А. В. Бабин, Выражение A^{-1} через итерации оператора A, действующего в банаховом пространстве, *Функц. анализ и его прил.*, 1978, том 12, выпуск 4, 77–78

Функциональный анализ и его приложения,
т.12, вып. 4, 1978, 77—78

УДК 517.944

ВЫРАЖЕНИЕ A^{-1} ЧЕРЕЗ ИТЕРАЦИИ ОПЕРАТОРА A, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Бабин

Результаты работ автора [1] и [2], касающиеся самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, здесь обобщены на случай операторов в банаховом пространстве. Эти результаты применяются к дифференциальным уравнениям с аналитическими коэффициентами и правой частью на компактном многообразии без края, а именно, к симметрическим системам первого порядка (в отличие от [1], здесь не накладываются условия типа антисамосопряженности и субэллиптичности) и к эллиптическим уравнениям второго порядка с вещественной главной частью. Получены формулы, выражающие значение решения в точке через производные от коэффициентов и правой части уравнения в той же точке.

Обозначим через A замкнутый оператор со всюду плотной в банаховом пространстве E областью определения $D(A)$. Мы предполагаем, что A является производящим оператором однопараметрической сильно непрерывной группы T_t линейных преобразований пространства E. Как известно, существует $\omega \geqslant 0$ такое, что $\| T_t \| \leqslant C \exp \omega |t|$, и спектр A лежит в полосе $|\operatorname{Re} \lambda| \leqslant \omega$. Мы предполагаем также, что спектр A не содержит нуля. Будут рассматриваться векторы h, удовлетворяющие условию

$$h \in D(A^j), \qquad \| A^j h \| \leqslant C_1 R^{-j} j!, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Если функционал f принадлежит к пространству E^*, сопряженному к E, то мы будем обозначать через $A^{l*}f$ линейный функционал, определенный на $D(A^l)$ равенством $(v, A^{l*}f) = (A^l v, f)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть существует непрерывная кривая, соединяющая нуль с областью $|\operatorname{Re} \lambda| > \omega$ и не пересекающаяся со спектром A. Тогда существует последовательность голоморфных в полосе $|\operatorname{Im} z| < R_1$, $R_1 > 0$, функций $\chi_\sigma(z)$, $\sigma = 1, 2, \ldots$, такая, что если u — решение уравнения $A^k u = h$, то*

$$(u, A^{l*}f) = -2 \lim_{\sigma \to \infty} \lim_{r \to 1-0} \lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{b_{2j}(\sigma)\, r^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{2}$$

при всех $f \in E^*$, $l \geqslant 0$ и h, удовлетворяющих (1) с фиксированным R. Здесь

$$b_j(\sigma) = \frac{d^j}{dw^j} \left[\chi_\sigma J \left(\frac{4R'}{\pi} \operatorname{arcth} w \right) \frac{4R'}{\pi (1 - w^2)} \right] \Bigg|_{w=0}, \tag{3}$$

где $R' \leqslant \min(R, R_1)$,

$$J(z) = J_{1,k}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A^j h, A^{l*} f)}{(j+k)!} z^{j+k}. \tag{4}$$

Заметим, что выражение $\sum_{j=0}^{N} \frac{b_{2j}(\sigma)\, r^{2j+1}}{(2j+1)!}$ имеет вид $(P(\sigma, r, N, A)h, A^{l*}f)$, где P — полином степени $2N - k$ переменной A, зависящий от параметров σ, r и N. Можно выбрать последовательность полиномов $P_j(A) = P(\sigma_j, r_j, j, A)$ так, что на векторах h, удовлетворяющих (1), они обращают оператор A^k, т. е.

$$|(A^{-k}h, A^{l*}f) - (P_j(A)h, A^{l*}f)| \leqslant \varepsilon_j \|f\| \qquad \forall f \in E^*, \tag{5}$$

где $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$, ε_j не зависит от f. В случае, когда спектр A содержится в области $|\operatorname{Im} \lambda|^2 - |\operatorname{Re} \lambda|^2 > \rho^2$ и $k = 1$ или $k = 2$, можно положить $\chi_\sigma(z) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \times \exp(-z^2/2\sigma^2)$. Тогда $\varepsilon_j \leqslant C(R', l, \omega, \rho)\, j^{-q}$, где $q = R'\rho^2/[\pi(\omega + \sqrt{\omega^2 + \rho^2})]$. Имеет ся простой пример, показывающий, что если требование, наложенное в условии теоремы 1 на спектр A, не выполнено, то формула (5) не имеет места.

