Г.А.Серегин

О РЕГУЛЯРНОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

В работе рассматриваются вариационные задачи деформационной теории пластичности, функционалы которых имеют линейный рост относительно девиатора тензора деформаций и квадратичный рост относительно его следа. Даны обобщенные постановки, гарантирующие существование слабых решений. Особенность основного результата по регулярности состоит в том, что дифференциальные свойства слабого решения выражаются в терминах решения двойственной задачи. При некоторых ограничениях на интегрант задачи установлена частичная регулярность слабого решения.

Во многих практически интересных случаях функционалы вариационных задач деформационной теории пластичности имеют линейный рост относительно девиатора тензора деформаций и квадратичный рост относительно первого инварианта того же тензора. Это приводит к тому, что функциональная постановка вариационных задач, которая естественным образом вытекает из классической и в которой предполагается суммируемость тензора деформаций, не обеспечивает их разрешимости. Для некоторых моделей деформационной теории пластичности в работах [1-4] были даны обобщенные постановки, гарантирующие существование слабых решений. В данной работе изучаются дифференциальные свойства таких решений. В случае упругопластической среды Генки некоторые утверждения по поводу их регулярности приведены в статьях [5-7].

В математическом плане задачам деформационной теории идеальной пластичности присущи те же трудности, что и вариационным задачам для функционалов линейного роста относительно градиента искомой функции. В скалярном случае известно уже довольно много как локальных, так и глобальных результатов по регулярности их решений (см., например, [8-12]). Если же искомая функция векторнозначна, то аналогичных достижений пока не так много. По данному вопросу мы отсылаем к двум недавно опубликованным работам [13,14] (см. также библиографию в них).

Наряду с исходной вариационной задачей деформационной теории пластичности, в которой определяется вектор перемещений точек упругопластического тела, мы рассматриваем двойственную задачу относительно тензора напряжений и изучаем его

Ключевые слова: вариационная задача, существование и регулярность слабых решений, пластичность.

дифференциальные свойства. Полученная информация о регулярности решения двойственной задачи, а также соотношения двойственности позволяют установить качественные свойства слабых решений прямой задачи.

В настоящей работе доказывается наличие у тензора напряжений локально суммируемых с квадратом обобщенных производных первого порядка (теорема 2). Для интегрантов, которые порождены конкретными моделями пластических сред, утверждения основной теоремы 4 можно интерпретировать как существование упругой области. При некоторых дополнительных ограничениях на интегрант установлена частичная регулярность слабого решения (теорема 5).

Отметим принципиальный характер привлечения двойственной задачи для анализа регулярности слабых решений. Дело в том, что двойственная задача не зависит от способа определения слабого решения прямой задачи и, как правило, однозначно разрешима.

Доказательство основного результата проводится по схеме, которая используется для установления частичной регулярности методом от противного (см. [15-17]). Центральное звено в ней - неравенство Каччопполи. Его аналог для двойственной переменной содержится в формулировке леммы 2.

В первом параграфе дано определение слабого решения вариационной задачи деформационной теории идеальной пластичности. Во втором параграфе рассмотрена регуляризованная задача и установлена ее связь с исходной задачей. Наиболее существенные результаты данной работы представлены в третьем параграфе. В четвертом параграфе доказан аналог неравенства Каччопполи, а в пятом даны оценки решения одной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Основная лемма и теорема 4 доказаны соответственно в шестом и седьмом параграфах. И наконец, в восьмом параграфе сформулированы результаты по регулярности слабых решений для деформационной теории пластичности со степенным упрочнением (по этому поводу см. также работы [18-20]).

§ 1. Слабые решения и вариационное неравенство

Обозначим через $\mathbb{M}^{m\times n}$ пространство вещественных $m\times n$ матриц, через $\mathbb{M}^{n\times n}_s$ - подпространство симметричных матриц из $\mathbb{M}^{n\times n}$. Пусть, далее, $\varepsilon^D=\varepsilon-\frac{\operatorname{sp}\varepsilon}{n}\,\mathbb{I}$ - девиатор матрицы $\varepsilon\in\mathbb{M}^{n\times n}$, а $\operatorname{sp}\varepsilon$ - ее след и $\mathbb{I}$ - единичная матрица в $\mathbb{M}^{n\times n}$. Кроме того, мы будем использовать следующие обозначения

$$\varepsilon\cdot\sigma=\operatorname{sp}\,(\varepsilon^T\sigma)=\varepsilon_{ij}\sigma_{ij},\qquad |\varepsilon|^2=\varepsilon\cdot\varepsilon,\qquad \varepsilon=(\varepsilon_{ij}),\quad \sigma=(\sigma_{ij})\in\mathbb{M}^{n\times n},$$

в которых принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, а матрица ε^T получается из матрицы ε транспонированием.

Пусть Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n=2$ или 3), граница $\partial\Omega$ которой непрерывна по Липшицу. Обозначим через $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ и $W^1_p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ соответствующие пространства Лебега и Соболева функций со значениями в $\mathbb{R}^m$.

В рамках деформационной теории пластичности поле перемещений u точек однородного и изотропного упругопластического тела, занимающего область Ω и находящегося под действием заданных нагрузок f и F, определяется в результате решения следующей вариационной задачи (см., например, [21]):

$$\textit{найти } u=(u_i)\in V_0+u_0:\ I(u)=\inf\{I(v): v\in V_0+u_0\}. \tag{1.1}$$

Здесь в качестве области определения функционала

$$I(v) = \int_\Omega (g(\varepsilon(v)) - f\cdot v)dx - \int_{\partial_2\Omega} F\cdot v dS$$

выбирается пространство

$$D^{p,q}(\Omega) = \{v=(v_i): \operatorname{div} v\in L^p(\Omega),\ |v|+|\varepsilon^D(v)| \in L^q(\Omega)\}$$

при $p=2$ и $q=1$; V_0 - множество всех вектор-функций из $D^{2,1}(\Omega)$, равных нулю на $\partial_1\Omega\subset\partial\Omega$; $\partial_2\Omega=\partial\Omega\setminus\partial_1\Omega$; u_0 - заданное поле перемещений из $D^{2,1}(\Omega)$; $\varepsilon(v)$ - симметричная часть градиента векторного поля v, т.е. $\varepsilon(v)=(\varepsilon_{ij}(v))$, $\varepsilon_{ij}(v) = (v_{i,j}+v_{j,i})/2$ и $v_{i,j}= \partial v_i/\partial x_j$; $g(\varkappa)=\frac{1}{2}K_0\mathrm{sp}^2\varkappa+ + g_0(|\varkappa^D|)$ для всех $\varkappa$ из $\mathbb{M}^{n\times n}_s$, где K_0 - положительная постоянная, а функция g_0 определяется выбором конкретной модели пластичности.

Будем считать, что

$$f\in L^n(\Omega;\mathbb{R}^n),\ F\in L^\infty(\partial_2\Omega;\ \mathbb{R}^n),\ u_0\in W^1_2(\Omega;\ \mathbb{R}^n). \tag{1.2}$$

Мы предполагаем, что четная функция $g_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &\text{а) } g_0 \text{ непрерывно дифференцируема на } \mathbb{R};\\ &\text{б) } g_0' \text{ не убывает на } [0,+\infty[;\\ &\text{в) } g_0'(0)=0,\quad g_0'(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\sqrt{2}\,k_*, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где k_* - заданная положительная постоянная.

