В. В. Малыгина, А. С. Баландин, Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа,
Сиб. матем. журн., 2021, том 62, номер 1, 106–116

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2021. Том 62, № 1

УДК 517.929

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. В. Малыгина, А. С. Баландин

Аннотация. Для одного класса линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа исследуется задача асимптотической устойчивости, не совпадающей с экспоненциальной. Показано, что в случае, когда корни характеристического уравнения неограниченно приближаются к мнимой оси, оставаясь слева от нее, рассматриваемое уравнение асимптотически устойчиво при любых суммируемых начальных функциях.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.109

Ключевые слова: автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа, критический случай, асимптотическая устойчивость.

Введение

Работа посвящена задаче асимптотической устойчивости решений дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) = -bx(t) + cx(t-h), \quad t \geq 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi \in [-h, 0), \end{gathered} \tag{1}$$

возникающего в различных прикладных задачах (см. [1–3]). С другой стороны, это уравнение, обладая большим разнообразием асимптотических свойств решений, оказывается интересным и с теоретической точки зрения (см. [4–9]).

Критерий экспоненциальной устойчивости для уравнения (1) установлен в [10], где построена область устойчивости в трехмерном пространстве коэффициентов. Отметим, что необходимым условием экспоненциальной устойчивости для (1) является выполнение неравенства $|a| < 1$; в [9] показано, что при $|a| < 1$ потеря экспоненциальной устойчивости происходит за счет появления стационарных или периодических решений. Асимптотическая устойчивость, не совпадающая с экспоненциальной, в этом случае отсутствует.

При $|a| > 1$ у уравнения (1) есть неограниченные решения, следовательно, уравнение неустойчиво. Наиболее сложно изучить асимптотические свойства решения в случае $|a| = 1$. Причина в том, что здесь характеристическая функция уравнения (1) может иметь на комплексной плоскости последовательность нулей, неограниченно приближающуюся к мнимой оси, т. е. уравнение, пользуясь терминологией из [11, гл. II, § 3], следует отнести к *критическому типу*. Для таких уравнений нельзя без дополнительных исследований гарантировать

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (гос. задание FSNM–2020–0028) и РФФИ (проект № 18–01–00928).

устойчивость, даже если все корни характеристической функции лежат в левой полуплоскости, а начальная функция ограничена (см. [12]).

С другой стороны, в [4] выделен класс уравнений критического типа, у которых наряду с экспоненциально убывающими решениями есть решения, стремящиеся к нулю по закону $t^{-\gamma}$, т. е. такие решения не просто «теоретически допустимы», а реально существуют. Уравнение (1) принадлежит этому классу в случае $|a| = 1$.

Существенное продвижение в задаче асимптотической устойчивости для уравнения (1) достигнуто в [8], где оно рассматривалось для случая $\psi = \dot{\varphi}$, $\varphi, \dot{\varphi} \in L_2[-h, 0]$. Справедлива следующая

Теорема 1 [8]. *Пусть* $|a| = 1$, *а* $|c| < b$. *Тогда при любых* $\varphi, \dot{\varphi} \in L_2[-h, 0]$ *решение уравнения* (1) *обладает свойством* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

В данной работе получены утверждения, которые обобщают и развивают теорему 1.

1. Определения устойчивости

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, E — измеримое по Лебегу подмножество полуоси $\mathbb{R}_+$, $C(E)$ — пространство непрерывных на множестве E функций с нормой $\|y\| = \sup\limits_{t\in E} |y(t)|$, $L_p(E)$ — пространство суммируемых на E функций с нормой $\|y\|_p = \big(\int\limits_E |y(t)|^p dt\big)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$, $L_\infty(E)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на E функций с нормой $\|y\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in E} |y(t)|$. Символом I будем обозначать единичный (тождественный) оператор.

