)$  достигается ближе к углам трубы — при  $y/R \approx 0.35$ , в результате образуется форма профиля с двумя

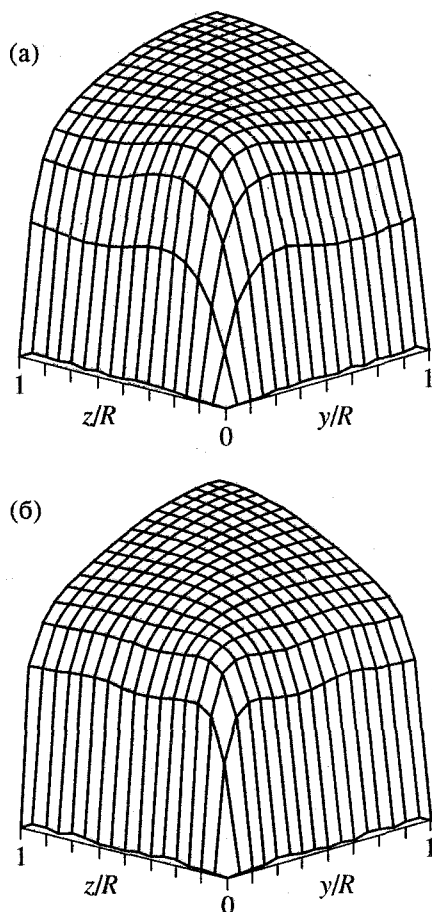


Рис. 1. Распределения скорости  $U(y, z)$ .  $Re = 4000$  (а) и  $7500$  (б).

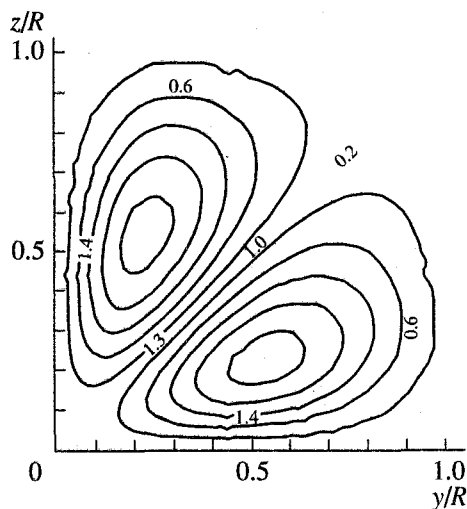


Рис. 2. Линии тока вторичного течения,  $Re = 4000$ .

выпуклостями, одной вблизи стенки и другой на средней линии. Эта отличительная черта сохраняется в профилях скорости даже при наибольшем удалении от стенки. Любопытно, что опи-

санные особенности профилей скорости соответствуют профилям, полученным Никурадзе в трубе прямоугольного сечения с отношением сторон  $5 : 1$  [5]. В [5] не указано число Рейнольдса, отвечающее приведенным распределениям, скорее всего оно было больше рассмотренных в настоящей работе. Форма пристеночных профилей при  $Re = 4000$  с минимумом вблизи средней линии соответствует профилям скорости вдоль коротких стенок в трубе прямоугольного сечения, а двояковыпуклая форма свойственна распределениям вдоль длинных стенок.

Аномальное повышение скорости в угловых областях трубы наблюдается только в турбулентных режимах и объясняется наличием турбулентного переноса вдоль линий равного уровня скорости. Согласно Прандтлю, частицы жидкости, пересекающие угловую область, дают составляющую импульса, направленную в сторону вершины угла. В результате создается вторичное течение в плоскости  $(y, z)$ , в котором жидкость из приосевой области движется внутрь углов, а затем вдоль стенок выносится обратно. Линии тока такого течения, полученные при  $Re = 4000$ , изображены на рис. 2. Как и на рис. 1, приведена только четверть поперечного сечения. Вдоль биссектрисы  $y = z$  скорость направлена внутрь угла, а вдоль стенок — наружу. В нескольких точках на рис. 2 указана величина скорости вторичного течения, выраженная в процентах от скорости на оси трубы. Наибольшая скорость втекания жидкости в угловую область достигается при  $y = z \approx 0.25R$  и составляет около  $1.3\%$ . Примерно такую же величину имеет максимальная скорость вытекания.