Задача (1.1) имеет двойственную задачу, в которой определяется тензор напряжений σ

$$\textit{найти } \sigma\in Q_f\cap K:\ R(\sigma)=\sup\{R(\tau): \tau\in Q_f\cap K\}. \tag{1.4}$$

Здесь функционал R задачи вычисляется по формуле

$$R(\tau) = \int_\Omega (\tau\cdot\varepsilon(u_0) - g^*(\tau) - f\cdot u_0)dx - \int_{\partial_2\Omega} F\cdot u_0 dS,$$

в которой $g^*(\tau)= \frac{1}{2n^2K_0}\mathrm{sp}^2\tau+g_0^*(|\tau^D|)$ - преобразование Юнга функции g, а $g_0^*(t)=\sup\{ts-g_0(s): s\in\mathbb{R}\}$ - преобразование Юнга функции g_0;

$$K = \{\tau\in\Sigma: |\tau^D| \le \sqrt{2}\,k_* \text{ п.в. в } \Omega\}$$

- множество допустимых тензорных полей;

$$Q_f = \{\tau\in\Sigma_n : \text{div } \tau = -f \text{ в } \Omega,\ \tau\nu = F \text{ на } \partial_2 \Omega \}$$

- множество тензорных полей, удовлетворяющих уравнениям равновесия (через ν обозначена единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$); при определении множеств K и Q_f были использованы следующие пространства тензорных функций:

$$\Sigma = \{\tau = (\tau_{ij}) : \tau = \tau^T,\ |\tau|\in L^2(\Omega),\ |\tau^D|\in L^\infty(\Omega)\},$$

$$\Sigma_q = \{ \tau \in \Sigma : \text{div } \tau \in L^q(\Omega)\}.$$

Замечание 1. Пусть $b\in L^\infty(\partial_2\Omega;\mathbb{R}^n)$ и $\tau\in\Sigma_n$. Будем говорить, что $\tau\nu = b$ на $\partial_2\Omega$ тогда и только тогда, когда функции b и τ связаны тождеством

$$\int_\Omega (\tau\cdot\varepsilon(v) + v\cdot\text{div }) dx = \int_{\partial_2\Omega} b\cdot vdS,\quad \forall v\in V_0.$$

Приведем достаточное условие разрешимости задачи (1.4) (см., например, [2,4])

$$\exists\sigma^1\in Q_f\cap K:\ |\sigma^{1D}| \le \sqrt{2}\ k_*\lambda \text{ п.в. в } \Omega \text{ для некоторого } \lambda\in[0,1[. \tag{1.5}$$

Функционалы задач (1.1) и (1.4) порождены лагранжианом l

$$l(v,\tau) = \int_\Omega (\varepsilon(v)\cdot\tau - g^*(\tau)-f\cdot v)dx - \int_{\partial_2\Omega} F\cdot vdS,\quad v\in V_0 + u_0,\ \tau\in\Sigma,$$

при этом

$$I(v) = \sup_{\tau\in\Sigma} l(v,\tau),\qquad \inf_{v\in V_0+u_0} l(v,\tau) = \begin{cases} R(\tau), & \tau\in Q_f, \\ -\infty, & \tau\notin Q_f. \end{cases}$$

Более того, справедливо утверждение:
пара функций u и σ есть решение задач (1.1) и (1.4) тогда и только тогда, когда она является седловой точкой лагранжиана l на множестве (V_0+u_0) (1.6)
т.е. когда

$$l(u,\tau) \le l(u,\sigma) \le l(v,\sigma),\quad \forall v\in V_0 + u_0,\ \forall\tau \in K.$$

Задача (1.1), вообще говоря, не имеет решения. Это объясняется тем, что функционал I в лучшем случае коэрцитивен на аффинном многообразии V_0+u_0 нерефлексивного пространства $D^{2,1}(\Omega)$. С физической же точки зрения в задаче (1.1) не учитывается возможность появления разрывных решений.

Наш подход к построению вариационного расширения задачи (1.1) изложен в [3,4] и основан на введении расширенного лагранжиана L

$$L(v,\tau) = -\int_{\partial_2\Omega} F\cdot u_0 dS + \int_\Omega (\tau\cdot\varepsilon(u_0)+(u_0-v)\cdot \text{div } \tau - g^*(\tau)-f\cdot v)dx,$$

областью определения которого является множество $V_+\times\Sigma$. Класс V_+ состоит из всех суммируемых в Ω со степенью $\frac{n}{n-1}$ вектор-функций v, для которых конечна величина

$$\sup\left\{\left| -\int_{\partial_2\Omega} b\cdot u_0\, dS + \int_{\Omega} (\tau\cdot\varepsilon(u_0)+(u_0-v)\cdot \operatorname{div}\tau)dx \right| : \|\tau\|_{\Sigma} + \right.$$

$$\left. + \| b \|_{L^\infty(\partial_2\Omega)} \le 1,\ \tau\in\Sigma_n,\ \tau\nu = b \text{ на } \partial_2\Omega \right\}.$$

Прямо из определения класса V_+ следует, что он вкладывается в пространство $BD(\Omega)$ суммируемых в Ω вектор-функций, для которых симметричная часть градиента есть ограниченная в Ω мера [22]. Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.5), *тогда лагранжиан* L *имеет на множестве* $V_+\times(K\cap Q)$ *по крайней мере одну седловую точку* (u,σ) *такую, что:*

$$L(u,\tau) \le L(u,\sigma) \le L(v,\sigma), \quad \forall v\in V_+,\ \forall\tau\in K\cap Q, \tag{1.7}$$

где $Q = \{\tau\in\Sigma_n : \tau\nu = F$ *на* $\partial_2\Omega\}$.

Более того, тензорное поле σ *есть решение задачи* (1.4), *а векторное поле* $u\in V_+$ *есть решение вариационной задачи вида*

$$\Phi(u) = \inf\{\Phi(v): v\in V_+\},\ \Phi(v) = \sup_{\tau\in Q} L(v,\tau), \tag{1.8}$$

и справедливы равенства

$$\Phi(u) = \inf\{I(v):\ v\in V_0+u_0\} = R(\sigma). \tag{1.9}$$

Отметим также, что $\Phi(v) = I(v)$, если $v\in V_0+u_0$.

Положим $t_0 = \operatorname{int}\{t>0: g_0'(t)=\sqrt{2}\, k_*\}$. Если предположить еще, что

$$g_0\in C^2([0,t_0[\quad \text{и} \quad g_0''(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in[0,t_0[, \tag{1.10}$$

то функция g_0^* будет строго выпуклой, а задача (1.4) - однозначно разрешимой (см. [14]).

§ 2. Регуляризованная задача

Рассмотрим следующую вариационную задачу, которая зависит от положительного параметра δ,

$$\text{найти}\quad u^\delta\in V_*+u_0 : I^\delta(u^\delta) = \inf\{I^\delta(v): v\in V_*+u_0\}, \tag{2.1}$$

где

$$I^\delta(v) = \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\varepsilon^D(v)|^2 dx + I(v), \qquad V_* = V_0\cap W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^n).$$

Мы будем предполагать, что

пространство V_* плотно в V_0 по норме пространства $D^{2,1}(\Omega)$. (2.2)

В [4] указаны практически интересные соотношения между множествами $\partial_1\Omega$ и

$\partial_2\Omega$, при которых условие (2.2) выполнено.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.5), (1.10), (2.2), *и пусть* $\delta \longrightarrow 0$. *Тогда существуют последовательности* u^δ *и* σ^δ *такие, что*

$$\sigma^\delta = \delta\varepsilon^D(u^\delta) + \frac{\partial g}{\partial \tau}(\varepsilon(u^\delta)) \longrightarrow \sigma \quad \textit{слабо в} \quad L^2(\Omega;\mathbb{M}^{n\times n}_s); \tag{2.3}$$

$$u^\delta \longrightarrow u \quad \textit{сильно в } L^r(\Omega;\mathbb{R}^n) \textit{ при } r\in[1, \frac{n}{n-1}[\ ;$$

$$u^\delta \longrightarrow u \quad \textit{слабо в} \quad L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega;\mathbb{R}^n);$$

$$\int\limits_\Omega \tau\cdot\varepsilon^D(u^\delta)dx \longrightarrow \int\limits_\Omega \tau\cdot\varepsilon^D(u),\ \forall\tau\in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{M}^{n\times n}_s);\ \ \delta\int|\varepsilon^D(u^\delta)|^2dx \longrightarrow 0,$$

$$\tau^{\delta D} = \sigma^{\delta D} - \delta\varepsilon^D(u^\delta) \longrightarrow \sigma^D \ * - \textit{слабо в } L^\infty(\Omega;\mathbb{M}^{n\times n}_s),$$

где u *- некоторое решение задачи* (1.8), *а* σ *есть единственное решение задачи* (1.4).

Доказательство леммы 1 для интегранта вида

$$g_0'(t) = \begin{cases} 2\mu t, & 0 \le t \le t_0 = \dfrac{\sqrt{2}\,k_*}{2\,\mu}, \\ \sqrt{2}\,k_*, & t > t_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

соответствующего упругопластической среде Генки, имеется в [23] (см. также [14], лемма 2) и без труда переносится на общий случай, если воспользоваться равенством $\tau^\delta\cdot\varepsilon(u^\delta)=g(\varepsilon(u^\delta))+g^*(\tau^\delta)$ п.в. в Ω.