Введем в рассмотрение *оператор сдвига*, действующий в пространстве измеримых (кусочно непрерывных, суммируемых) на каждом конечном отрезке функций:

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-1), & \text{если } t > 1, \\ 0, & \text{если } t \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1) в предположениях $a, b \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Изменяя масштаб времени $t \mapsto ht$ и коэффициенты $b \mapsto hb$, $c \mapsto hc$, перепишем (1) в эквивалентной форме, более удобной для дальнейшего изучения:

$$(I - aS)\dot{x}(t) = (-bI + cS)x(t) + \sigma(t-1), \quad t \ge 0, \tag{2}$$

где функция σ имеет вид

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \ge 0, \\ a\psi(t) + c\varphi(t), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

При любой функции $\sigma \in L_1[-1, 0]$ и любом начальном условии $x(0) \in \mathbb{R}$ уравнение (2) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, а его решение представимо в виде [13, гл. V, § 5.1]

$$x(t) = X(t)x(0) + \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s-1)\, ds. \tag{3}$$

Из представления (3) следует, что любые, в том числе и асимптотические, свойства любого решения определяются свойствами двух функций: *фундаментального решения X и функции Коши Y*. Из формулы (3) следует, что фундаментальное решение является решением уравнения (2) при $\sigma = 0$ с начальным условием $x(0) = 1$, т. е. X является локально абсолютно непрерывной функцией. Для функции Коши нет определяющего дифференциального соотношения, так как она не является непрерывной: оставаясь абсолютно непрерывной на каждом полуинтервале $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$, функция Y имеет разрыв первого рода во всех точках $t = k$.

Дадим определения устойчивости для уравнения (1). Важно подчеркнуть, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений начальные условия для уравнения (1) задаются не в одной точке $t = 0$, а на множестве $[-1, 0]$: функции φ и ψ, не выходя из $L_1[-1, 0]$, могут принадлежать некоторому его линейному подмножеству $\mathbb{X}$, снабженному собственной нормой. Применительно к уравнению (2) это означает выбор аналогичного подмножества для функции σ. Таким образом, свойства устойчивости решения связаны *с выбором подмножества* $\mathbb{X}$, и этот факт должен найти отражение непосредственно в определениях устойчивости.

Пусть $\mathbb{X}$ — нормированное пространство измеримых на множестве $[-1, 0]$ функций.

Определение 1. Уравнение (2) называется $\mathbb{X}$-*устойчивым* (*по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $\sigma \in \mathbb{X}$, $x(0) \in \mathbb{R}$ таких, что $|x(0)| < \delta$, $\|\sigma\|_{\mathbb{X}} < \delta$, справедлива оценка $\sup\limits_{t \geq 0} |x(t)| < \varepsilon$.

Определение 2. Уравнение (2) называется *асимптотически* $\mathbb{X}$-*устойчивым*, если оно $\mathbb{X}$-устойчиво и при любых $\sigma \in \mathbb{X}$, $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения (2) обладает свойством $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Выбор пространства $\mathbb{X}$ произволен. В [11, 14, 15] полагают $\mathbb{X} = C[-1, 0]$; в [8, 16] используется техника гильбертовых пространств, поэтому $\mathbb{X} = L_2[-1, 0]$; в [17] $\mathbb{X} = L_1[-1, 0]$.

Для дальнейшего исследования удобно дать несколько эквивалентных переформулировок определений 1 и 2.

Обозначим $K_t(\sigma) = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s-1)\,ds$; очевидно, что $\{K_t\}_{t \geq 0}$ является семейством функционалов, определенных на $\mathbb{X}$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (2) $\mathbb{X}$-*устойчиво;*

2) *существует такое $N > 0$, что при всех $t \geq 0$ справедлива оценка $|x(t)| \leq N(|x(0)| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}})$;*

3) $\sup\limits_{t \geq 0} |X(t)| < \infty$, $\sup\limits_{t \geq 0} \|K_t\| < \infty$.

Доказательство проведем по цепочке $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, опираясь на формулу (3).

$1 \Rightarrow 2$. Обозначим через $A : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R}_+)$ оператор умножения на функцию $A\alpha = X(t)\alpha$, а через $K : \mathbb{X} \to C(\mathbb{R}_+)$ — интегральный оператор

$$K(\sigma) = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s-1)\,ds.$$

Операторы A и K линейные и непрерывные в силу утверждения 1. Следовательно, они ограничены, что и отражает утверждение 2.

$2 \Rightarrow 3$. Положим $\sigma = 0$. Тогда ограниченность фундаментального решения очевидна из неравенства $|X(t)x(0)| \leq N|x(0)|$. Пусть теперь $x(0) = 0$. Тогда для семейства функционалов $\{K_t\}_{t\geq 0}$ справедлива оценка $|K_t(\sigma)| \leq N\|\sigma\|_{\mathbb{X}}$, т. е. $\|K_t\| \leq N$.