Полученные в обоих расчетах значения коэффициента сопротивления (2) очень хорошо согласуются с экспериментальной формулой Блазиуса (4). Отличие составляет  $-0.56\%$  при  $Re = 4000$  и  $-0.24\%$  при  $Re = 7500$ . Отношения максимальной скорости (скорости на оси трубы)  $U_c$  к средней скорости  $U_m$  в обоих случаях оказались равными  $1.32$ . Эти значения соответствуют данным для труб кругового сечения, хотя при  $Re = 7500$  величина  $U_c/U_m$ , по-видимому, несколько завышена. Так, в эксперименте [11] в круглой трубе получено  $U_c/U_m \approx 1.32$  при  $Re = 4000$  и  $U_c/U_m \approx 1.27$  при  $Re = 7500$ . В прямом численном моделировании [4]  $U_c/U_m \approx 1.29$  при  $Re = 6000$  (что совпадает с [11]), расчет для  $Re = 4000$  дает  $U_c/U_m \approx 1.31$ . Все приведенные значения для труб кругового и квадратного сечений заметно выше, чем, например, для плоского канала. Так, при  $Re = 5600$  в плоском канале  $U_c/U_m = 1.16-1.17$  [2, 4].

Вернемся к распределениям средней скорости. Интересен вопрос о связи между  $U(y, z)$  и универсальным законом распределения скорости в турбулентных потоках вдоль гладких поверхностей.

Будем рассматривать профили скорости вдоль линий  $z = \text{const}$  при различном удалении от стенки  $z = 0$ . Для каждого  $0 < z \leq R$  введем динамическую скорость  $U_*(z) = (\tau_w(z)/\rho)^{1/2}$  и динамическую длину

$$l_*(z) = \nu/U_*(z), \text{ где } \tau_w(z) = \rho\nu \frac{\partial U(0, z)}{\partial y}$$

трение на стенке. Форма зависимостей  $\tau_w(z)$  близка к форме профилей скорости, ближайших к стенке  $y = 0$ , изображенных на рис. 1. Профили  $U^+(y^+, z) = U(y = y^+l_*, z)/U_*$  как функции  $y^+$  приведены на рис. 3а и 3б для  $Re = 4000$  и  $Re = 7500$  соответственно. Сплошные линии отвечают  $z/R = 1$ , т.е. наибольшему удалению от углов. Линии А и В представляют линейный  $U^+ = y^+$  и логарифмический  $U^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0$  [12] участки закона стенки. Число  $Re = 4000$  недостаточно велико для формирования логарифмического слоя – график  $U^+(y^+, R)$  проходит заметно выше линии В. Профиль скорости при большем числе Рейнольдса лучше следует универсальному распределению. Точкими 1–4 на рис. 3б изображены распределения  $U^+(y^+, z)$  при разных значениях  $z/R$  от 0.1 до 0.6. Максимальное значение  $y^+$  на каждом из этих графиков соответствует точке на биссектрисе  $y = z$ . Все профили, начиная с наименьшего  $z$ , удовлетворительно согласуются с законом стенки, включая логарифмический участок. Это позволяет сделать вывод, что распределения скорости в угловых областях описываются универсальным законом распределения скорости для течений вдоль гладких поверхностей.

Интересно сопоставить распределения скорости вдоль средней линии сечения трубы  $U^+(y^+, R)$  при рассмотренных небольших числах Рейнольдса с профилями скорости в трубе кругового сечения, где, как известно, логарифмический слой формируется при заметно ббльших числах Рейнольдса, чем, например, в плоском канале [4, 11]. Для сравнения на рис. 3а приведены данные эксперимента [11] для течения в круглой трубе ( $Re = 4060$ ), а также результаты прямого численного моделирования ( $Re = 4000$ ). Расчетный и экспериментальный профили, хорошо согласуясь между собой, за пределами вязкого подслоя проходят существенно выше профиля скорости в трубе квадратного сечения. Полученное относительное расположение профилей  $U^+(y^+)$  в трубах кругового и квадратного сечений неудивительно, если учесть равенство коэффициентов сопротивления и отношений  $U_c/U_m$ . В самом деле, учитывая, что  $D_p R = 2\bar{\tau}_w/\rho$ , где  $\bar{\tau}_w$  – среднее по периметру напряжение трения на стенке трубы, выражение для коэффициента сопротивления (2) можно представить в следующем виде:

$$C_f = \frac{4\bar{\tau}_w}{\rho U_m^2}$$

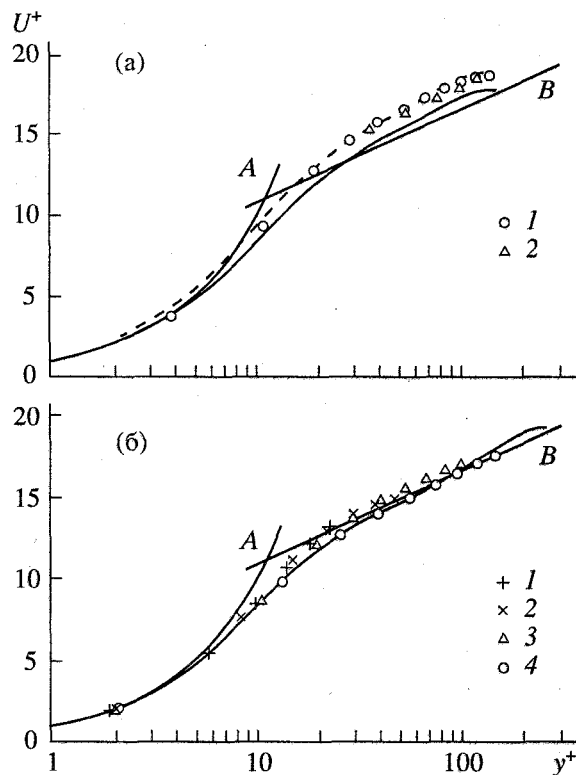


Рис. 3. Профили скорости  $U^+(y^+, z) = U(y^+l_*(z), z)/U_*(z)$  вдоль линий  $z = \text{const}$ . Сплошные линии –  $U^+(y^+, R)$ ; А –  $U^+ = y^+$ , В –  $U^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.0$ . а –  $Re = 4000$ ; пунктирная линия –  $U(y^+, R)/\bar{U}_*$ ; точки – течение в круглой трубе: 1 – численный расчет, 2 – эксперимент [11]. б –  $Re = 7500$ ; точки: 1 –  $z/R = 0.1$ , 2 –  $z/R = 0.2$ , 3 –  $z/R = 0.4$ , 4 –  $z/R = 0.6$ .

Вводя среднюю по периметру динамическую скорость соотношением  $\bar{U}_* = (\bar{\tau}_w/\rho)^{1/2}$ , получим

$$C_f = 4 \left( \frac{U_c}{U_m} \right)^2 \left( \frac{\bar{U}_*}{U_c} \right)^2$$

Отсюда видно, что при совпадении коэффициентов сопротивления и отношений  $U_c/U_m$  в трубах кругового и квадратного сечений должны совпадать также и отношения  $U_c/\bar{U}_*$ , но отнюдь не отношения  $U_c/U_*$ . Если в круглой трубе трение постоянно вдоль периметра, то в трубе квадратного сечения это не так. При приближении к угловым точкам местное трение уменьшается до нуля. Вблизи средней линии напряжение трения на стенке больше среднего по периметру и, следовательно, отношение  $U_c/U_*(R)$  меньше отношения  $U_c/\bar{U}_*$ . Разница между этими отношениями наиболее заметна при малых числах Рейнольдса, когда влияние угловых областей велико. На рис. 3а штриховой

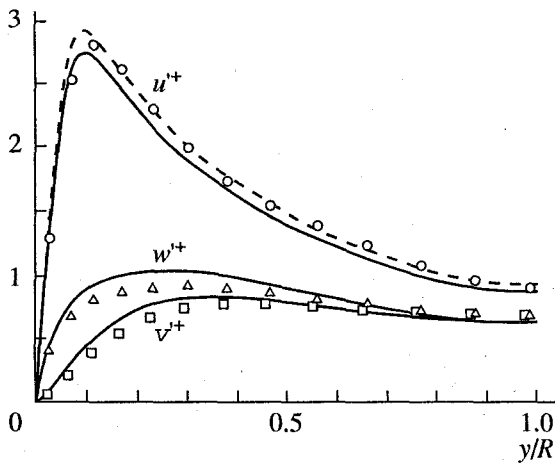


Рис. 4. Распределения трех компонент интенсивности турбулентных пульсаций вдоль средней линии сечения трубы,  $Re = 4000$ .  $u^+$ ,  $v^+$ ,  $w^+$  – пульсации в продольном, нормальном и боковом направлениях соответственно. Пунктирная линия –  $u^+/\bar{U}_*$ , точки – результаты расчета в круглой трубе.

