



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Киселев, Тонконогий цилиндрический излучатель в неоднородной упругой среде, *ЖТФ*, 1984, том 54, выпуск 2, 209–215

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

12 февраля 2025 г., 09:38:38



УДК 53 : 51

ТОНКИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

А. П. Киселев

Исследуется возбуждение неоднородной упругой среды осесимметрическим напряжением вида $\varepsilon^{-2}p(z)\mathbf{n}$, приложенным к поверхности цилиндрической полости малого радиуса ε (\mathbf{n} — нормаль к цилиндру, $p(z)$ — гладкая финитная функция, z — координата вдоль оси цилиндра). При $\varepsilon \rightarrow 0$ строится предельная задача с сосредоточенным на оси цилиндра источником. Используется техника совместного рассмотрения двух асимптотических разложений — внутреннего и внешнего, — сращиваемых в промежуточной области.

1. Предмет работы принадлежит, с математической точки зрения, к интенсивно развивающейся сейчас теории задач для эллиптических уравнений во внешности тонкого тела [1⁴⁻⁹]. К подобным задачам приходят в связи с рэлеевской асимптотикой в дифракции [2⁻⁵], гидромеханике и геофизике [2, 5] и из чисто математических побуждений [6⁻⁸]. В этой проблематике резко разграничиваются два направления деятельности. Одних исследователей решение прикладных вопросов стимулирует к явному вычислению нескольких старших членов асимптотики. Других привлекает изучение общей структуры полных асимптотических разложений решения (и в этой области достигнуты заметные успехи). Настоящая работа принадлежит к первому направлению. Автор стремился использовать лишь ту минимальную информацию о структуре коэффициентов асимптотики, которая необходима для построения искомого предела.

Поле стационарных перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon)$ упругой среды вне цилиндра радиуса ε описывается уравнением

$$\mathbf{l}(\mathbf{u}) = 0, \quad r > \varepsilon, \quad (1)$$

$$l_k(\mathbf{u}) = \partial_i \partial_r m \sigma_{km}(\mathbf{u}) + \omega^2 \rho(\mathbf{r}) u_k, \quad (2)$$

$$\sigma_{km}(\mathbf{u}) = \mu(\mathbf{r})(\partial u_m / \partial r_k + \partial u_k / \partial r_m) + \delta_{km} \lambda(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (3)$$

где r_1, r_2, r_3 — декартовы компоненты радиуса-вектора \mathbf{r} , $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$; по повторяющимся нижним латинским значкам подразумевается суммирование от 1 до 3; δ_{km} — символ Кронекера. Функции $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ предполагаются гладкими во всем трехмерном пространстве E^3 ; $\lambda(\mathbf{r}) + 2\mu(\mathbf{r}) > \mu(\mathbf{r}) > 0$; $\rho(\mathbf{r}) \omega^2 > 0$.

На поверхности излучателя — полости $r < \varepsilon$ — задается граничное условие

$$\mathbf{t}(\mathbf{u})|_{r=\varepsilon} = \varepsilon^{-2} p(z) \mathbf{n}. \quad (4)$$

Здесь $z \equiv r_3$; $p(z)$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль при достаточно больших $|z|$; $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$ — единичный вектор нормали к цилиндру, а $\mathbf{t}(\mathbf{u})$ — напряжение

$$t_k(\mathbf{u}) = \sigma_{km}(\mathbf{u}) n_m. \quad (5)$$

Условие (4) описывает неравномерное по длине полости осесимметрическое нормальное давление. Множитель ε^{-2} в (4) обеспечивает постоянство приложенной к полости мощности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предполагая, что $\lambda(\mathbf{r})$, $\mu(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ быстро стабилизируются на бесконечности к ненулевым константам, единственное решение (1), (4) можно выделить

принципом предельного поглощения (соответствующим временной зависимости $e^{-i\omega t}$)

$$|\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \text{ если } \text{Im } \omega > 0, \quad (6)$$

$$|\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon)| \rightarrow 0 \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Эта задача, принятая в сейсмике как модель взрыва протяженного заряда в скважине, неоднократно рассматривалась для однородной среды [10, 11].