$3 \Rightarrow 1$. Следует из формулы (3). Теорема доказана.

В классическом определении асимптотической устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений [18, гл. II, § 1] предполагается, что решение устойчиво по Ляпунову. Это требование существенно: есть примеры нелинейных уравнений, решения которых стремятся к нулю, не являясь при этом устойчивыми по начальным данным. Однако для линейных уравнений ситуация упрощается: если все решения стремятся к нулю, то уравнение устойчиво по Ляпунову.

Разберем этот вопрос для уравнения (2).

Теорема 3. *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Если при любых $\sigma \in \mathbb{X}$, $x(0) \in \mathbb{R}$ решение уравнения* (2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, то уравнение* (2) *$\mathbb{X}$-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (3) вытекает, что условие $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ для всех решений уравнения (2) выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t(\sigma) = 0$ при любом $\sigma \in \mathbb{X}$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{t\geq 0}|X(t)| < \infty$, $\sup\limits_{t\geq 0}|K_t(\sigma)| < \infty$ при любом $\sigma \in \mathbb{X}$. Применяя теорему Банаха — Штейнхауса [19, гл. III, § 4], получаем, что $\sup\limits_{t\geq 0}\|K_t\| < \infty$. Ссылка на п. 3 теоремы 2 завершает доказательство. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (2) *асимптотически $\mathbb{X}$-устойчиво;*

2) *решение уравнения* (2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ при любых $\sigma \in \mathbb{X}$ и $x(0) \in \mathbb{R}$;*

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t(\sigma) = 0$ *при любом $\sigma \in \mathbb{X}$.*

Перейдем непосредственно к изучению асимптотических свойств функций X и Y. В работе [10] для уравнения (2) установлены следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть $|a| = 1$, $|c| < b$. Тогда*

1) $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$;

2) $\int\limits_0^\infty X^2(t)\,dt = \frac{1}{b+ac}$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-1}^t Y^2(s)\,ds = 0$.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 4 *уравнение* (2) *асимптотически L_p-устойчиво при $p \geq 2$.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Из формулы (3), неравенства Коши —

Буняковского и пп. 1, 3 теоремы 4 следует, что

$$|x(t)| \le |X(t)||x(0)| + \int_0^1 |Y(t-s)||\sigma(s-1)|\,ds$$
$$\le |X(t)||x(0)| + \left(\int_{t-1}^{t} Y^2(s)\,ds\right)^{1/2} \|\sigma\|_2 \underset{t\to\infty}{\to} 0. \quad (4)$$

Для завершения доказательства остается напомнить, что $L_p[-1,0] \subseteq L_2[-1,0]$ при $p \ge 2$. Следствие доказано.

Следствие 2 усиливает теорему 1, устанавливая асимптотическую L_p-устойчивость уравнения (2) при $p \ge 2$. Вопрос о том, как ведет себя уравнение (2) при $1 \le p < 2$, будет решен в разд. 2.

Вернемся еще раз к определению асимптотической устойчивости уравнения (2) при $\mathbb{X} = L_p$. Из следствия 1 получаем, что определение 2 можно заменить условиями $X(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ и $K_t(\sigma) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ при любом $\sigma \in L_p[-1,0]$. В пространстве линейных ограниченных на $L_p[-1,0]$ функционалов второе условие означает *поточечную сходимость*. Но наряду с поточечной сходимостью в пространстве функционалов есть сходимость по операторной норме $\|K_t\|$, или *равномерная сходимость*. Еще раз обратимся к соотношению (4), из которого следует, что

$$\|K_t\| \le \left(\int_{t-1}^{t} Y^2(s)\,ds\right)^{1/2} \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

т. е. в условиях теоремы 4 можно гарантировать асимптотическую L_p-устойчивость в *смысле равномерной сходимости* к нулю семейства функционалов $\{K_t\}_{t\ge0}$ при любом $p \ge 2$. Таким образом, эти два вида асимптотической устойчивости стоит разделить.