Из леммы 1 можно вывести следующие утверждения:

Теорема 2. *Пусть* $f\in W^1_{\infty,loc}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *и существует положительная постоянная* c_* *такая, что неравенство* $g_0''(t)\le c_* g_0'(t)/t$ *имеет место для всех неотрицательных* t. *Тогда в условиях леммы* 1 *справедливо включение* $\sigma\in W^1_{2,loc}(\Omega;\mathbb{M}^{n\times n}_s)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1, *а также*

$$\textit{функция } t \longmapsto g_0'(t) \textit{ выпукла вверх при } t>t_1\ge 0, \tag{2.5}$$

$$t_0 = +\infty. \tag{2.6}$$

Тогда $\operatorname{meas}\{x\in\Omega : |\sigma^D(x)| = \sqrt{2}\,k_*\} = 0$.

Для интегранта (2.4) теорема 2 доказана в [7]. В общей ситуации она доказывается по той же схеме, что и лемма 2 настоящей работы, а те несложные изменения, которые при этом необходимо сделать, можно найти в [7]. Теорема 3 фактически доказана в [14], теорема 2.

§ 3. Формулировка основных результатов

Доопределим нулем функцию $t \longmapsto g_0''(t)$ в точке $t = t_0$.

Теперь введем два симметричных линейных оператора $\Lambda_0,\Lambda_0^*:\mathbb{M}^{n\times n}_s \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times n}_s$, которые зависят от тензорных параметров следующим образом:

$$\varepsilon \longmapsto \Lambda_0(\tau)\varepsilon = \left(\frac{\partial^2 g_0(|p|)}{\partial p_{ij}\partial p_{km}} \bigg|_{p=\tau} \varepsilon_{km} \right), \text{æ} \longmapsto \Lambda_0^*(\sigma)\text{æ} = \left(\frac{\partial^2 g_0'(|p|)}{\partial p_{ij}\partial p_{km}} \bigg|_{p=\sigma} \text{æ}_{km} \right), \tag{3,1}$$

где $\varepsilon, \text{æ}, \tau, \sigma \in \mathbb{M}_s^{n\times n}$, причем $|\sigma| < \sqrt{2}\; k_*$.

Если $\sigma = g_0'(|\tau|)\tau/|\tau|$, то операторы $\Lambda_0(\tau)$ и $\Lambda_0^*(\sigma)$ взаимно обратны, т.е. $\Lambda_0^{-1}(\tau) = \Lambda_0^*(\sigma)$. Далее, введенные операторы порождают билинейные формы

$$E_0(\tau;\varepsilon,\text{æ}) = (\Lambda_0(\tau)\varepsilon)\cdot\text{æ}, \quad E_0^*(\sigma;\varepsilon,\text{æ}) = (\Lambda_0^*(\sigma)\varepsilon)\cdot\text{æ}.$$

Если ввести функции $h_1(t) = \min\{g_0''(t), g_0'(t)/t\}$, $h_2(t) = \max\{g_0''(t), g_0'(t)/t\}$, то нетрудно установить следующие неравенства

$$h_1(|\tau|)|\varepsilon|^2 \le E_0(\tau;\varepsilon,\varepsilon) \le h_2(|r|)|\varepsilon|^2, \qquad \varepsilon,\tau \in \mathbb{M}_s^{n\times n}. \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что

для $\forall\lambda \in [0, \sqrt{2}\; k_*[$ существует постоянная $H_\lambda > 0$:

$$\left(\frac{g_0'(|\tau|)}{|\tau|}\tau - \frac{g_0'(|\varepsilon|)}{|\varepsilon|}\varepsilon \right)\cdot(\tau-\varepsilon) \ge H_\lambda h_2(|\tau|)|\tau-\varepsilon|^2 \tag{3.3}$$

для $\forall\tau, \varepsilon \in \mathbb{M}_s^{n\times n}$, но таких, что $\varepsilon = (g_0^*)'(|\sigma|)\sigma/|\sigma|$ и $|\sigma| \le \lambda$.

Введем величины $\nu_1(T) = \min\limits_{0\le t\le T} h_1(t), \nu_2 = \max\limits_{t\ge 0} h_2(t)$. Как показывают условия (1.10), (3.3), они связаны следующими неравенствами

$$0 < \nu_1(T) \le \nu_2 < +\infty, \quad \forall T \in [0, t_0[. \tag{3.4}$$

Из (3.1), (3.2) и (3.4) легко получаются полезные оценки

$$\nu_1(T)|\varepsilon|^2 \le E_0(\tau;\varepsilon,\varepsilon) \le \nu_2|\varepsilon|^2, \quad \forall\tau,\varepsilon \in \mathbb{M}_s^{n\times n}, |\tau| \le T < t_0. \tag{3.5}$$

и

$$\mu_1|\text{æ}|^2 \le E_0^*(\sigma;\text{æ},\text{æ}) \le \mu_2(\lambda)|\text{æ}|^2, \quad \forall\sigma,\text{æ} \in \mathbb{M}_s^{n\times n}, |\sigma| \le \lambda < \sqrt{2}\; k_*. \tag{3.6}$$

Теперь мы можем дать основные результаты данной работы.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), (1.5), (1.10), (2.2), (3.4), *а также*

$$f \in W^2_{\bar n,\, loc}(\Omega;\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad \bar n > n. \tag{3.7}$$

Пусть σ есть решение задачи (1.4). *Тогда существует открытое множество* $\Omega_1 \subset \Omega$ *такое, что*

$$\sigma \in C^\nu(\Omega_1;\mathbb{M}_s^{n\times n}), \qquad \forall\nu \in]\,0,1\,[, \tag{3.8}$$

$$|\sigma^D(x)| < \sqrt{2}\; k_* \quad \forall x \in \Omega_1, \quad |\sigma^D(x)| < \sqrt{2}\; k_* \text{ п.в. в } \Omega \setminus \Omega_1. \tag{3.9}$$

Т е о р е м а 5. *Если выполнены условия теорем* 3 *и* 4, *то* meas $(\Omega\setminus\Omega_1) = 0$.

Для доказательства теоремы 4, согласно терминологии, принятой в [17], используется „непрямой" метод (см. также [15,16]), в котором фундаментальную роль играет неравенство Каччопполи. Его аналог устанавливается в следующем параграфе.

§ 4. Неравенство Каччопполи

Обозначим через $B(x_0,R)$ шар радиуса R с центром в точке x_0 через

$$\int_{B(x_0,R)} hdx = (h)_{x_0,R} = \frac{1}{\operatorname{meas} B(R)} \int_{B(x_0,R)} hdx$$

среднее значение функции h на шаре $B(x_0,R)$, а через $V_*=\{v: \varepsilon(v)=0 \text{ в } \Omega\}$ – пространство жестких смещений.

Лемма 2. *Выберем положительное число n_1 так, чтобы $n<n_1<\min\{2n/(n-2),\bar{n}$. Пусть $B(x,R) \Subset \Omega_0 \Subset \Omega$, $t\in[0,1[$, и пусть постоянные матрицы $\sigma^0, æ^0 \in \mathbb{M}^{n\times n}_s$ связаны соотношениями*

$$æ^0 = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}(\sigma^0) \quad \text{при} \quad |\sigma^{0D}| \le \lambda < \sqrt{2}\, k_*. \tag{4.1}$$

Тогда в условиях теоремы 4 справедливо неравенство

$$\frac{1}{R^{n-2}} \int_{B(x_0,tR)} \sigma_{,k}\cdot\sigma_{,k}\,dx \le \frac{c_1}{(1-t)^6 H_\lambda^2} \left\{ R^2 + \left(\int_{B(x_0,R)} |\bar{\sigma}|^{n_1} dx \right)^{2/n_1} + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + \frac{1}{R^2} \int_{B(x_0,R)} |\bar{u}|^{n_1^*} dx \right)^{2/n_1^*} \Bigg\}, \quad \bar{\sigma} = \sigma-\sigma^0, \quad \bar{u} = u-æ^0(x-x_0)-v_*, n_1^*=\frac{n_1}{n_1-1}, \tag{4.2}$$

в котором постоянная c_1 зависит только от n, K_0, k_*, Ω_0, f.

Доказательство. Для интегранта (2.4) лемма 2 установлена в [23]. Поэтому мы изложим лишь план ее доказательства с указанием тех изменений и дополнений, которые необходимо сделать в [23], теорема 1.