Если среда однородна, а давление постоянно вдоль полости, $p = \text{const}$, то задача (1), (4), (6) имеет решение

$$u_\alpha(\mathbf{r}; \varepsilon) = pA(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} H_0^{(1)}(kr), \quad u_3 \equiv 0, \quad (8)$$

где

$$A(\varepsilon) = -k^2 \varepsilon^{-2} \{(\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(k\varepsilon) + 2\mu (k\varepsilon)^{-1} H_0^{(1)'}(k\varepsilon)\}^{-1}, \quad k = \omega r^{1/2} (\lambda + 2\mu)^{-1/2},$$

$H_0^{(1)}$ и $H_0^{(1)'}$ — функция Ганкеля и ее производная. Вследствие введения множителя ε^{-2} в правую часть (4) существует конечный предел

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon), \quad (9)$$

удовлетворяющий, как легко показать, уравнению во всем пространстве E^3

$$\mathbf{l}(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E^3, \quad (10)$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ — сосредоточенная на оси z обобщенная функция

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi p \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r}_\perp), \quad (11)$$

$$\delta(\mathbf{r}_\perp) \equiv \delta(r_1) \delta(r_2), \quad (12)$$

причем \mathbf{e}_j — орт оси r_j ; $\delta(r_j)$ — одномерная дельта-функция, а по повторяющимся греческим индексам, принимающим значения 1 и 2, подразумевается суммирование.

Целью работы является построение предельной при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи¹ с распределенным по оси источником для неоднородной среды и переменного $p(z)$. Исходя из (11), естественно предполагать, что $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ имеет в общем случае вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi p(z) \frac{\lambda(\mathbf{r}) + 2\mu(\mathbf{r})}{\mu(\mathbf{r})} \Big|_{r=0} \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \delta(\mathbf{r}_\perp) + \mathbf{a}(z) \delta(\mathbf{r}_\perp), \quad (13)$$

где $\mathbf{a}(z)$ — гладкий вектор.

В подобных задачах естественно использовать технику сращивания внутреннего и внешнего разложений [1-4, 6-8]. Уравнения для членов внутреннего разложения строятся по обычной схеме метода пограничного слоя путем разложения коэффициентов в ряды и перехода к растянутым переменным. Постановка условий на бесконечности для этих уравнений требует привлечения внешнего разложения.

Задача определения вектора $\mathbf{a}(z)$, которой мы занимаемся, локальна — \mathbf{a} должен зависеть только от $p(z)$, $p'(z)$, функций $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ и их первых производных по \mathbf{r} при $r=0$. Задача же построения полного асимптотического разложения $\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon)$ заведомо нелокальна. В настоящей работе, как и в [12], где решена аналогичная задача для малого сферического излучателя, гипотеза локальности играет существенную роль.

2. Для исследования поля вблизи излучателя естественно ввести координаты пограничного слоя [1-4, 6, 8].

$$\mathbf{R} = (X_1, X_2, z), \quad X_\alpha = r_\alpha / \varepsilon \quad (14)$$

¹ Безразмерным малым параметром задачи является ε/h , где h — характерный масштаб неоднородности среды.

и разложить коэффициенты по степеням X_1 и X_2

$$\lambda(\mathbf{r}) = \Lambda(z) + \varepsilon \lambda^1(\mathbf{R}) + \dots, \quad \mu(\mathbf{r}) = M(z) + \varepsilon \mu^1(\mathbf{R}) + \dots, \quad (15)$$

где $\Lambda(z)$ и $M(z)$ — значения $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ на оси z , а $\lambda^1(\mathbf{R})$ и $\mu^1(\mathbf{R})$ — линейные по X_1 и X_2 функции с коэффициентами, зависящими от z .

Будем обозначать

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial r_\alpha}, \quad \partial_{\alpha\beta}^2 = \partial_\alpha \partial_\beta, \quad \partial_{\alpha\beta\gamma}^3 = \partial_{\alpha\beta}^2 \partial_\gamma, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Перейдем в (1)–(5) к переменным (14) и сгруппируем члены с одинаковыми степенями ε

$$\begin{aligned} \mathbf{l}(\mathbf{u}) &= \varepsilon^{-2} \{ \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{l}^1(\mathbf{u}) + \dots \}, \\ \mathbf{t}(\mathbf{u}) &= \varepsilon^{-1} \{ \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{t}^1(\mathbf{u}) + \dots \}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{L} и \mathbf{T} — операторы с коэффициентами, зависящими только от z

$$\begin{aligned} L_\alpha(\mathbf{u}) &= M(z) \Delta_\perp u_\alpha + (\Lambda(z) + M(z)) \partial_{\alpha\beta}^2 u_\beta, \\ L_3(\mathbf{u}) &= M(z) \Delta_\perp u_3, \quad \Delta_\perp = \partial_{11}^2 + \partial_{22}^2; \\ T_\alpha(\mathbf{u}) &= M(z) n_\beta (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) + \Lambda(z) n_\alpha \partial_\gamma u_\gamma, \\ T_3(\mathbf{u}) &= M(z) n_\gamma \partial_\gamma u_3 = M(z) (\partial u_3 / \partial \mathbf{n}). \end{aligned}$$

