М. В. Мовшев, Скручивание в групповых алгебрах конечных групп, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 17–23

Функциональный анализ и его приложения
1993, т. 27, вып. 4, с. 17–23

УДК 517.984

Скручивание в групповых алгебрах конечных групп

© 1993. М. В. Мовшев

Некоммутативные и некокоммутативные алгебры Хопфа играют важную роль во многих областях математики. Исходной точкой для построения таких алгебр обычно является «классический объект» — группа или алгебра Ли, — из которого путем квантования изготавливается необходимая алгебра Хопфа. Под квантованием понимается деформация алгебры функций на группе либо универсальной обертывающей алгебры как алгебры Хопфа. Столь же интересным классическим объектом, как связные группы Ли, являются дискретные (конечные) группы. Основная трудность, возникающая при квантовании дискретной группы, состоит в том, что деформационные когомологии групповой алгебры дискретной группы нулевые [1]. Теория деформаций, которая так хорошо функционировала в случае групп Ли, здесь бессильна. Под квантованием дискретной группы мы будем понимать изготовление новой диагонали сопряжением старой при помощи элемента φ из тензорного квадрата групповой алгебры. В статье изучается уравнение, которому удовлетворяет элемент φ. При некоторых дополнительных условиях на элемент φ доказана эквивалентность задания φ и выбора подгруппы с особым 2-коциклом на ней, удовлетворяющим некоторому условию. Такое условие на 2-коцикл, условие невырожденности, можно сформулировать и в случае группы Ли. Связная группа Ли с невырожденным коциклом оказывается всегда разрешимой. Возникает гипотеза, что всякая конечная группа с невырожденным 2-коциклом разрешима.

§1. Основные определения и некоторые примеры

Пусть G — конечная группа, а $k[G]$ — ее групповая алгебра над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики. Она наделена структурой алгебры Хопфа: $\Delta(g) = g \otimes g$, где g — элемент из группы G. Можно попытаться построить новое коумножение: надо взять обратимый элемент $\varphi \in k[G] \otimes k[G]$ и применить сопряжение с помощью этого элемента к диагонали. Получим новую диагональ $\Delta' = \varphi^{-1} * \Delta * \varphi$. Тот факт, что новая диагональ будет гомоморфизмом, автоматически справедлив для всякого φ. Условие коассоциативности даст некоторое уравнение на φ.

Предложение 1. *Условие коассоциативности для новой диагонали эквивалентно тому, что φ является решением уравнения $(\Delta \otimes 1)(\varphi) * \varphi \otimes 1 = \lambda * (1 \otimes \Delta)(\varphi) * 1 \otimes \varphi$, где λ есть G-инвариантный элемент из тензорного куба групповой алгебры.*

Доказательство проводится прямым вычислением. $\square$

Так же как и в теории квантовых групп и алгебр Ли, методы исследования уравнения при $\lambda = 1$ и $\lambda \neq 1$ резко различаются. В нашей статье мы рассмотрим первый случай. Элемент φ тогда назовем *скручивающим 2-коциклом.*

На скручивающих 2-коциклах естественно действует группа обратимых элементов алгебры $k[G]$. Каждый обратимый элемент определяет внутренний автоморфизм этой алгебры. Сопрягая им диагональ, получим новую диагональ.

Предложение 2. *На уровне скручивающих 2-коциклов действие выглядит так*: $f(\varphi) = \Delta(f) * \varphi * f^{-1} \otimes f^{-1}$. *Здесь* f *— обратимый элемент из* $k[G]$.

Доказательство проводится прямым вычислением. $\square$

Определение. Скручивающий 2-коцикл назовем *нетривиальным*, если он не лежит в орбите единицы.

Замечание 1. Всякий несимметричный скручивающий 2-коцикл нетривиален. Это следует из того, что все тривиальные коциклы симметричны. Интересно решить обратную задачу.

Замечание 2. Пусть $H \subseteq G$ — подгруппа. Тогда вложение подгруппы индуцирует вложение ее групповой алгебры как алгебры Хопфа. Если в $k[H]^{\otimes 2}$ лежит скручивающий 2-коцикл φ, то его образ лежит в $k[G]^{\otimes 2}$ и тоже является скручивающим 2-коциклом. Такой коцикл назовем *индуцированным.*

Изучим скручивающие 2-коциклы в случае абелевых групп.

Предложение 3. *Пусть* G *— абелева группа. Существует взаимно однозначное соответствие между ее скручивающими 2-коциклами и 2-коциклами двойственной группы* $\widehat{G}$.