Определение 3. Назовем уравнение (2) *сильно асимптотически* $\mathbb{X}$*-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$ и $\|K_t\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Дальше будем решать вопрос об асимптотической устойчивости уравнения (2) при $1 \le p < 2$, имея в виду оба типа сходимости семейства функционалов $\{K_t\}_{t\ge0}$: и поточечную, и равномерную.

Замечание. При исследовании устойчивости по Ляпунову тоже можно было бы разделить ситуации, когда (а) решение уравнения (2) ограничено при любых $\sigma \in \mathbb{X}$, $x(0) \in \mathbb{R}$; (б) $\sup\limits_{t\ge0}|X(t)| < \infty$, $\sup\limits_{t\ge0}\|K_t\| < \infty$. Несложно, однако, заметить, что если $\mathbb{X}$ — банахово пространство, то утверждения (а) и (б) эквивалентны в силу теоремы Банаха — Штейнхауса.

2. Основные результаты

Получим еще одно полезное утверждение, которое также вытекает из теоремы 4.

Обозначим $E_{\alpha,\varepsilon}(t) = \{s \in [t-1,t] : |Y(s)|^\alpha \ge \varepsilon\}$, где $t \ge 1$.

Лемма 1. *Пусть* $|a| = 1$, $|c| < b$. *Тогда для любых* $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 1$ *имеем* $\operatorname{mes} E_{\alpha,\varepsilon}(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Доказательство. Из п. 3 теоремы 4 следует, что при любых $\varepsilon > 0$ и $\alpha \geq 1$ справедливы оценки

$$\operatorname{mes} E_{\alpha,\varepsilon}(t) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2/\alpha}} \int\limits_{E_{\alpha,\varepsilon}(t)} Y^2(s)\,ds \leq \frac{1}{\varepsilon^{2/\alpha}} \int\limits_{t-1}^{t} Y^2(s)\,ds \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение обнаруживает неожиданную связь функции Коши уравнения (2) с классическими ортогональными многочленами Лагерра.

Лемма 2. *Пусть* $|a| = 1$, $|c| < b$. *Тогда функция Коши уравнения* (2) *представима в виде*

$$Y(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{[t]} e^{-1/2(b+c)(t-k)} l_k((b-c)(t-k)), & \text{если } a = 1, \\ \sum\limits_{k=0}^{[t]} e^{-1/2(b-c)(t-k)} (-1)^k l_k((b+c)(t-k)), & \text{если } a = -1, \end{cases} \tag{5}$$

где $l_k(s) = e^{-s/2} L_k(s)$, *а* $L_k(s)$ — *многочлены Лагерра порядка* k, $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть $a = 1$. Представим $t \in [n, n+1)$ в виде $t = n + \tau$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [0,1)$, и обозначим $y_n(\tau) = Y(n+\tau)$. Для последовательности $\{y_n(\tau)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ построим производящую функцию

$$F(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(\tau) z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

В [7] показано, что функция $F(\tau, z)$ имеет вид

$$F(\tau, z) = \frac{e^{-\frac{b-cz}{1-z}\tau}}{(1-z)(1 - ze^{-\frac{b-cz}{1-z}})}.$$

Пусть $\rho \in (0,1)$ таково, что при $|z| \leq \rho$ справедливо неравенство $|ze^{-\frac{b-cz}{1-z}}| < 1$. Тогда

$$F(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1-z} e^{-\frac{b-cz}{1-z}(\tau+k)},$$

и по формулам для коэффициентов степенного ряда имеем

$$\begin{aligned} y_n(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^k e^{-\frac{b-c\zeta}{1-\zeta}(\tau+k)}}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{-\frac{b-c\zeta}{1-\zeta}(\tau+k)}}{\zeta^{n-k+1}(1-\zeta)}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b+c}{2}(\tau+k)} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{-\frac{b-c}{2}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}(\tau+k)}}{\zeta^{n-k+1}(1-\zeta)}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b+c}{2}(n+\tau-k)} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{-\frac{b-c}{2}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}(n+\tau-k)}}{\zeta^{k+1}(1-\zeta)}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b+c}{2}(t-k)} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{-\frac{b-c}{2}\frac{1+\zeta}{1-\zeta}(t-k)}}{\zeta^{k+1}(1-\zeta)}\, d\zeta. \tag{6}$$