Коэффициенты \mathbf{l}^1 и \mathbf{t}^1 линейны по X_1 и X_2 , причем

$$\begin{aligned} l_\alpha^1(\mathbf{u}) &= \partial_\beta \mu^1(\mathbf{R}) (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta) + \partial_\alpha \lambda^1(\mathbf{R}) \partial_\gamma u_\gamma + (\Lambda(z) \partial + \partial M(z)) \partial_\alpha u_3, \\ l_3^1(\mathbf{u}) &= \partial_\beta \mu^1(\mathbf{R}) \partial_\beta u_3 + (M(z) \partial + \partial \Lambda(z)) \partial_\gamma u_\gamma, \\ t_\alpha^1(\mathbf{u}) &= \mu^1(\mathbf{R}) n_\beta (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha) + \lambda^1(\mathbf{R}) n_\alpha \partial_\gamma u_\gamma + \Lambda(z) \partial u_3, \\ t_3^1(\mathbf{u}) &= \mu^1(\mathbf{R}) n_\gamma \partial_\gamma u_3 + M(z) n_\alpha \partial u_\alpha \end{aligned}$$

(каждый оператор дифференцирования действует на все функции, стоящие справа от него, например $\partial \Lambda \partial_\gamma u_\gamma \equiv \partial (\Lambda \partial_\gamma u_\gamma)$).

Обозначим через S операцию ограничения функций на границу полости $\rho \equiv (X_1^2 + X_2^2) = 1$, например $ST(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{u})|_{\rho=1}$.

Естественно попробовать искать асимптотику поля вблизи излучателя в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} \{ \mathbf{V}^0(\mathbf{R}) + \varepsilon \mathbf{V}^1(\mathbf{R}) + \dots \}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (1) и (4), получим

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^0) = 0, \quad \rho > 1, \quad (17)$$

$$ST(\mathbf{V}^0) = \rho(z) \mathbf{n}; \quad \mathbf{L}(\mathbf{V}^1) = -\mathbf{l}^1(\mathbf{V}^0), \quad \rho > 1, \quad (18), (19)$$

$$ST(\mathbf{V}^1) = -S \mathbf{t}^1(\mathbf{V}^0), \quad (20)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\rho = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \varepsilon^{-1} r.$$

Нетрудно видеть, что каждая из задач (17)–(18), (19)–(20) представляет собой прямую сумму плоской задачи статической теории упругости (с заданными при $\rho=1$ напряжениями) и внешней задачи Неймана для двумерного уравнения Лапласа. Переменная z входит в левые части (17)–(20) как параметр.

Чтобы добиться единственности в возникших задачах, следует задать поведение $\mathbf{V}^0(\mathbf{R})$, $\mathbf{V}^1(\mathbf{R})$, ... при больших ρ . Это делается путем исследования условий совпадения при $\rho \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ внутреннего разложения с внешним.

3. Поле вне малой окрестности полости естественно искать в виде аналога мультипольного разложения, т. е. в виде суммы с коэффициентами, зависящими от ε , решений неоднородных уравнений вида (10) с функциями $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, сосредоточенными на оси z . Детальное выяснение структуры этих коэффициен-

тов в задаче о тонком теле довольно сложно (в случае сферической полости — это целые степени ε [12]), и мы ограничимся главным членом, что достаточно для целей работы.

Итак, вне малой окрестности излучателя пусть

$$\mathbf{u}(r; \varepsilon) \sim \mathbf{U}(r) + \varphi(\varepsilon) \tilde{\mathbf{U}}^1(r) + \dots, \quad (21)$$

$\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$; при $\varepsilon \rightarrow 0$; $\mathbf{U}(r)$ есть удовлетворяющее (6) и (7) решение уравнения (10), (11). Формула (13) означает, что справедливо асимптотическое разложение

$$\mathbf{U}(r) \sim \sum_{j=-1}^{\infty} r^j \mathbf{U}^j(z, \vartheta) + \ln r \sum_{k=0}^{\infty} r^k \mathbf{U}^{0k}(z, \vartheta), \quad r \rightarrow 0, \quad (22)$$

где \mathbf{U}^j и \mathbf{U}^{0k} гладки по z и ϑ (ϑ — полярный угол), а \mathbf{U}^0 и \mathbf{U}^{00} не зависят от ϑ .