Итак, мы рассматриваем регуляризованную задачу. Используя разностную технику, легко показать, что $\varepsilon(u^\delta_{,k})$, $\sigma^\delta_{,k}\in W^1_{2,loc}(\Omega;\mathbb{M}^{n\times n}_s)$. Поэтому мы можем написать тождества

$$\int_\Omega \sigma^\delta_{,k}\cdot\varepsilon(v)dx = \int_\Omega f_{,k}\cdot v dx, \quad \forall v \in C^\infty_0(\Omega;\mathbb{R}^n), \quad k=1,2,\dots,n, \tag{4.3}$$

где

$$\sigma^\delta_{,k} = K_0 \operatorname{div} u^\delta_{,k}\mathbb{I} + \delta\varepsilon^D(u^\delta_{,k}) + \Lambda_0(\varepsilon^D(u^\delta))\varepsilon^D(u^\delta_{,k}).$$

При доказательстве леммы 2 для краткости мы будем часто опускать индекс "δ". Принимая во внимание оценки (3.2) и (3.4), для решения регуляризованной задачи будем иметь следующие неравенства:

$$\sigma^D_{,k}\cdot\sigma^D_{,k} \le (\delta+\nu_2)(\delta\varepsilon^D(u_{,k})\cdot\varepsilon^D(u_{,k}) + E_0(\varepsilon^D(u);\ \varepsilon^D(u_{,k}),\varepsilon^D(u_{,k}))), \tag{4.4}$$

$$\sigma_{,k}\cdot\sigma_{,k} \le c_2(K_0,n,\nu_2)\sigma_{,k}\cdot\varepsilon(u_{,k}) \quad \text{при} \quad \delta\in]0,1].$$

Возьмем произвольную функцию $\varphi\in C^\infty_0(\Omega)\cap W^3_\infty(\Omega)$ и положим в тождестве (4.3)

$v=\varphi^2\bar{u}_{,k}$. Затем повторяем рассуждения работы [23], теорема 1. Необходимая при этом их модификация связана лишь с очевидным применением оценок (3.2) и (3.4). В результате получим

$$I\le c_3I^{1/2}\left(\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\left(\delta|\varepsilon^D(\bar{u})|^2+|\bar{\sigma}|^2+h_2(|\varepsilon^D(u)|)|\varepsilon^D(\bar{u})|^2\right)dx\right)^{1/2}+$$

$$+\int_\Omega 2(f\otimes\nabla\varphi^2)\cdot\varepsilon^D(\bar{u})dx+\int_\Omega\bar{\sigma}_{ij}\varphi^2_{,ijk}\,\bar{u}_k dx-\int_\Omega(f\otimes\bar{u})\cdot\nabla\nabla\varphi^2dx+$$

$$+\int_\Omega\varphi^2\nabla f\cdot\nabla\bar{u}dx,\qquad I=\int_\Omega\varphi^2\sigma_{,k}\cdot\varepsilon(u_{,k})dx. \tag{4.5}$$

Самым „плохим" в неравенстве (4.5) слагаемым является интеграл вида

$$I_x=\int_\Omega|\nabla\varphi|^2h_2(|\varepsilon^D(u)|)\;|\varepsilon^D(\bar{u})|^2dx.$$

Именно для его квалифицированной оценки требуется условие (3.3). Действительно, в силу уравнений равновесия имеем

$$\int_\Omega|\nabla\varphi|^2\bar{\sigma}\cdot\varepsilon(\bar{u})dx=\int_\Omega(|\nabla\varphi|^2f\cdot\bar{u}-(\bar{\sigma}\nabla(|\nabla\varphi^2|)\cdot\bar{u})dx. \tag{4.6}$$

Теперь если воспользоваться соотношениями (4.1), зависимостью тензора напряжений σ от тензора деформаций $\varepsilon(u)$ (см. лемму 1) и условием (3.3), то можно установить следующую оценку:

$$\bar{\sigma}\cdot\varepsilon(\bar{u})\ge K_0\mathrm{div}^2\bar{u}+\delta|\varepsilon^D(\bar{u})|^2+\delta\text{æ}^0\cdot\varepsilon^D(\bar{u})+H_\lambda h_2(|\varepsilon^D(u)|)|\varepsilon^D(\bar{u})|^2,$$

которая вместе с (4.6) приводит к соотношению

$$I_x\le\frac{1}{H_\lambda}\int_\Omega\left\{|\nabla\varphi^2f\cdot\bar{u}-(\bar{\sigma}\nabla(|\nabla\varphi|^2))\cdot\bar{u}-\delta|\nabla\varphi|^2\text{æ}^0\cdot\varepsilon^D(\bar{u})\right\}dx. \tag{4.7}$$

Выберем теперь функцию φ специальным образом: $0\le\varphi(x)\le1$ при $x\in\Omega$, supp $\varphi\subset B(x_0,s)\subset B(x_0,R)\Subset\Omega_0$, $\varphi(x)=1$ при $x\in B(x_0,r)$, $0<r<s\le R$, $\max\limits_x|\nabla^k\varphi(x)|\le\dfrac{c_4(n)}{(s-r)^k}$ при $k=1,2,3$. Проинтегрируем по частям во втором и пятом слагаемых правой части неравенства (4.5) и применим оценки (4.4), (4.7). В результате придем к неравенству

$$\int_{B(x_0,r)}\sigma_{,k}\cdot\sigma_{,k}dx\le\frac{c_5}{H_\lambda}\left\{\frac{1}{(s-r)^2}\int_{B(x_0,s)}(\delta|\varepsilon^D(\bar{u})|^2+|\bar{\sigma}|^2+\delta|\varepsilon^D(\bar{u})||\text{æ}^{0D}|)dx+\right.$$

$$+\frac{1}{(s-r)^3}\int_{B(x_0,s)}|\bar{\sigma}||\bar{u}|dx+\int_{B(x_0,s)}|\Delta f||\bar{u}|dx+\frac{1}{(s-r)}\int_{B(x_0,s)}|\nabla f||\bar{u}|dx+$$

$$+\frac{1}{(s-r)^2}\int\limits_{B(x_0,s)}|f|\,|\bar{u}|dx\Big\}. \tag{4.8}$$

Для оценки второго интеграла в правой части последнего неравенства воспользуемся теоремой вложения в следующей форме (см. [9]):

$$\Big(\int\limits_{B(x_0,s)}|\bar{\sigma}|^{n_1}dx\Big)^{1/n_1}\le$$

$$\le c_6(n)s^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{n_1}}\Big(\int\limits_{B(x_0,s)}\Big(\sigma_{,k}\cdot\sigma_{,k}+\frac{1}{s^2}|\bar{\sigma}|^2\Big)dx\Big)^{1/2}. \tag{4.9}$$

Применяя неравенства Гельдера и (4.9) к оценке второго интеграла в (4.8) и итерационную технику, которая была использована для аналогичных целей в [23], теорема 1, получим соотношение

$$\frac{1}{R^{n-2}}\int\limits_{B(x_0,tR)}\sigma^{\delta}_{,k}\cdot\sigma^{\delta}_{,k}dx\le$$

$$\le\frac{c_7}{(1-t)^6H_\lambda^2}\Big\{\int\limits_{B(x_0,R)}\Big(|\bar{\sigma}^{\delta}|^2+\delta|\varepsilon^{D}(\bar{u}^{\delta})|^2+\delta|æ^0|\,|\varepsilon^{D}(\bar{u}^{\delta})|\Big)dx+$$

$$+\frac{1}{R^2}\Big(\int\limits_{B(x_0,R)}|\bar{u}^{\delta}|^{\overset{*}{n}_1}dx\Big)^{2/\overset{*}{n}_1}+R^2\Big(\int\limits_{B(x_0,R)}|f|^{n_1}dx\Big)^{2/n_1}+$$

$$+R^4\Big(\int\limits_{B(x_0,R)}|\nabla f|^{n_1}dx\Big)^{2/n_1}+R^6\Big(\int\limits_{B(x_0,R)}|\Delta f|^{n_1}dx\Big)^{2/n_1}\Big\}. \tag{4.10}$$

Последняя оценка фактически означает (см. лемму 1), что $\sigma^{\delta}\rightharpoonup\sigma$ слабо в $W^1_{2,loc}(\Omega;\ \mathbb{M}^{n\times n}_s)$ и, следовательно, $\sigma^{\delta}\to\sigma$ сильно в $L^2_{loc}(\Omega;\ \mathbb{M}^{n\times n}_s)$. Принимая во внимание это обстоятельство, а также утверждения леммы 1, предельным переходом в (4.10) устанавливаем требуемое неравенство (4.2).

