П. Л. Иванков, О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций, *Чебышевский сб.*, 2012, том 13, выпуск 2, 64–70

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 13 Выпуск 2 (2012)

Труды IX Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной 80-летию профессора Мартина Давидовича
Гриндлингера

УДК 511.361

О ЗНАЧЕНИЯХ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ПО ПАРАМЕТРУ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

П. Л. Иванков (г. Москва)

Ключевые слова: гипергеометрические функции, дифференцирование по параметру, иррациональные параметры, линейная независимость значений

Аннотация

В работе с помощью эффективной конструкции аппроксимаций Паде для гипергеометрических функций общего вида (в том числе и продифференцированных по параметру) доказывается линейная независимость совокупности значений таких функций в случае иррациональности одного из параметров.

Keywords: hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter, linear independence of the values, irrational parameters.

Abstract

In this paper we consider linear independence of the values of hypergeometric functions with irrational parameter; some of these functions are differentiated with respect to parameter. The corresponding theorem is proved by means of the effective construction of Padé approximation for such functions.

Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, старшие коэффициенты которых равны единице, и пусть $u = 1 + \deg b(x) \geqslant \deg a(x)$. Рассмотрим при $k = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, u$, следующие функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)(x+\lambda_k)},$$

а также функции, полученные из них дифференцированием по параметру λ_k:

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^{l_k}}{d\lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(x+\lambda_k)}, \tag{1}$$

$k = 1,\dots,t$, $l_k = 0,\dots,\tau_k - 1$, $j = 1,\dots,u$; $\tau_1,\dots,\tau_t$ — натуральные числа. При некоторых естественных ограничениях на параметры функций (1) можно эффективно построить нетривиальную функциональную приближающую форму

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k-1} \sum_{j=1}^{u} P_{kl_kj}(z) F_{kl_kj}(z), \tag{2}$$

имеющую при $z = 0$ максимально возможный порядок нуля; коэффициенты $P_0(z), P_{kl_kj}(z)$ формы (2) являются многочленами степени n. Возможно также построение аналогичной однородной формы, если предположить дополнительно, что $b(0) = 0$. Эти аналитические конструкции можно использовать для получения различных результатов об арифметической природе значений функций (1). Мы рассмотрим здесь лишь одну теорему.

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле, $\lambda \in \mathbb{I}$, $\lambda \neq -1,-2,\dots$, и пусть при $j = 1,2$

$$K_{0j}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu \nu^{j-1}}{\nu!(\lambda+1)\dots(\lambda+\nu)}, \tag{3}$$

а функции

$$K_{1j}(z) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu \nu^{j-1}}{\nu!(\lambda+1)\dots(\lambda+\nu)} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \dots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right)$$

получены из функций (3) дифференцированием по параметру λ.

Теорема 1. *Для любого ненулевого целого $q \in \mathbb{I}$ при $|q| \geqslant q_0$, где q_0 зависит от λ и от поля $\mathbb{I}$, числа $K_{lj}(1/q)$, $l = 0,1$, $j = 1,2$, линейно независимы над полем $\mathbb{I}$.*

Можно получить и количественный результат в виде оценки снизу абсолютной величины линейной формы

$$\sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{2} h_{lj} K_{lj} \left(\frac{1}{q} \right)$$

в зависимости от максимума модулей коэффициентов h_{lj}. В ранее опубликованных результатах об арифметических свойствах значений продифференцированных по параметру обобщённых гипергеометрических функций всегда предполагалось, что соответствующий параметр (в нашем случае λ) является рациональным числом; см. [1, замечания к главе 7].