Перейдя к погранслоиным координатам (14), получим

$$\mathbf{u}(r; \varepsilon) \sim \varepsilon^{-1} \{ \rho^{-1} \mathbf{U}^{-1} + \varepsilon (\mathbf{U}^0 + \ln \rho \mathbf{U}^{00}) + \varepsilon \ln \varepsilon \mathbf{U}^{00} + \dots \}, \quad r \rightarrow 0. \quad (23)$$

Сравнение (23) с (16) при $r \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ показывает, что

$$\mathbf{V}^0(\mathbf{R}) \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (24)$$

а \mathbf{V}^1 допускает оценку

$$|\mathbf{V}^1(\mathbf{R})| \leq \Phi(z) \ln \rho, \quad \rho \rightarrow \infty \quad (25)$$

с некоторой (неизвестной) функцией $\Phi(z)$.

Условие (24) делает задачу (17), (18) однозначно разрешимой, условие же (25) определяет \mathbf{V}^1 с точностью до прибавления слагаемого вида $\mathbf{W}(z)$. Это слагаемое не может быть найдено из локальных рассуждений вблизи полости, но, к счастью, оно не влияет на интересующие нас сингулярности \mathbf{V}^1 при $\rho \rightarrow 0$.

Присутствие члена $\mathbf{U}^{00} \varepsilon \ln \varepsilon$ в (23) заставляет добавить в (16) слагаемое вида $\varepsilon \ln \varepsilon \mathbf{V}^{00}$, также несингулярное при $\rho = 0$.

4. Решение задачи (17), (18), (24) можно найти в виде

$$\mathbf{V}_\alpha^0 = C(z) \partial_\alpha \ln \rho, \quad \mathbf{V}_3^0 \equiv 0, \quad (26)$$

где $C(z)$ — функция, подлежащая определению из граничного условия.

Нетрудно проверить, что $ST_3(\mathbf{V}^0) = 0$. Далее, используя тождества

$$S\partial_{\alpha\beta}^2 \ln \rho = \delta_{\alpha\beta} - 2n_\alpha n_\beta, \quad \Delta_\perp \ln \rho = 2\pi\delta(\mathbf{R}_\perp), \quad (27), (28)$$

где $\delta(\mathbf{R}_\perp) = \delta(X_1)\delta(X_2) = \varepsilon^2\delta(\mathbf{r}_\perp)$, находим

$$\begin{aligned} ST_\alpha(\mathbf{V}^0) &= C(z) S \{ M(z) n_\beta (\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha) + \Lambda(z) n_\alpha \partial_\gamma V_\gamma \} = \\ &= C(z) S \{ 2M(z) n_\beta \delta_{\alpha\beta}^2 + \Lambda(z) \Delta_\perp \} \ln \rho = -2C(z) M(z) n_\alpha. \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с (18), получаем

$$C(z) = -p(z) 2M(z). \quad (29)$$

Полезно отметить, что решение задачи (17), (18), (24), доопределенное по аналитичности внутри полости, удовлетворяет во всем пространстве следующему уравнению с правой частью, сосредоточенной на оси z :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{V}^0) &= 2\pi N(z) C(z) \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha \delta(\mathbf{R}_\perp), \quad \mathbf{R} \in E^3, \\ N(z) &= \Lambda(z) + 2M(z) = (\lambda + 2\mu)|_{r=0}. \end{aligned} \quad (30)$$

5. Рассмотрим во всем пространстве выражение для $\mathbf{I}^1(\mathbf{V}^0)$. Пользуясь тождеством $X_\alpha \delta(\mathbf{R}_\perp) \equiv 0$, получим что

$$\mathbf{I}_\alpha^1(\mathbf{V}^0) = C(z) \{ \partial_\beta 2\mu^1(\mathbf{R}) \partial_{\alpha\beta}^2 + \lambda^1(\mathbf{R}) \partial_\alpha \Delta_\perp \} \ln \rho = C(z) \{ 2m_\beta(z) \partial_{\alpha\beta}^2 \ln \rho + 4\pi m_\alpha(z) \delta(\mathbf{R}_\perp) \},$$