§ 5. Оценки решения одной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Положим для краткости $B(t)=B(0,t)$, $B=B(1)$, $(h)_{,t}=(h)_{0,t}$. Пусть функции $v\in L^{\overset{*}{n}_1}(B;\mathbb{R}^n)$ и $\tau\in L^{n_1}(B;\mathbb{M}^{n\times n}_s)$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon(v)=\Lambda^*(\sigma^0)\tau=\frac{\mathrm{sp}\tau}{n^2K_0}\mathbb{I}+\Lambda_0^*(\sigma^{0D})\tau^D,\ \operatorname{div}\tau=0 \text{ в } B, \tag{5.1}$$

где $\sigma^0\in\mathbb{M}_s^{n\times n}$ и $|\sigma^{0D}|\le\lambda<\sqrt{2}\,k_*$.

Из результатов по регулярности линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами нетрудно вывести следующее утверждение (см. [14], лемма 4).

Лемма 3. *Для функций v и τ, удовлетворяющих системе уравнений* (5.1), *справедлива оценка*

$$W(t)\le c_8(t_*,\lambda)tW(1),\quad 0<t<t_*<1, \tag{5.2}$$

где

$$W(t)=\left(\int\limits_{B(t)}|\tau-(\tau)_{,t}|^{n_1}dy\right)^{1/n_1}+\frac{1}{t}\inf_{w_*\in W_*}\left(\int\limits_{B(t)}|v-(\Lambda^*(\sigma^0)(\tau)_{,t})y-w_*|^{n_1^*}dy\right)^{1/n_1^*}$$

и

$$W_*=\{w_*:\varepsilon(w_*)=0 \text{ в } B\}.$$

§ 6. Основная лемма и ее итерации

Лемма 4. *Пусть* $0<\varepsilon_3<1$ *и* $0<t_*<1$, *тогда для любых* $t\in]0,t_*[$ *и* $\lambda\in[0,\sqrt{2}\,k_*[$ *существуют положительные числа* $\varepsilon_0=\varepsilon_0(t,t_*,\lambda,\varepsilon_3)$, $R_0=R_0(t,t_*,\lambda,\varepsilon_3)$ *такие, что если*

$$0<R<R_0,\ B(x_0,R)\Subset\Omega_0;\ |(\sigma^D)_{x_0,R}|\le\lambda;\ U(x_0,R)+R^{\varepsilon_3}<\varepsilon_0, \tag{6.1}$$

то

$$U(x_0,tR)\le 2c_8(t_*,\ \lambda)t(U(x_0,R)+R^{\varepsilon_3}), \tag{6.2}$$

где

$$U(x_0,R)=U_1(x_0,R)+U_2(x_0,R),\ U_1(x_0,R)=\left(\int\limits_{B(x_0,R)}|\sigma-(\sigma)_{x_0,R}|^{n_1}dx\right)^{1/n_1},$$

$$U_2(x_0,R)=\frac{1}{R}\inf_{v_*\in V_*}\left(\int\limits_{B(x_0,R)}|u-\sigma^{x_0,R}(x-x_0)-v_*|^{n_1^*}dx\right)^{1/n_1^*},$$

$$\sigma^{x_0,R}=\frac{\partial g^*}{\partial\tau}((\sigma)_{x_0,R}).$$

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда существуют числа t, λ и последовательности x^h, R_h, ε_h такие, что

$$B(x^h,R_h)\Subset\Omega_0;\ \varepsilon_h=U(x^h,R_h)+R_h^{\varepsilon_3}\xrightarrow[h\to+\infty]{}0;\ |(\sigma^D)_{x^h,R_h}|\le\lambda, \tag{6.3}$$

$$U(x^h,tR_h)>2c_8t(U(x^h,R_h)+R_h^{\varepsilon_3})=2c_8t\varepsilon_h.$$

Локальный вариант первого неравенства в (1.7) имеет вид

$$\int\limits_{B(x^h,R_h)} \left\{-\bar{u}^h\cdot \operatorname{div}(\psi(\tau-\sigma))+\psi(\sigma^{x^h,R_h}\cdot(\tau-\sigma)-g^*(\tau)+g^*(\sigma))\right\}dx\le 0 \tag{6.4}$$

для любых $\tau\in C^1(\bar{B}(x^h,R_h);\ \mathbb{M}^{n\times n}_s)$ и $\psi\in C^1_0(\bar{B}(x^h,R_h))$, но таких, что $|\tau^D(x)|\le\sqrt{2}\,k_*$ и $0\le\psi(x)\le 1$ для всех $x\in B(x^h,R_h)$.

Здесь $\bar{u}^h=u-\sigma^{x^h,R_h}(x-x^h)-v^h_*$, а жесткое смещение v^h_* выбирается из условия

$$\int\limits_{B(x^h,R_h)} |\bar{u}^h|^{n_1^*}dx = \inf_{v_*\in V_*}\int\limits_{B(x^h,R_h)} |u-\sigma^{x^h,R_h}(x-x^h)-v_*|^{n_1^*}dx. \tag{6.5}$$

Неравенство (4.2) можно записать в следующей форме:

$$\frac{1}{R_h^{n-2}}\int\limits_{B(x^h,sR_h)} \sigma_{,k}\cdot\sigma_{,k}dx \le \frac{c_9(\Omega_0,f,\lambda)}{(1-s)^6}\left(U^2(x^h,R_h)+R_h^2\right). \tag{6.6}$$

Теперь переведем все на единичный шар при помощи замены переменных $x=x^h+R_hy$, $x\in B(x^h,\ R_h)$, $y\in B$. Положим

$$v^h(y)=\bar{u}^h(x)/(\varepsilon_hR_h),\quad \sigma^h(y)=(\sigma(x)-(\sigma)_{x^h,R_h})/\varepsilon_h. \tag{6.7}$$

Из (6.3), (6.5)-(6.7) после замены переменных получаем такие соотношения:

$$(\sigma^h)_{,1}=0,\quad W^h(1)=\left(\int\limits_B|\sigma^h|^{n_1}dy\right)^{1/n_1}+\left(\int\limits_B|v^h|^{n_1^*}dy\right)^{1/n_1^*},$$

$$W^h(1)+R_h^{\varepsilon_3}/\varepsilon_h=1,\quad W^h(t)>2c_8t, \tag{6.8}$$

$$\int\limits_{B(s)}\sigma^h_{,k}\cdot\sigma^h_{,k}dy\le\frac{c_9}{(1-s)^6}\left((W^h(1)^2+(R_h/\varepsilon_h)^2\right), \tag{6.9}$$

где

$$W^h(t)=W^h_1(t)+W^h_2(t),\quad W^h_1(t)=\left(\int\limits_{B(t)}|\sigma^h-(\sigma^h)_{,t}|^{n_1}dy\right)^{1/n_1},$$

$$W^h_2(t)=\frac{1}{t}\inf_{w_*\in W_*}\left(\int\limits_{B(t)}|v^h(y)-\int\limits_0^1(\Lambda^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta\varepsilon_h(\sigma^h)_{,t})(\sigma^{,h})yd\theta-w_*|^{n_1^*}dy\right)^{1/n_1^*}.$$

Осталось произвести замену переменных в неравенстве (6.4). Для этого возьмем произвольное положительное число m и рассмотрим множество $K_m=\{\tau\in C^1(\bar{B};\ \mathbb{M}^{n\times n}_s):\ |\tau^D|\le m\}$. Затем выберем произвольным образом функцию $\varphi\in C^1_0(B)$ такую, что $0\le\varphi(y)\le 1$ для всех y из B и положим в (6.4) $\psi(x)=\varphi((x-x^h)/R_h)$. Тогда для $h>h(m)$ после разложения по параметру ε_h в неравенстве (6.4) будем иметь

$$-\int_B \{v^h\cdot\text{div }(\varphi(\tau-\sigma^h))+\frac{\varphi}{2}\Big(\int_0^1 E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_1\varepsilon_h\tau;\tau,\tau)d\theta_1 -$$

$$-\int_0^1 E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_2\varepsilon_h\sigma^h;\ \sigma^h,\sigma^h)d\theta_2\Big)\}dy\le 0,\qquad \forall\tau\in K_m, \tag{6.10}$$

где

$$E^*(\sigma;\text{æ},\varepsilon)=\frac{1}{n^2K_0}\text{ sp æ sp }\varepsilon+E_0^*(\sigma^D;\ \text{æ}^D,\ \varepsilon^D).$$

Непосредственно из (6.8) следует, что

$$\sigma^h\longrightarrow\hat\sigma\ \text{ слабо в } L^{n_1}(B;\mathbb{M}_s^{n\times n}),\ \ v^h\longrightarrow\hat v \text{ слабо в } L^{n_1^*}(B;\mathbb{R}^n). \tag{6.11}$$

Кроме того, поскольку

$$\Big(\int_B|\text{div }\sigma^h|^{n_1}dy\Big)^{1/n_1}=\frac{R_h^{1-\frac{n}{n_1}}}{\varepsilon_h}\Big(\int_{B(x^h,R_h)}|f|^{n_1}dx\Big)^{1/n_1}\xrightarrow[h\to+\infty]{}0,$$

то $\text{div }\sigma^h\longrightarrow 0$ в $L^{n_1}(B;\mathbb{R}^n)$ и, таким образом, $\text{div }\hat\sigma=0$ в B.