Доказательство теоремы основано на эффективном построении вышеупомянутой нетривиальной линейной однородной приближающей формы для совокупности функций $K_{lj}(z)$, имеющей при $z = 0$ максимально возможный порядок нуля. Пусть λ_1 и λ_2 — комплексные числа, отличные от $-1, -2, \ldots$, причём разность этих чисел не является целым рациональным числом, и пусть $\tau_1(\lambda, \zeta) = \zeta + \lambda$, $\tau_2(\lambda, \zeta) = 1$. Положим

$$\tilde{p}_{kjs} = \frac{\prod\limits_{x=1}^{2n}(\lambda_k + x)}{(n!)^2} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} B_k(\zeta)\tau_j(\lambda_k, \zeta - s) \prod_{x=0}^{s} \frac{1}{(\zeta - x)(\zeta + \lambda_k - x)}\, d\zeta,$$

где Γ — положительно ориентированная окружность, охватывающая все полюсы подынтегральной функции,

$$B_k(\zeta) = \sum_{\sigma=0}^{2n+1} \frac{(n!)^4}{\prod\limits_{k_1=1}^{2} \prod\limits_{\sigma_1=0}^{2n+1} {*}(\lambda_k - \lambda_{k_1} + \sigma_1 - \sigma)} \prod_{x=0}^{2n+1-\sigma} (\lambda_k + 2n + 1 + x) \prod_{x=0}^{\sigma-1} (\zeta + \lambda_k - x),$$

символ $*$ в знаменателе означает, что равную нулю скобку следует вычеркнуть. В работе [2] доказано, что при таком выборе чисел $\tilde{p}_{kjs}$ при всех $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=0}^{n} \tilde{p}_{kjs} (\nu - s)^{j-1} \frac{1}{\nu!} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu - x) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x + \lambda_k} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu + \lambda_k - x) =$$

$$= \frac{1}{\nu!} \frac{(n!)^2}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{\prod\limits_{x=1}^{4n+2} (\zeta + x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu} (\zeta + x) \prod\limits_{k=1}^{2} \prod\limits_{\sigma=0}^{2n+1} (\zeta - \lambda_k + \sigma)}\, d\zeta. \tag{4}$$

В последнем выражении через C обозначена положительно ориентированная окружность радиуса $4n + \frac{5}{2}$ с центром в начале координат.

В равенстве (4) перейдём к пределу при $\lambda_1 \to \lambda$ и $\lambda_2 \to \lambda$. В правой части вычисление предела сводится к формальной замене λ_1 и λ_2 на λ. В левой части заменим сначала λ_1 на λ и затем вычислим предел получившегося выражения при $\lambda_2 \to \lambda$. При этом возникает неопределённость, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя. Фактически дело сводится к вычёркиванию скобок вида $\pm(\lambda_2 - \lambda)$ с сохранением знака перед скобкой и дифференцированию получившегося выражения по λ_2. После этого λ_2 следует заменить на λ.

Выполнив указанные действия, умножим обе части получившегося равенства на

$(n!)^2/\prod\limits_{x=1}^{2n}(\lambda+x)$; равенство (4) преобразуется к виду

$$\sum_{l=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=0}^{n}p_{ljs}(\nu-s)^{j-1}\frac{1}{\nu!}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu-x)\frac{d^l}{d\lambda^l}\left(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{x+\lambda}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda-x)\right)=$$

$$=\frac{(n!)^2}{\prod_{x=1}^{2n}(x+\lambda)}\frac{1}{\nu!}\frac{(n!)^2}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\prod\limits_{x=1}^{4n+2}(\zeta+x)}{\prod\limits_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)\prod\limits_{\sigma=0}^{2n+1}(\zeta-\lambda+\sigma)^2}\,d\zeta. \tag{5}$$

Из способа получения равенства (5) очевидным образом вытекают формулы для коэффициентов p_{ljs}:

$$p_{0js}=\sum_{\sigma=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{\sigma+1}(n!)^4}{\sigma!(2n+1-\sigma)!}\,\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\prod_{\sigma_1=0}^{2n+1}\frac{1}{*(\lambda-\lambda_2+\sigma_1-\sigma)}\Bigg|_{\lambda_2=\lambda}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A_{js}(\lambda,\zeta)\,d\zeta+$$
$$+\frac{(n!)^2}{\prod\limits_{x=1}^{2n}(x+\lambda)}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\Bigg(\frac{\prod_{x=1}^{2n}(\lambda_2+x)}{(n!)^2}\sum_{\sigma=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{\sigma}(n!)^4}{\sigma!(2n+1-\sigma)!}\times$$
$$\times\prod_{\sigma_1=0}^{2n+1}\frac{1}{*(\lambda_2-\lambda+\sigma_1-\sigma)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A_{js}(\lambda_2,\zeta)\,d\zeta\Bigg)\Bigg|_{\lambda_2=\lambda};$$
$$p_{1js}=\sum_{\sigma=0}^{2n+1}\frac{(n!)^4}{(\sigma!(2n+2-\sigma)!)^2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A_{js}(\lambda,\zeta)\,d\zeta,$$