где

$$m_\beta(z) = \left. \frac{\partial \mu(\mathbf{r})}{\partial r_\beta} \right|_{r=0}, \quad \mu^1(\mathbf{R}) = m_\beta(z) X_\beta. \quad (31)$$

Далее легко проверяется, что

$$l_3^1(\mathbf{V}^0) = (M(z) \partial + \partial \Lambda(z)) C(z) \cdot 2\pi \delta(\mathbf{R}_\perp). \quad (32)$$

Итак, аналитически продолженное на все пространство выражение для правой части (19) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^1(\mathbf{V}^0) = & 2C(z) e_\alpha m_\beta(z) \partial_{\alpha\beta}^2 \ln \rho + 4\pi C(z) m_\alpha(z) e_\alpha \delta(\mathbf{R}_\perp) + \\ & + \{(\Lambda(z) + M(z)) C'(z) + \Lambda'(z) C(z)\} 2\pi \delta(\mathbf{R}_\perp) e_3; \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3 \end{aligned} \quad (33)$$

(штрих обозначает производную по z).

Заметим, что лишь первое слагаемое в правой части (33) отлично от нуля вне полости.

Обратимся к граничному условию (20)

$$\begin{aligned} S t_\alpha^1(\mathbf{V}^0) = & C(z) S \{2m_\gamma n_\gamma n_\beta \partial_{\alpha\beta}^2 + n_\alpha \lambda^1(\mathbf{R}) \Delta_\perp\} \ln \rho = \\ = & 2Cm_\gamma n_\gamma n_\beta (\delta_{\alpha\beta} - 2n_\alpha n_\beta) = -2C(z) m_\gamma(z) n_\gamma n_\alpha, \\ S t_3^1(\mathbf{V}^0) = & MC' S n_\alpha \partial_\alpha \ln \rho = M(z) C'(z). \end{aligned}$$

Отсюда

$$ST(\mathbf{V}^1) = 2C(z) m_\gamma(z) n_\gamma \mathbf{n} - M(z) C'(z) e_3. \quad (34)$$

Введем несколько вспомогательных функций, необходимых нам для решения задачи (19), (25), (34).

Пусть \mathbf{h} — следующее частное решение уравнения (19) вне полости (см. (33))

$$\begin{aligned} h_\alpha(\mathbf{R}) = & H_\beta(z) \partial_{\alpha\beta}^2 \Delta_\perp^{-1} \ln \rho, \quad h_3 \equiv 0, \\ H_\beta(z) = & -2C(z) m_\beta(z) / N(z), \end{aligned} \quad (35)$$

где через $\Delta_\perp^{-1} \ln \rho = \rho^2 (\ln \rho - 1) / 4$ обозначено аксиально-симметричное решение уравнения $\Delta_\perp \psi = \ln \rho$.

Нетрудно проверить, что $\mathbf{h}(\mathbf{R})$ удовлетворяет во всем пространстве уравнению

$$\mathbf{L}(\mathbf{h}) = -2C(z) m_\beta(z) e_\alpha \partial_{\alpha\beta}^2 \ln \rho, \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3. \quad (36)$$

Рассмотрим также решения двух задач с источниками, сосредоточенными на оси z . Пусть

$$\begin{aligned} f_\alpha = & 2Cm_\beta \left\{ \frac{\delta_{\alpha\beta}}{M} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M} \right) \partial_{\alpha\beta}^2 \Delta_\perp^{-1} \right\} \ln \rho, \quad f_3 \equiv 0, \\ g_\alpha \equiv & 0, \quad g_3 = -C'(z) \ln \rho. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}) = 4\pi C(z) m_\alpha(z) e_\alpha \delta(\mathbf{R}_\perp), \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3, \quad (37)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{g}) = -2\pi M(z) C'(z) e_3 \delta(\mathbf{R}_\perp), \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3. \quad (38)$$

Ниже будет показано, что решение задачи (19), (20), (24) имеет вид

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{R}) = \mathbf{f}(\mathbf{R}) + \mathbf{g}(\mathbf{R}) + \mathbf{h}(\mathbf{R}). \quad (39)$$

Из (33), (36)—(39) следует, что аналитически продолженное на все пространство решение этой задачи удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}^1) = -\mathbf{I}^1(\mathbf{V}^0) + 2\pi (\Lambda(z) C(z))' e_3 \delta(\mathbf{R}_\perp), \quad \mathbf{R} \in \mathbf{E}^3. \quad (40)$$