Теперь выберем и зафиксируем функции φ и τ в (6.10). Пусть $0<s<1$ и $\text{supp }\varphi\subset\subset B(s)$. Тогда в силу оценки (6.9) будем иметь

$$\sigma^h\longrightarrow\hat\sigma \text{ в } L^{n_1}(B(s);\ \mathbb{M}_s^{n\times n}),\quad \sigma^h\longrightarrow\hat\sigma \text{ п.в. в } B(s). \tag{6.12}$$

Устремим h к бесконечности в (6.10). Ясно, что

$$\int_{B(s)} v^h\cdot\text{div }(\varphi(\tau-\sigma^h))dy\longrightarrow\int_{B(s)}\hat v\cdot\text{div }(\varphi(\tau-\hat\sigma))dy.$$

Если $(\sigma)_{x^h,R_h}\longrightarrow\sigma^0$, то в силу сделанных предположений $|\sigma^{0D}|\le\lambda<\sqrt{2}k_*$. Следовательно, σ^0 есть точка непрерывности функции $\tau\longmapsto\Lambda^*(\tau)$, поэтому из (6.12) вытекает, что

$$E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_1\varepsilon_h\tau;\ \tau,\tau)\longrightarrow E^*(\sigma^0;\ \tau,\tau),$$

$$E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_2\varepsilon_h\sigma^h;\ \sigma^h,\sigma^h)\longrightarrow E^*(\sigma^0;\ \hat\sigma,\hat\sigma)$$

п.в. в $B(s)\times[0,1]$. Таким образом, согласно лемме Фату, будем иметь

$$\liminf_{h\to+\infty}\int_B\varphi\int_0^1 E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_2\varepsilon_h\sigma^h;\sigma^h,\sigma^h)d\theta_2dy\ge\int_B\varphi E^*\sigma^0;\hat\sigma,\hat\sigma)dy.$$

Принимая во внимание оценку $E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_1\varepsilon_h\tau;\tau,\tau)\le\frac{1}{n^2K_0}\text{ sp}^2\tau+$ $+\mu_2\Big(\frac{\sqrt{2}k_*+\lambda}{2}\Big)|\tau^D|^2$ при всех $h>h(m)$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим, что

$$\lim_{h\to+\infty}\int_B \varphi\int_0^1 E^*((\sigma)_{x^h,R_h}+\theta_1\varepsilon_h\tau;\ \tau,\tau)d\theta_1 dy=\int_B \varphi E^*(\sigma^0;\tau,\tau)dy.$$

Итак, мы можем перейти к пределу в неравенстве (6.10) и установить соотношение

$$-\int_{B(s)}\{\hat v\cdot\operatorname{div}(\varphi(\tau-\hat\sigma))+\frac{\varphi}{2}(E^*(\sigma^0;\tau,\tau)-E^*(\sigma^0,\hat\sigma,\hat\sigma))\}dy\le 0.$$

В силу произвольности параметров m и s, функций τ и φ и соображений плотности получаем окончательно равенство $\varepsilon(\hat v)=\Lambda^*(\sigma^0)\hat\sigma$. Следовательно, пара $\hat v$ и $\hat\sigma$ удовлетворяет всем условиям леммы 3 и для нее верна оценка (5.2). Теперь если мы покажем, что

$$\sigma^h\longrightarrow\hat\sigma \text{ в } L^{n_1}(B(t);\mathbb{M}^{n\times n}_s),\quad v^h\longrightarrow\hat v \text{ в } L^{n_1^*}(B(t);\ \mathbb{R}^n),\tag{6.13}$$

то тем самым докажем лемму. Действительно, в этом случае, согласно сделанным предположениям, мы будем иметь неравенство $W(t)\ge 2c_8 t$. С другой стороны, в силу (6.8), (6.11) справедлива оценка $W(1)\le 1$, что противоречит утверждению (5.2) леммы 3.

Перейдем к доказательству соотношений (6.13). Первое из них уже доказано (см. (6.12) при $s=t$).

Пусть в (6.10) $\tau\in C^1_0(B(t);\mathbb{M}^{n\times n}_s)$, причем $|\tau|\le 1$, и пусть $\varphi(y)=1$ для всех y из $B(t)$ при $t<s$. Тогда из (6.10) выводим оценку

$$\int_{B(t)} v^h\cdot\operatorname{div}\tau dy\le-\int_{B(s)}\sigma^h\cdot(v^h\otimes\nabla\varphi)dy+\int_{B(s)}\left(\frac{1}{n^2K}\operatorname{sp}^2\tau+\mu_2\left(\frac{\sqrt{2}k_*+\lambda}{2}\right)|\tau^D|^2\right)dy.$$

Вычисляя верхнюю точную грань левой части последнего неравенства по всем таким τ и учитывая (6.8), получим, что последовательность v^h ограничена в пространстве $BD(B(t))$. Принимая во внимание компактность вложения пространства $BD(B(t))$ в пространство $L^{n_1^*}(B(t);\mathbb{R}^n)$ (см. [22]), устанавливаем и второе предельное соотношение в (6.13). Лемма 4 доказана.

Из леммы 4 по индукции выводятся следующие утверждения:

Л е м м а 5. *Пусть числа* $0<\nu<1$, $0<t<t_*$, $0<\lambda<\sqrt{2}k_*$ *таковы, что*

$$2c_8(t_*,\lambda)t^{1-\nu}=1.\tag{6.14}$$

Пусть, далее, при $\varepsilon_3\in]\nu,1]$ *выполнены условия*

$$0<R<R_0,\quad B(x_0,R)\Subset\Omega_0;\quad |(\sigma^D)_{x_0,R}|<\lambda_1<\lambda<\sqrt{2}\,k_*;$$

$$U(x_0,R)+R^{\varepsilon_3}<\bar\varepsilon_0=(1-t^{\varepsilon_3-\nu})\min\{\varepsilon_0,(1-t^\nu)t^{\frac{n}{n_1}}(\lambda-\lambda_1)\}.\tag{6.15}$$

Тогда для любого натурального k *верны оценки*

$$|(\sigma^D)_{x_0,t^kR}|<\lambda;\ U(x_0,t^kR)\le t^{\nu k}\left(U(x_0,R)+R^{\varepsilon_3}\frac{1-t^{(\varepsilon_3-\nu)k}}{1-t^{\varepsilon_3-\nu}}\right). \quad (6.16)$$

Л е м м а 6. *Если выполнены все условия леммы 5, то*

$$U_1(x_0,\rho)\le 2\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n}{n_1}+\nu}\frac{1}{1-t^{\varepsilon_3-\nu}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu}\left(U(x_0,R)+R^{\varepsilon_3}\right),\ |(\sigma^D)_{x_0,\rho}|<\lambda \quad (6.17)$$

при $0<\rho\le R$.

§ 7. Доказательство теоремы 4.

Докажем сначала две вспомогательные леммы.

Л е м м а 7. *Пусть* $B(x_0,R)\Subset\Omega_0$, $|(\sigma^D)_{x_0,R}|<\lambda-2^{\frac{n}{n_1}}U_1(x_0,R)$ *при* $\lambda<\sqrt{2}\ k_*$, *тогда справедлива оценка*

$$U_2(x_0,R/2)\le\max\left\{\frac{1}{2},c_{10}(R+U_1(x_0,R))\right\}U_2(x_0,R)+c_{11}(R+U_1(x_0,R)), \quad (7.1)$$

в которой постоянные c_{10} *и* c_{11} *зависят, возможно, лишь от* K_0, $k_*,n,n_1,\lambda,\Omega_0,f$.