где

$$A_{js}(\lambda,\zeta)=\tau_j(\lambda,\zeta-s)\prod_{x=0}^{2n+1-\sigma}(\lambda+2n+1+x)\prod_{x=0}^{\sigma-1}(\zeta+\lambda-x)\prod_{x=0}^{s}\frac{1}{(\zeta-x)(\zeta+\lambda-x)}.$$

В этих формулах символ $*$ означает, что множитель $\pm(\lambda_2-\lambda)$, входящий в соответствующее произведение, вычёркивается (знак его при этом сохраняется).

Заметим, что при $0\leqslant\nu\leqslant 4n+2$ степень числителя подынтегральной функции из правой части равенства (5) по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя, причём контур интегрирования содержит все особые точки подынтегральной функции (при достаточно большом n). Поэтому правая часть равенства (5) равна нулю при указанных значениях ν. При $\nu=4n+3$ интеграл из (5) равен с точностью до знака вычету подынтегральной функции в простом полюсе $\zeta=-4n-3$. Ясно, что этот вычет отличен от нуля, а тогда не равна нулю и правая часть (5).

Пусть

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^{n} p_{ljs} z^s,\ l = 0, 1,\ j = 1, 2.$$

Равенство (5) показывает, что коэффициент при z^ν в разложении по степеням z линейной формы

$$R(z) = \sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{2} P_{lj}(z) K_{lj}(z)$$

равен правой части равенства (5). Отсюда с учётом сделанных ранее замечаний получаем, что линейная форма $R(z)$ не равна нулю тождественно и имеет при $z = 0$ порядок нуля равный $4n + 3$. Построение формы $R(z)$ является основным элементом доказательства сформулированной выше теоремы, поскольку дальнейшие рассуждения более или менее стандартны. С помощью формы $R(z)$ строится совокупность числовых линейно независимых форм

$$R_m\left(\frac{1}{q}\right) = \sum_{l=0}^{1} \sum_{j=1}^{2} P_{mlj}\left(\frac{1}{q}\right) K_{lj}\left(\frac{1}{q}\right),\ m = 1, 2, 3, 4. \tag{6}$$

При этом можно считать, что форма $R_1(z)$ совпадает с $R(z)$. Формы $R_m(z)$ можно получить с помощью дифференцирования, как это сделано в [1, гл.3,§7]. При таком подходе необходимо предварительно проверить линейную независимость функций $K_{lj}(z)$ над полем рациональных дробей. Аналогичного результата можно добиться, варьируя степени многочленов, являющихся коэффициентами рассматриваемых линейных форм, см., например, [2]. После того, как формы (6) построены, надо произвести некоторые вычисления. Для доказательства теоремы потребуются следующие оценки

$$\left|P_{mlj}\left(\frac{1}{q}\right)\right| \leqslant e^{\gamma_1 n} n^{2n},\ \left|R_m\left(\frac{1}{q}\right)\right| \leqslant e^{\gamma_1 n} |q|^{-4n} n^{-6n}, \tag{7}$$

которые нетрудно вывести из приведённых выше формул (с учётом способов получения форм $R_m(z)$, $m = 2, 3, 4$). Через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, зависящие от λ и от поля $\mathbb{I}$. Для оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{m1j}(z)$ используется лемма 2 [1, с. 186] об общем наименьшем знаменателе чисел

$$\prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_1 + x}{a_2 + x},\ \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