6. Проверка формулы (39) требует вычисления функций $ST(\mathbf{f})$, $ST(\mathbf{g})$ и $ST(\mathbf{h})$. При этом полезны следующие тождества:

$$S \partial_\alpha \ln \rho = n_\alpha, \quad (41)$$

$$S \partial_{\alpha\beta\gamma}^3 \Delta_\perp^{-1} \ln \rho = 1/2 \cdot (\delta_{\alpha\beta} n_\gamma + \delta_{\alpha\gamma} n_\beta + \delta_{\beta\gamma} n_\alpha) - n_\alpha n_\beta n_\gamma. \quad (42)$$

Рассмотрим $ST(\mathbf{f})$. Как легко проверить,

$$ST_3(\mathbf{f}) = 0. \quad (43)$$

Далее, замечая, что $\partial_\gamma f_\gamma = N^{-1}(z) m_\beta(z) \partial_\beta \ln \rho$, находим

$$ST_\alpha(\mathbf{f}) = \mathbf{M}n_\beta(\partial_\alpha f_\beta + \partial_\beta f_\alpha) + \Lambda n_\alpha \partial_\gamma f_\gamma = 2C \{n_\beta(m_\beta \partial_\alpha + m_\alpha \partial_\beta) + 2n_\beta m_\gamma (N^{-1} - \mathbf{M}^{-1}) \mathbf{M} \partial_{\alpha\beta\gamma}^3 \Delta_\perp^{-1} + \Lambda N^{-1} n_\alpha m_\gamma \partial_\gamma\} \ln \rho.$$

Используя (41), (42), получаем

$$ST_\alpha(\mathbf{f}) = C \left\{ \frac{\mathbf{M}}{N} m_\alpha + 2 \frac{\Lambda + \mathbf{M}}{N} m_\gamma n_\gamma n_\alpha \right\}. \quad (44)$$

Легко проверить, что

$$ST(\mathbf{g}) = -\mathbf{M}(z) C'(z) \mathbf{e}_3. \quad (45)$$

Рассмотрим теперь $ST(\mathbf{h})$. Очевидно,

$$ST_3(\mathbf{h}) = 0, \quad (46)$$

$$S\partial_\gamma h_\gamma = H_\beta S\partial_\beta \ln \rho = H_\beta(z) n_\beta.$$

Далее

$$\begin{aligned} ST_\alpha(\mathbf{h}) &= S \{ \mathbf{M}n_\beta(\partial_\alpha h_\beta + \partial_\beta h_\alpha) + \Lambda n_\alpha \partial_\gamma h_\gamma \} = 2\mathbf{M}n_\beta H_\alpha S\partial_{\alpha\beta\gamma}^3 \Delta_\perp^{-1} \ln \rho + \Lambda n_\alpha H_3 n_\beta = \\ &= -2C \left\{ \frac{\mathbf{M}}{N} m_\alpha + \frac{\Lambda}{N} m_\gamma n_\gamma n_\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Из формул (43)–(47) вытекает, что функция (39) удовлетворяет граничному условию (34). Выполнение уравнения (19) при $\rho > 1$ следует из (36)–(38), а оценка (25) очевидна.

7. Вид обобщенной функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в (10) определяется особенностями $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \rightarrow 0$, которые однозначно задаются сингулярностями $\mathbf{V}^0(\mathbf{R})$ и $\mathbf{V}^1(\mathbf{R})$ при $\rho \rightarrow 0$ (см. п. 3).

Удобно вычислить $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ с помощью следующего приема^[12]. Продолжив \mathbf{V}^0 и \mathbf{V}^1 аналитически внутрь полости, применим к (16) оператор \mathbf{I}

$$\mathbf{I}(\mathbf{u}) \sim \varepsilon^{-2} \{ \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \varepsilon \mathbf{I}^1(\mathbf{u}) \} = \varepsilon^{-2} \{ \mathbf{L}(\mathbf{V}^0) + \varepsilon (\mathbf{L}(\mathbf{V}^1) + \mathbf{I}^1(\mathbf{V}^0)) \}.$$