Л е м м а 8. *Пусть точка* $x_0\in\Omega_0$ *такова, что*

$$\lim_{R\downarrow 0}U_1(x_0,R)=0,\ \lim_{R\downarrow 0}|(\sigma^D)_{x_0,R}|=\lambda_0<\sqrt{2}\ k_*.$$

Тогда $\lim_{R\downarrow 0}\inf U_2(x_0,R)=0$.

Утверждение леммы 8 непосредственно следует из леммы 7 (см. доказательство леммы 9 в [14]).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 7. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, из первого неравенства в (1.7) можно вывести соотношение

$$-\int_{B(x_0,R)}\{u_R\cdot\mathrm{div}\ (\psi(\tau-\sigma))+\psi(\sigma^R\cdot(\tau-\sigma)-g^*(\tau)+g(\sigma))\}dx\le 0 \quad (7.2)$$

для любых $\tau\in C^1(\bar{B}(x_0,R);\ \mathbb{M}_s^{n\times n})$ и $\psi\in C_0^1(B(x_0,R))$ таких, что $|\tau^D|\le\sqrt{2}k_*$ и $0\le\psi\le 1$ в $B(x_0,R)$. Здесь $\sigma^R=\sigma^{x_0,R}$, $u_R=u-\sigma^R(x-x_0)-v_{*R}$, а жесткое смещение v_{*R} определяется из условия

$$\frac{1}{R}\left(\int_{B(x_0,R)}|u_R|^{n_1^*}dx\right)^{1/n_1^*}=U_2(x_0,R).$$

Далее рассуждаем так же, как и при выводе неравенства (6.10). Имеем

$$-\int_{B(x_0,R)}\{\psi\ u_R\cdot\mathrm{div}\ (\tau-(\sigma)_{x_0,R})+\frac{\psi}{2}\int_0^1 E^*((\sigma)_{x_0,R}+\theta(\tau-(\sigma)_{x_0,R});\tau\ -$$

$$-(\sigma)_{x_0,R}, \tau-(\sigma)_{x_0,R})d\theta\}dx \le \int\limits_{B(x_0,R)} \{(u_R\otimes\nabla\psi)\cdot(\tau-(\sigma)_{x_0,R})-\psi u_R\cdot f -$$

$$-(u_R\otimes\nabla\psi)\cdot(\sigma-(\sigma)_{x_0,R})\}dx. \qquad (7.3)$$

Рассмотрим множество $K_0(\Omega)=\{\tau\in C_0^1(\Omega;\mathbb{M}_s^{n\times n}): |\tau|\le 1 \text{ в } \Omega\}$. Возьмем функцию ψ таким образом, чтобы $\psi(x)=1$ при $x\in B(x_0,R/2)$, $|\nabla\psi(x)|\le 4/R$ при $x\in B(x_0,R)$, и положим в (7.3) $\tau=(\sigma)_{x_0,R}+\frac{\sqrt{2}k_*-\lambda}{2}\text{æ}$ для æ из $K_0(B(x_0,R/2))$. В результате получим

$$\frac{\sqrt{2}k_*-\lambda}{2}\int\limits_{B(x_0R/2)}\left[-u_R\cdot\operatorname{div}\text{æ} - \frac{\sqrt{2}k_*-\lambda}{4}\max\left\{\frac{1}{n\,K_0},\mu_2\left(\frac{\sqrt{2}k_*+\lambda}{2}\right)\right\}|\text{æ}|^2\right]dx\le$$

$$\le \int\limits_{B(X_0,R)}|u_R|(|f| + \frac{4}{R}|\sigma-(\sigma)_{x_0,R}|dx.$$

Последнее неравенство можно записать в другом виде, а именно

$$\int\limits_{B(x_0R/2)}H(|\varepsilon(u_R)|)=\sup_{\text{æ}\in K_0(B(x_0,R/2))} -\int\limits_{B(x_0R/2)}\left\{u_R\cdot\operatorname{div}\text{æ}+c_{12}\frac{\sqrt{2}k_*-\lambda}{4}|\text{æ}|^2\right\}dx\le$$

$$\le S_1(x_0,R)\ \mathrm{meas}\ B(x_0,R/2),$$

где

$$S_1(x_0,R)=c_{13}\frac{2^{n+2}}{\sqrt{2}\,k_*-\lambda}(R+U_1(x_0,R))\ U_2(x_0,R),$$

$$H(t)=\sup\left\{st-\frac{\sqrt{2}k_*-\lambda}{4}c_{12}s^2: |s|\le 1\right\},$$

а постоянная c_{13} зависит лишь от Ω_0 и f.

После применения неравенства Йенсена будем иметь

$$H\left(\int\limits_{B(x_0,R/2)}|\varepsilon(u_R)|\right)\le S_1(x_0,R). \qquad (7.4)$$

Из теоремы вложения и соображений подобия выводится следующее неравенство

$$\frac{2}{R}\left(\int\limits_{B(x_0,R/2)}|\hat{u}_R|^{n_1^*}dx\right)^{1/n_1^*}\le c_{14}(n,n_1)\int\limits_{B(x_0,R/2)}|\varepsilon(u_R)|,$$

где $\hat{u}_R=u-\sigma^R(x-x_0)-\hat{v}_{*R}$, причем жесткое смещение $\hat{v}_{*R}$ выбирается из условия

$$\int\limits_{B(x_0,R/2)} |\hat{u}_R|^{n_1^*} dx = \inf_{v_*\in V_*} \int\limits_{B(x_0,R/2)} |u-\sigma^R(x-x_0)-v_*|^{n_1^*} dx.$$

Следовательно, вместо (7.4) можно написать

$$H\left(\frac{2}{Rc_{14}} \left(\int\limits_{B(x_0,R/2)} |\hat{u}_R|^{n_1^*} dx \right)^{1/n_1^*} \right) \le S_1(x_0,R).$$

Решая последнее неравенство относительно интеграла, придем к следующей оценке

$$\frac{2}{R}\left(\int\limits_{B(x_0,R/2)} |\hat{u}_R|^{n_1^*} dx\right)^{1/n_1^*} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{2}, c_{15}(R+U_1(x_0,R))\right\} U_2(x_0,R) + c_{16}(R+U_1(x_0,R)),$$

в которой положительные постоянные c_{15}, c_{16} зависят от уже упомянутых величин. Далее имеем

$$U_2(x_0,R) \le \frac{1}{R}\left(\int\limits_{B(x_0,R/2)} |\hat{u}_R|^{n_1^*} dx\right)^{1/n_1^*} + |\sigma^{R/2}-\sigma^R|.$$

Отсюда, учитывая известное неравенство $|(\sigma)_{x_0R/2}-(\sigma)_{x_0R}| \le 2^{\frac{n}{n_1}}U_1(x_0,R)$, а также вытекающее из него и условий леммы 7 соотношение

$$|\sigma^{R/2}-\sigma^R|\le\int_0^1|\Lambda^*((\sigma)_{x_0,R}+\theta((\sigma)_{x_0,R/2}-(\sigma)_{x_0,R}))((\sigma)_{x_0,R/2}-(\sigma)_{x_0,R})|d\theta\le$$

$$\le\max\left\{\frac{1}{nK_0},\mu_2(\lambda)\right\}|(\sigma)_{x_0,R/2}-(\sigma)_{x_0,R}|\le c_{17}(n,n_1,K_0,\lambda)U_1(x_1,R),$$

без труда получаем требуемую оценку (7.1). Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 4. Введем множество

$$\Sigma=\{x_0\in\Omega: \liminf_{R\downarrow 0-} U_1(x_0,R)>0\}\cup\{x_0\in\Omega: \nexists \lim_{R\downarrow 0}(\sigma^D)_{x_0,R}\}.$$

Представим множество $\Omega\setminus\Sigma$ в виде объединения двух непересекающихся множеств

$$\Omega_1=\{x\in\Omega\setminus\Sigma: |\sigma^D(x)|<\sqrt{2}\ k_*\},\quad \Omega_2=(\Omega\setminus\Sigma)\setminus\Omega_1.$$

Возьмем произвольным образом число $\nu\in]0,1[$ и вычислим $t_*=(1/2)^{1/(1-\nu)}$. Пусть $x_0\in\Omega_1$. Выберем множество Ω_0 так, чтобы $x_0\in\Omega_0\Subset\Omega$. Полагая $\lambda=(|\sigma^D(x_0)|+\sqrt{2}\ k_*)/2$, определим постоянную $c_8(t_*,\lambda)$ в неравенстве (5.2).