при рациональных a_1 и a_2. В формулы, выражающие коэффициенты рассматриваемых многочленов входят также интегралы по окружности Γ; чтобы оценить их общий наименьший знаменатель, надо записать эти интегралы в виде вычетов относительно бесконечно удалённой точки. После этого станет ясно, что указанный общий наименьший знаменатель оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$. Когда речь идёт об общем наименьшем знаменателе некоторого множества чисел из мнимого квадратичного поля, имеется в виду наименьшее по модулю ненулевое целое число из этого поля, после умножения на которое все числа данного множества становятся целыми. Перечисленные соображения приводят к такому результату: модуль общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_{m1j}(z)$ оценивается сверху величиной $e^{\gamma_3 n}$. В выражения для коэффициентов многочленов $P_{m0j}(z)$ входит величина

$$\frac{1}{\lambda+1}+\cdots+\frac{1}{\lambda+2n}, \tag{8}$$

появляющаяся в ходе дифференцирования по λ произведения $\prod_{x=1}^{2n}(\lambda+x)$. В качестве знаменателя числа (8) можно взять, например,

$$\frac{a^{2n}\prod\limits_{x=1}^{2n}(\lambda+x)}{\prod\limits_{p\leqslant 2n} p^{[\frac{2n}{p}]-\gamma_4[\frac{\log n}{\log p}]}}\,, \tag{9}$$

где a — такое натуральное число, что $a\lambda\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$; произведение в знаменателе распространено на все простые числа p, не делящие число a и дискриминант поля $\mathbb{I}$ и такие, что p распадается в поле $\mathbb{I}$ в произведение двух простых идеалов. Модуль знаменателя (9) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_5 n}n^n$. Чтобы убедиться в справедливости сформулированных утверждений следует использовать соображения, изложенные в ходе доказательства леммы 4 из [2]. Суммируя всё вышесказанное относительно общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов P_{m0j}, приходим к выводу, что модуль этого знаменателя оценивается сверху величиной $e^{\gamma_6 n}n^n$. При получении последней оценки полезно также использование того обстоятельства, что наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$ есть величина порядка $e^{O(n)}$.

Теперь можно непосредственно перейти к доказательству теоремы. Если имеется нетривиальное соотношение

$$\sum_{l=0}^{1}\sum_{j=1}^{2}h_{lj}K_{lj}\left(\frac{1}{q}\right)=0,$$

то можно с помощью линейных форм (6) составить отличный от нуля определитель, одной из строк которого будет строка коэффициентов h_{lj}; пусть, для определённости, это будет первая строка:

$$\Delta=\begin{vmatrix} h_{01} & h_{02} & h_{11} & h_{12}\\ P_{201}(1/q) & P_{202}(1/q) & P_{211}(1/q) & P_{212}(1/q)\\ P_{301}(1/q) & P_{302}(1/q) & P_{311}(1/q) & P_{312}(1/q)\\ P_{401}(1/q) & P_{402}(1/q) & P_{411}(1/q) & P_{412}(1/q)\end{vmatrix}.$$

Степени многочленов, входящих в этот определитель, ограничены сверху величиной $n+\gamma_7$. Используя сведения об оценках общих знаменателей коэффициентов указанных многочленов, нетрудно получить такую оценку снизу:

$$|\Delta| \geqslant |q|^{-3n-\gamma_8} e^{-\gamma_8} n^{-2n}. \tag{10}$$

С другой стороны, если, например, $K_{01}(1/q) \neq 0$, то определитель Δ можно записать в виде

$$\Delta = (K_{01}(1/q))^{-1} \begin{vmatrix} 0 & h_{02} & h_{11} & h_{12} \\ R_2(1/q) & P_{202}(1/q) & P_{211}(1/q) & P_{212}(1/q) \\ R_3(1/q) & P_{302}(1/q) & P_{311}(1/q) & P_{312}(1/q) \\ R_4(1/q) & P_{402}(1/q) & P_{411}(1/q) & P_{412}(1/q) \end{vmatrix}.$$

Отсюда, с учётом (7) получаем

$$|\Delta| \leqslant H e^{\gamma_9 n} |q|^{-4n} n^{-2n},$$

что противоречит (10) при $|q| \geqslant q_0$ и при достаточно большом n; через H обозначен максимум модулей чисел h_{lj}. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука, 1987.

[2] Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. — Т. 11, №6. — 2005. — С. 65 — 72.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
Получено 24.04.2012