Воспользовавшись (30) и (40), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{u}) &\sim \varepsilon^{-2} 2\pi \{ N(z) C(z) \mathbf{e}_\alpha \partial_\alpha + \varepsilon (\Lambda(z) C(z))' \mathbf{e}_3 \} \delta(\mathbf{r}_\perp) = \\ &= 2\pi \left\{ N(z) C(z) \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} + (\Lambda(z) C(z))' \mathbf{e}_3 \right\} \delta(\mathbf{r}_\perp). \end{aligned} \quad (48)$$

Сравнив (48) с (13), найдем, что гипотеза о виде наиболее сингулярной части $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ оказалась справедливой, а

$$\mathbf{a}(z) = 2\pi \frac{\partial}{\partial z} (\Lambda(z) C(z)) \mathbf{e}_3 = -2\pi \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\lambda(\mathbf{r})}{2\mu(\mathbf{r})} p(z) \right\} \Big|_{r=0} \mathbf{e}_3. \quad (49)$$

Заметим, что не только главная сингулярность функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, но и более гладкое слагаемое $\mathbf{a}(z) \delta(\mathbf{r}_\perp)$ в (13) сохраняет осевую симметрию граничного условия (4). Аналогичное обстоятельство имеет место и для простейших сферических излучателей^[12].

Для вывода формулы (49) гладкость функции $p(z)$, по-видимому, несущественна. Рассмотрение же негладких по z параметров $\lambda(\mathbf{r})$ и $\mu(\mathbf{r})$ требует модификации проведенных вычислений.

В заключение представим функцию \mathbf{F} в виде суммы распределенной по оси z силы, направленной вдоль \mathbf{e}_3 , и интеграла от точечного центра давления. Пусть

$$\Phi(\mathbf{r}_\perp, z) = \text{grad} \{ \delta(\mathbf{r}_\perp) \delta(z) \}. \quad (50)$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Lambda(\zeta) + 2\mathbf{M}(\zeta)}{\mathbf{M}(\zeta)} p(\zeta) \Phi(\mathbf{r}_\perp, \zeta - z) d\zeta + 2\pi \frac{\Lambda(z) + \mathbf{M}(z)}{\mathbf{M}(z)} p(z) \mathbf{e}_3. \quad (51)$$

Применив результаты [13] по возбуждению поперечных волн центром давления, отсюда нетрудно найти поперечную волну, излучаемую в неоднородной среде тонким высокочастотным цилиндрическим излучателем.

Литература

- [1] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
- [2] Datta S. K. Scattering of elastic waves. — В кн.: Mechanics today, ed. Nemet-Nasser, v. 4, N. Y., 1978, p. 149—205.
- [3] Готлиб В. Ю. О рэлеевской асимптотике дифракционных задач. — Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, 1976, т. 62, с. 52—59.
- [4] Geer J. Electromagnetic scattering by a slender body of revolution. — SIAM J. Appl. Math., 1980, v. 38, № 1, p. 93—102.
- [5] Мясников В. П., Федорюк М. В. Рэлеевское приближение в теории упругости. — ДАН СССР, 1980, т. 254, № 3, с. 589—592.
- [6] Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения в области с узкой щелью. — Матем. сб., 1976, т. 103, № 2, с. 265—284; 1982, т. 118, № 2, с. 184—202.
- [7] Федорюк М. В. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца во внешности тонкого цилиндра. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, т. 45, № 1, с. 167—186.
- [8] Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика решения задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой. — Матем. сб., 1981, т. 116, № 2, с. 187—217.
- [9] Зильбергейт А. С., Тропп Э. А. О ближнем поле проводов, токонесущих пластин и оболочек. — ЖТФ, 1982, т. 52, № 2, с. 209—216.
- [10] Somers E. V. Propagation of acoustic waves in a liquid — filled cylindrical hole surrounded by an elastic solid. — J. Appl. Phys., 1953, v. 24, N 5, p. 515—521.
- [11] Васильев Ю. И. Частотные характеристики цилиндрического излучателя конечной длины. — Изв. АН СССР. Физика Земли, 1968, т. 3, № 1, с. 25—43.
- [12] Киселев А. П. Малый сферический излучатель в неоднородной упругой среде. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1982, т. 16, № 4, с. 119—126.
- [13] Киселев А. П. О начальных данных для лучевых формул, описывающих поля точечных источников в неоднородных изотропных упругих средах. — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 4, с. 829—831; Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн, 1975, т. 15, с. 6—2

Научно-производственное объединение
«Рудгеофизика»
Ленинград

Поступило в Редакцию
6 апреля 1983 г.