Воспользуемся известной формулой для производящей функции многочленов Лагерра [20, гл. VI, § 1]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k(s) z^k = \frac{e^{\frac{sz}{z-1}}}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

На основе этой формулы легко получить производящую функцию для функций $l_k(s)$. В самом деле,

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k(s) z^k = e^{-s/2} \sum_{k=0}^{\infty} L_k(s) z^k = e^{-s/2} \frac{e^{\frac{sz}{z-1}}}{1-z} = \frac{e^{-\frac{s(1+z)}{2(1-z)}}}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

следовательно, при любом $\rho \in (0, 1)$

$$l_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{e^{-\frac{s(1+\zeta)}{2(1-\zeta)}}}{\zeta^{k+1}(1-\zeta)}\, d\zeta. \tag{7}$$

Полагая в формуле (7) $s = (b-c)(t-k)$ и подставляя (7) в (6), получаем первое из равенств (5). Для случая $a = -1$ рассуждения аналогичны.

Лемма 3. *Пусть* $|a| = 1$, $|c| < b$. *Тогда функция Коши уравнения* (2) *ограничена:* $\sup\limits_{t \geq 0} |Y(t)| = M < \infty$.

Доказательство. В силу свойств многочленов Лагерра [21, гл. VII, п. 7.3] при любых $t \geq 0$ и $k \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка $|l_k(t)| \leq 1$. Следовательно, при $t \in [n, n+1)$ с учетом условия $b > |c|$ из представления (5) при $a = 1$ получаем

$$|Y(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b+c}{2}(t-k)} |l_k((b-c)(t-k))| \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b+c}{2}(t-k)} \leq \frac{e^{\frac{b+c}{2}}}{e^{\frac{b+c}{2}} - 1}.$$

Аналогично при $a = -1$

$$|Y(t)| \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b-c}{2}(t-k)} |l_k((b+c)(t-k))| \leq \sum_{k=0}^{n} e^{-\frac{b-c}{2}(t-k)} \leq \frac{e^{\frac{b-c}{2}}}{e^{\frac{b-c}{2}} - 1}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Если* $|a| = 1$, $|c| < b$, *то уравнение* (2) L_1*-устойчиво.*

Доказательство. Ограниченность функции Коши доказана в лемме 3. В [7] установлено, что функции X и Y связаны равенством $(I - aS)Y = X$, из которого следует, что $|X(t)| \leq |Y(t)| + |Y(t-1)| \leq 2M$. Согласно формуле (3) имеем

$$|x(t)| \leq |X(t)||x(0)| + \int\limits_0^1 |Y(t-s)||\sigma(s-1)|\, ds \leq 2M|x(0)| + M\|\sigma\|_1.$$

Теорема доказана.

Лемма 4. *Пусть $|a| = 1$, $|c| < b$. Тогда при любом $q \geq 1$ справедливо предельное соотношение* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t-1}^{t} |Y(s)|^q\, ds = 0$.

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число, M — постоянная, определенная в лемме 3, а q — фиксированное число из интервала $[1, \infty)$. Построим множество

$$e(t) = E_{q,\varepsilon/2} = \{s \in [t-1, t] : |Y(s)|^q \geq \varepsilon/2\}.$$

В силу леммы 1 найдется $T > 0$ такое, что при любом $t \geq T$ справедливо неравенство $\operatorname{mes} e(t) < \frac{\varepsilon}{2M^q}$, следовательно,

$$\int\limits_{e(t)} |Y(s)|^q\, ds \leq M^q \operatorname{mes} e(t) < \varepsilon/2.$$

Пусть $s \in [t-1, t] \backslash e(t)$. По построению множества $e(t)$ имеем $|Y(s)|^q < \varepsilon/2$, значит, $\int\limits_{[t-1,t]\backslash e(t)} |Y(s)|^q\, ds < \varepsilon/2$. Следовательно, при всех $t \geq T$

$$\int\limits_{t-1}^{t} |Y(s)|^q\, ds = \int\limits_{e(t)} |Y(s)|^q\, ds + \int\limits_{[-1,0]\backslash e(t)} |Y(s)|^q\, ds < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

Теперь в следствии 2 можно снять лишние условия на пространство начальных функций.