линией изображен профиль  $U^+(y^+, R)$ , получающийся при замене  $\tau_w(R)$  на  $\bar{\tau}_w$  в определении динамической скорости. В области вязкого подслоя этот профиль, конечно, отклоняется от линии А, но за его пределами практически полностью совпадает с распределением скорости в трубе кругового сечения. При  $Re = 7500$  распределение  $U^+(y^+, R)$  лучше соответствует трубе кругового сечения, а аналогичная перенормировка приводит к менее заметным изменениям, чем при  $Re = 4000$ .

Распределения интенсивностей турбулентных пульсаций вдоль средней линии сечения трубы  $z = R$ , полученные при  $Re = 4000$ , изображены на рис. 4. Все величины нормированы на динамическую скорость  $U_*(R)$ . Для сравнения там же приведены результаты расчета течения в трубе кругового сечения при том же числе Рейнольдса. За пределами пристенного слоя профиль продольных пульсаций  $u^+$  в трубе квадратного сечения проходит несколько ниже, чем в круглой трубе. Здесь, так же как и в случае с профилем скорости, расхождение устраняется заменой нормировки. Распределение  $u^+/\bar{U}_*$  практически неотличимо от профиля продольных пульсаций в круглой трубе. Интенсивности пульсаций в нормальном и боковом направлениях в трубе квадратного сечения заметно выше, чем в круглой трубе. По-видимо-

му, это объясняется дополнительными колебаниями, связанными со вторичным течением.

При  $Re = 7500$  максимальное значение  $u^+$  несколько меньше, чем при  $Re = 4000$  (2.6 вместо 2.7). Достигается максимум ближе к стенке. Точки максимумов  $u^+$  совпадают в пристенных координатах:  $y^+ \approx 14$  в обоих случаях, что соответствует течениям в круглой трубе и плоском канале [4]. Как и в других пристенных течениях, интенсивность нормальных и боковых пульсаций увеличивается с числом Рейнольдса.

Турбулентные пульсации в угловых областях при обоих числах Рейнольдса заметно слабее, чем вблизи средней линии. Так, максимальные значения  $u'(y, z)/U_*(z)$  при  $z/R = 0.1$  и при  $z/R = 0.2$  (в интервале  $y \leq z$ ) меньше, чем при  $z/R = 1$  на 30% и 15% соответственно. Однако при больших значениях  $z$  распределения  $u^+(y^+, z)$ , так же как и профили скорости, удовлетворительно описываются единой зависимостью, отвечающей  $z = R$ .

Автор признателен проф. А.А. Павельеву, инициировавшему проведение данных исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 94-01-00856.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. Т. 1. 694 с.
2. Kim J., Moin P., Moser R. // J. Fluid Mech. 1987. V. 177. P. 133–166.
3. Spalart P.R. // Ibid. 1988. V. 187. P. 61–98.
4. Никитин Н.В. // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 3. С. 32–43.
5. Шиллер Л. Движение жидкости в трубах. М.; Л., 1936. 230 с.
6. Никитин Н.В. // ЖВМ и МФ. 1994. Т. 34. № 6. С. 909–925.
7. Никитин Н.В. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 6. С. 14–26.
8. Harlow F.H., Welch J.E. // Phys. Fluids. 1965. V. 8. № 12. P. 2182–2189.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.
10. Никитин Н.В. // ДАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 767–770.
11. Patel V.C., Head M.R. // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. № 1. P. 181–201.
12. Hussain A.K.M.F., Reynolds W.C. // Trans. ASME J. Fluids Eng. 1975. V. 97. P. 568–578.