Приведем пример уравнения, к которому применима теорема 1. Рассмотрим на компактном аналитическом многообразии без края Ω систему дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую в локальной карте вид

$$Au(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b(x)u(x) = h(x), \tag{6}$$

где $a_j(x)$ и $b(x)$ — матрицы с аналитическими на Ω элементами, матрицы a_j эрмитовы. Как известно, оператор A является производящим оператором группы преобразований пространства Соболева $H_m(\Omega)$. Дельта-функция $\delta(x - x_0)$ является непрерывным функционалом на $H_m(\Omega)$ при $m > n/2$. Если функция h аналитична на Ω, то выполнено условие (1). Поэтому в случае, когда спектр A не окружает нуль, формулы (2) — (4) дают выражение решения уравнения (6) в точке x_0 через производные от коэффициентов и правой части в той же точке (в этом случае $(A^j h, A^{l*}f) = A^j h(x_0)$, $(u, A^{l*}f) = u(x_0)$).

Следующая теорема получается применением теоремы 1 к оператору $\hat{A}$, действующему в пространстве $E \oplus E$: $\hat{A}(v_1 \oplus v_2) = Av_2 \oplus Av_1$.

Теорема 2. *Пусть существует непрерывная кривая, соединяющая нуль с областью* $|\operatorname{Re}\lambda| > \omega$ *и не пересекающаяся с объединением спектров* A *и* $-A$. *Пусть* u — *решение уравнения* $A^{2\varkappa}u = h$. *Тогда при всех* h, *удовлетворяющих условию* (1) *с фиксированным* R, *при всех* $f \in E^*$ *и* $l \geqslant 0$ *число* $(u, A^{l*}f)$ *определяется формулами* (2) *и* (3), *где*

$$J(z) = J_{2,\varkappa}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A^{2j}h, A^{l*}f)}{(2j + 2\varkappa)!} z^{2j+2\varkappa}. \tag{7}$$

Эта теорема применяется к дифференциальным уравнениям второго порядка.

Теорема 3. *Пусть* A_2 — *эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на многообразии* Ω *с вещественной главной частью и аналитическими коэффициентами. Пусть* A_2 *обратим в* $L_2(\Omega) = H_0$ *и имеет положительную главную часть, т. е.* $\operatorname{Re}(A_2 v, v) \geqslant -c\|v\|_0^2$ *для всех* $v \in C_0^\infty(\Omega)$. *Тогда* $-A_2 = A^2$, *где* A *удовлетворяет всем требованиям теоремы* 1 *Значение решения* $u(x)$ *уравнения* $(-A_2)^\varkappa u = h$, *где* h *аналитична на* Ω, *в точке* x_0 *выражается через коэффициенты оператора* A_2 *по формулам* (2), (3), (7), *где* $(A^{2j}h, A^{l*}f) = (-A_2)^j h(x_0)$, $(u, A^{l*}f) = u(x_0)$.

Заметим, что если выполнена оценка $\operatorname{Re}(-A^2u, u) \geqslant c(u, u)$, где $c > 0$, то спектр A содержится в секторе $|\operatorname{Re}\lambda| < |\operatorname{Im}\lambda|$, и можно положить $\chi_\sigma(z) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-z^2/2\sigma^2)$.

Московский институт инженеров транспорта

Поступило в редакцию 2 июня 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бабин А. В., Матем. сб. **101** (1976), 610—638. **2.** Бабин А. В., Функц. анализ **11**, вып. 4 (1977), 3—5.