Теорема 6. *Пусть $|a| = 1$, $|c| < b$. Тогда уравнение* (2) *сильно асимптотически L_p-устойчиво для всех $p > 1$.*

Доказательство. Если функционал K_t определен на $L_p[-1, 0]$ при $p > 1$, то

$$\|K_t\| \leq \left(\int\limits_{t-1}^{t} Y^q(s)\, ds \right)^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$. Из п. 1 теоремы 4 и леммы 4 следует, что оба условия определения 3 выполнены. Теорема доказана.

Случай $p = 1$ требует отдельного исследования. Следующая теорема показывает, что в предположениях теоремы 4 асимптотическая устойчивость сохраняется.

Теорема 7. *Пусть $|a| = 1$, $|c| < b$. Тогда уравнение* (2) *асимптотически L_1-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (3) имеем

$$|x(t)| \leq |X(t)||x(0)| + \int\limits_{-1}^{0} |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\, ds.$$

Из п. 1 теоремы 4 следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$, значит, в оценке нуждается только второе слагаемое. Пусть ε — произвольное положительное число, а M —

постоянная, определенная в лемме 3. По условиям доказываемой теоремы $\sigma \in L_1[-1,0]$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется такое $\delta > 0$, что для любого множества $e \subseteq [-1,0]$, у которого $\operatorname{mes} e < \delta$, справедливо неравенство

$$\int\limits_e |\sigma(s)|\,ds < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Построим множество $E(t) = \left\{s \in [t-1,t] : |Y(s)| \geq \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1}\right\}$. В силу леммы 1 найдется $T > 0$, такое, что при любом $t \geq T$ справедливо неравенство $\operatorname{mes} E(t) < \delta$. Так как множество $e = \{s \in [-1,0] : t-s-1 \in E(t)\}$ получается из $E(t)$ отображением симметрии и сдвигом на $t-1$, то для $t \geq T$ справедливо $\operatorname{mes} e < \delta$, следовательно,

$$\int\limits_e |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\,ds \leq M \int\limits_e |\sigma(s)|\,ds < \varepsilon/2.$$

Пусть $s \in [-1,0] \backslash e$. Тогда $t-s-1 \in [t-1,t] \backslash E(t)$, по построению множества $E(t)$ имеем $|Y(t-s-1)| < \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1}$, значит,

$$\int\limits_{[-1,0]\backslash e} |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\,ds < \frac{\varepsilon}{2\|\sigma\|_1} \int\limits_{-1}^{0} |\sigma(s)|\,ds < \varepsilon/2$$

и тем самым при всех $t \geq T$

$$\int\limits_{-1}^{0} |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\,ds$$
$$= \int\limits_e |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\,ds + \int\limits_{[-1,0]\backslash e} |Y(t-s-1)||\sigma(s)|\,ds < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{-1}^{0} Y(t-s-1)\sigma(s)\,ds = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Ссылка на теорему 3 завершает доказательство. Теорема доказана.

Осталось выяснить, можно ли в теореме 7 заменить асимптотическую L_1-устойчивость сильной асимптотической L_1-устойчивостью. Для этого отметим еще одно свойство функции Y.

Лемма 5. *Если* $|a| = 1$, *то функция Коши уравнения* (2) *не имеет предела при* $t \to \infty$.

Доказательство. В разд. 3 работы [7] показано, что при всех $k \in \mathbb{N}_0$ функция Y абсолютно непрерывна на каждом полуинтервале $[k, k+1)$, а в точках $t = k$ имеет разрывы первого рода, причем $Y(k) = \lim\limits_{t\to k-0} Y(t) + a^k$. Из последнего равенства получаем, что для любого $T > 0$ найдутся такие $k \in \mathbb{N}_0$ и t_k, что $k > t_k \geq T$, но при этом $|Y(k) - Y(t_k)| \geq 1/2$. Отсюда следует, что функция Y не имеет предела при $t \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть* $|a| = 1$, $|c| < b$. *Тогда уравнение* (2) *не является сильно асимптотически* L_1*-устойчивым.*

Доказательство. При каждом фиксированном $t \geq 0$ норма функционала $K_t : L_1[-1,0] \to \mathbb{R}$ определяется равенством [19, гл. IV, § 3]

$$\|K_t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{s \in [0,1]} |Y(t-s)|,$$

из которого следует, что если $\|K_t\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$, то и $Y(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$, что противоречит лемме 5. Теорема доказана.