Пусть $t=(1/2c_8)^{1/(1-\nu)}$. Тогда $t\in]0,t_*[$ и выполнено равенство (6.14). Далее мы находим числа ε_0 и R_0 леммы 4. Принимая во внимание утверждение леммы 8, можно гарантировать существование числа R, для которого выполнены условия (6.15). Поскольку функции $x\longmapsto|(\sigma^D)_{x,R}|$, $x\longmapsto U(x,R)$ полунепрерывны сверху в точке x_0, то найдется шар $B(x_0,r)$, в каждой точке которого выполнены условия леммы 6. Но это означает (см. [24]), что функция $x\longmapsto\sigma(x)$ непрерывна по Гельдеру с показателем ν в некоторой окрестности точки x_0, причем все точки окрестности принадлежат множеству Ω_1. Теорема 4 доказана.

§ 8. Дополнение

Предложенный в данной работе метод исследования регулярности слабых решений вариационных задач идеальной пластичности без особых изменений переносится на вариационные задачи пластичности со степенным упрочнением. В этом случае интегрант задачи имеет степенной рост относительно девиатора тензора деформаций.

Рассмотрим задачу (1.1), в которой пространство $D^{2,1}(\Omega)$ заменяется на пространство $D^{2,1+\alpha}(\Omega)$, причем мы будем считать, что

$$0 < \alpha \le 1.$$

Предполагается, что выполнены условия (1.3а), (1.3б), а функция $g_0'(t)$ непрерывно дифференцируема во всех точках, исключая, быть может, точки $\pm t_0$. Будем считать также, что функция $t\longmapsto g_0''(t)$ принимает в точке t_0 значение, равное $(g_0'(t))_+'|_{t=t_0}$. Кроме того, предполагается существование положительных постоянных c_1, c_2 таких, что

$$c_1(1+t^2)^{\frac{\alpha-1}{2}} \le h_1(t)\le h_2(t)\le c_2(1+t^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad t>0 \tag{8.2}$$

(определение функций h_1 и h_2 см. в (3.2)).

При выполнении условий (1.2), (1.3а), (1.3б), (8.1), (8.2) задача (1.1) однозначно разрешима. При этом тензор напряжений σ и тензор деформаций $\varepsilon(u)$ связаны соотношением

$$\sigma = K_0 \operatorname{div} u\, \mathbb{I} + g_0'(|\varepsilon^D(u)|)\, \varepsilon^D(u)/|\varepsilon^D(u)|.$$

Сформулируем основные результаты по регулярности решения задачи (1.1), полагая $k_*=g_0'(t)/\sqrt{2}$.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3а), (1.3б), (2.2), (8.1), (8.2), *а также условие*

$$f\in W^2_{\bar n,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^n) \quad \text{при} \quad \bar n > \frac{n(1+\alpha)}{n\alpha+1+\alpha}.$$

Тогда существуют открытые множества Ω_1, $\Omega_3\subset\Omega$ *и число* $\varepsilon_2^0(n,\bar n,\alpha)\in]0,1]$ *такие, что* $\sigma\in C^\nu(\Omega_1\cup\Omega_3;\mathbb{M}^{n\times n}_s)$ *при всех* $\nu\in]0,\varepsilon_2^0[$. *Кроме того,* $|\sigma^D(x)|<\sqrt{2}k_*$ *при всех* $x\in\Omega_1$, $|\sigma^D(x)|>\sqrt{2}k_*$ *при всех* $x\in\Omega_3$, $|\sigma^D(x)|=\sqrt{2}k_*$ *при п.в.* $x\in\Omega\setminus(\Omega_1\cup\Omega_3)$.

З а м е ч а н и е 2. Естественно назвать открытые множества Ω_1 и Ω_3 упругой и пластической областями.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1, *и пусть значения левой и правой производной от функции* $t\longmapsto g_0'(t)$ *в точке* t_0 *совпадают. Тогда существует открытое множество* $\Omega_*\subset\Omega$ *такое, что*

$$\sigma\in C^\nu(\Omega_*;\mathbb{M}_s^{n\times n}) \text{ при всех } \nu\in]0,\varepsilon_2^0[\text{ и meas } (\Omega\setminus\Omega_*)=0.$$

С п и с о к   л и т е р а т у р ы

[1] A n z e l l o t t i G., G i a q u i n t a M. On the existence of the fields of stresses and displacements for an elasto-perfectly plastic body in static equilibrium // J. Math. pure et appl. 1 9 8 2. Vol.61. P.219-244.

[2] K o h n R., T e m a m R. Dual spaces of stresses and strains with applications to Hencky plasticity // Appl. Math. Optim. 1 9 8 3. Vol.10, N 1, P.1-35.

[3] С е р е г и н Г.А. Вариационные задачи и эволюционные вариационные неравенства в нерефлексивных пространствах с приложениями к геометрии и пластичности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1 9 8 4. Т.48, N 2. С.420-445.

[4] С е р е г и н Г.А. Вариационно-разностные схемы для задач механики идеально-упругопластических сред // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1 9 8 5. Т.25, N 2. С.237-253.

[5] E v a n s L.C., K n e r r B. An clastoplastic stress problem // Appl. Math. Optim. 1 9 7 9. Vol.5. P.331-348.

[6] H a r d t R., K i n d e r l e h r e r D. Elastic Plastic Deformation // Appl. Math. Optim. 1 9 8 3. Vol.10. P.203-246.

[7] С е р е г и н Г.А. О дифференцируемости экстремалей вариационных задач механики идеально упругопластических сред // Дифференциальные уравнения. 1 9 8 7. N 11. С.1981-1991.

8] Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations // Com. Pure and Appl. Math. 1 9 7 0. Vol.23, N 4. P.677-703.

[9] Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1 9 7 3. 576 с.

[10] G e r h a r d t C. On the regularity of solutions to variational problems in BV(λ) // Math. Zs. 1 9 7 6. Bd 149. P.281-286.

[11] G i a q u i n t a M., M o d i c a G., S o u c e k J. Functionals with linear growth in the Calculus of Variations // Com. Math. Univ. Carolinae. 1 9 7 9. Vol.20. P.143-172.

[12] И в а н о в А.В. Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка//Тр. ЛОМИ. Л.: Наука, 1 9 8 2. 285 с.

[13] A n z e l l o t t i G., G i a q u i n t a M. Convex functionals and partial

regularity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1 9 8 8. N 3. P.243-272.

[14] С е р е г и н Г.А. Дифференциальные свойства решений вариационных задач для функционалов линейного роста // Пробл. математического анализа. Вып. 11. Л., 1 9 8 9. С.51-79.

[15] M o r r e y C.B. Partial Regularity Results for non-linear Elliptic Systems J. of Math. and Mech. 1 9 6 8. Vol.17, N . P.649-670.

[16] G i u s t i E. Regolarità parziale delle soluzione di sistemi ellittici quasi-lineari di ordine arbitrario // An. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1 9 6 9. Vol.23. P.115-143.

[17] G i a q u i n t a M. Multiple integrals in the Calculus of variations and nonlinear elliptic systems // Annals of Mathematics. N 105. Princeton University Press, 1 9 8 3. 296 p.

[18] К о ш е л е в А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука, 1 9 8 6. 240 с.

[19] С е р е г и н Г.А. О дифференциальных свойствах слабых решений нелинейных эллиптических систем, возникающих в теории пластичности // Мат. сб. 1 9 8 6. Т.130 (172), N 3(7). С.291-309.

[20] К о ш е л е в А.И. Гладкость решений квазилинейных эллиптических систем с недифференцируемыми коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1 9 8 8. N 2. С.32-35.

[21] К л ю ш н и к о в В.Д. Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1 9 7 9. 208 с.

[22] S t r a n g G., T e m a m R. Functions of bounded deformation // Arch. Rational Mech. Anal. 1 9 8 0. Vol.75. P.7-21.

[23] С е р е г и н Г.А. Локальная оценка типа неравенства Каччопполи для экстремалей вариационных задач пластичности Генки // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1 9 8 8. С.127-138.

[24] C a m p a n a t o S. Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funsioni // An. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1 9 6 3. Vol.17. P.175-188.

Ленинградский
политехнический институт
им. М. И. Калинина
195251, Ленинград, Политехническая, 29

Поступило 14 июня 1989 г.