Таким образом, при всех $p > 1$ уравнение (2) сильно асимптотически L_p-устойчиво; при $p = 1$ оно остается асимптотически устойчивым, но перестает быть сильно асимптотически устойчивым.

3. Комментарии

1. В [5, 11] со ссылкой на [4] утверждалось, что в условиях теоремы 4 уравнение (1) асимптотически устойчиво. Эта ссылка некорректна. В [4] изучалось расположение нулей характеристической функции для некоторых классов уравнений нейтрального типа (к которым принадлежит уравнение (1)), но задача асимптотической устойчивости в [4] не ставилась, так как не было указано, какому пространству принадлежат начальные функции.

2. В гл. 10 монографии [22] приведен список определений асимптотической устойчивости для уравнений нейтрального типа, но в начале главы на рассматриваемые уравнения накладываются ограничения, которые применительно к уравнению (1) означают $|a| < 1$. Как показано в [10], для уравнения (1) это неравенство означает, что асимптотическая устойчивость совпадает с экспоненциальной.

3. В [16] изучаются уравнения нейтрального типа, в которых начальная функция φ выбирается из пространства Соболева $W_2^1[-h,0]$, а решением считается функция, при каждом $t \geq 0$ принадлежащая пространству $W_2^1[t-h,t]$. Определения устойчивости как таковые не вводятся, информация об асимптотическом поведении решения получается из оценки

$$\left(\int_{t-h}^{t} (x^2(s) + \dot{x}^2(s))\, ds \right)^{1/2} \leq d(t+1)^{N-1} e^{\alpha t} \|\varphi\|_{W_2^1[-h,0]}, \tag{8}$$

где λ_q — корни характеристической функции, $\alpha = \sup \lambda_q$, ν_q — кратность корня λ_q, $N = \max \nu_q$. Применим оценку (8) к уравнению (1). Если $|a| = 1$, то $\alpha = 0$, а так как корни характеристической функции уравнения (1) простые, то $N = 1$. Получаем, что семейство интегралов в левой части формулы (8) равномерно ограничено по t. Это верно, но для задачи асимптотической устойчивости малоинформативно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Putelat T., Willis J. R., Dawes J. H. P.* Wave-modulated orbits in rate-and-state friction // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2012. V. 47, N 2. P. 258–267.
2. *Junca S., Lombard B.* Interaction between periodic elastic waves and two contact nonlinearities // Math. Models Methods Appl. Sci. 2012. V. 22, N 4. P. 1–41.
3. *Diekmann O., Getto P., Nakata Y.* On the characteristic equation $\lambda = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\lambda)\, e^{-\lambda}$ and its use in the context of a cell population model // J. Math. Biol. 2016. V. 72. P. 877–908.

4. *Hahn W.* Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffitienten // Math. Annal. 1956. V. 131. P. 151–166.
5. *Ожиганова И. А.* Определение области асимптотической устойчивости для дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Тр. семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. 1962. Т. 1. С. 52–62.
6. *Громова П. С., Зверкин А. М.* О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная неограниченная на числовой оси функция — решение уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 10. С. 1774–1784.
7. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2007. № 7. С. 17–27.
8. *Junca S., Lombard B.* Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // J. Differ. Equ. 2014. V. 256, N 7. P. 2368–2391.
9. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об устойчивости вместе с производной одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Прикл. математика и вопросы управления. 2019. № 1. С. 22–50.
10. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Мат. тр. 2020. Т. 23, № 2. С. 3–49.
11. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
12. *Громова П. С.* Устойчивость решений нелинейных уравнений нейтрального типа в асимптотически критическом случае // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 6. С. 715–726.
13. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
14. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
15. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1963.
16. *Власов В. В.* Спектральные задачи, возникающие в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 1. С. 69–83.
17. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // Изв. вузов. Математика. 1997. № 6. С. 37–49.
18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
19. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. шк., 1982.
20. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 2007.
21. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
22. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию 27 марта 2020 г.
После доработки 2 сентября 2020 г.
Принята к публикации 18 ноября 2020 г.

Малыгина Вера Владимировна, Баландин Антон Сергеевич
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., 29, ПНИПУ, кафедра ВММБ, Пермь 614990
mavera@list.ru, balandin-anton@yandex.ru