Доказательство. Пусть χ и π — неприводимые представления группы G, т.е. характеры. Значение коцикла на этих характерах равно $c(\chi, \pi) = (\chi \otimes \pi)\varphi$. Выпишем уравнение некоммутативного 2-коцикла и применим к обеим частям равенства тензорное произведение трех характеров:

$$\begin{aligned} c(\chi\pi, \upsilon)c(\chi, \pi) &= \chi \otimes \pi \otimes \upsilon((\Delta \otimes 1)(\varphi) * \varphi \otimes 1) \\ &= c(\chi, \pi\upsilon)c(\pi, \upsilon) = \chi \otimes \pi \otimes \upsilon((1 \otimes \Delta)(\varphi) * 1 \otimes \varphi). \end{aligned}$$

Мы пришли к обычному 2-коциклу. Обратно, пусть задан 2-коцикл группы $\widehat{G}$ с коэффициентами в k^*. Пусть $a(\chi)$ — идемпотент в групповой алгебре $k[G]$, соответствующий характеру χ. Скручивающий 2-коцикл имеет вид $\sum_{\chi,\pi} c(\chi, \pi)a(\chi) \otimes a(\pi)$. Идемпотент $a(\chi)$ равен $\#(G)^{-1} \sum \chi(g)g$. $\square$

Для полноты картины следует заметить, что указанная выше эквивалентность скручивающих 2-коциклов относительно действия обратимых элементов из $k[G]$ в данном случае перейдет в когомологичность коциклов. Следовательно, множество классов эквивалентных скручивающих 2-коциклов естественно изоморфно $\Lambda^2_{\mathbb{Z}} G$.

Вложение указанных скручивающих 2-коциклов в некоммутативные групповые алгебры даст примеры нетривиальных скручиваний.

Приведем другое описание этого класса коциклов.

Предложение 4. *Пусть* G *— конечная группа и задан скручивающий* 2*-коцикл* φ, *такой, что* $(\Delta \otimes 1)(\varphi) = \varphi^{13} * \varphi^{23}$, $(1 \otimes \Delta)(\varphi) = \varphi^{23} * \varphi^{13}$. *Тогда* φ

является образом скручивающего 2-коцикла, лежащего в групповой алгебре некоторой коммутативной подгруппы.

§ 2. *G*-инвариантное квантование

Пусть φ — скручивающий 2-коцикл. Определим отображение $\alpha\colon k[G] \Rightarrow k[G]^{\otimes 2}$ по правилу $g \Rightarrow g \otimes g * \varphi$. Это отображение будет коассоциативным и определит морфизм $k[G]$-модулей. Кроме того, коассоциативность полученного отображения эквивалентна тому, что φ — скручивающий коцикл.

Предложение 5. *Скручивающий 2-коцикл с точностью до действия обратимых элементов из $k[G]$ восстанавливается по указанной коалгебре и представлению группы G в ней.*

Доказательство. В коалгебре выберем базис, на котором группа действует слева свободно и транзитивно. Каждый такой базис получается из базиса $\langle g_1, \dots , g_n \rangle$, где g_i — элементы группы, умножением справа на обратимый элемент $e \in k[G]^\circ$. Тогда структурный тензор коалгебры в этом базисе будет получаться из исходного при помощи сопряжения оператором умножения справа на e. Рассмотрим матрицу значения коумножения на векторе e: $\alpha(e) = \sum \alpha(m, n) me \otimes ne$. Очевидно, что матрица $\alpha(m, n)$ получится из матрицы значения диагонали на единице в стандартном базисе действием элемента e. $\square$

Перейдем от регулярного представления к двойственному. Отображение α^* определит на двойственном представлении структуру алгебры. Данная конструкция алгебры соответствует построению G-инвариантного квантования на группе Ли при помощи решения квантованного уравнения Янга–Бакстера [2]. Выпишем закон умножения в терминах скручивающего 2-коцикла: $m * n = \sum \alpha(g^{-1}m, g^{-1}n)g$, где m, n, g — символы дельта-функций, сосредоточенных в точках m, n, g.

Обозначение. В дальнейшем будем обозначать алгебру, полученную из скручивающего 2-коцикла, буквой A.

Предложение 6. *Алгебра $A/\operatorname{Rad}(A)$ изоморфна алгебре матричнозначных функций на множестве смежных классов G/St, где St — некоторая подгруппа в G.*

Доказательство. Поскольку G действует автоморфизмами на алгебре A, то она действует на множестве максимальных двусторонних идеалов этой алгебры. Это множество распадается на объединение орбит. Если орбит несколько, то в факторалгебре по радикалу существует несколько G-инвариантных пересекающихся по нулю двусторонних идеалов. Они содержат G-инвариантные проекторы, на каждую орбиту по проектору. Но пространство инвариантов регулярного представления одномерно. Следовательно, орбита одна. Выберем какой-нибудь максимальный двусторонний идеал I. Обозначим через St стабилизатор этого максимального идеала. Он действует на A/I, и, очевидно, что $A/\operatorname{Rad}(A)$ является представлением, индуцированным представлением подгруппы St в пространстве A/I. Структура алгебры вводится так же, как на множестве функций на $G/\,\mathrm{St}$ со значениями в алгебре A/I, и она согласуется с действием группы G. $\square$

Предложение 7. *Радикал алгебры A равен нулю.*

Доказательство. Необходимо воспользоваться условием невырожденности скручивающего 2-коцикла. Это условие означает, что при умножении справа на любой элемент $\psi \neq 0$ из $k[G]^{\otimes 2}$, мы получим ненулевое произведение. Тогда $\Delta(g)\varphi\psi$ является ненулевым для произвольного $\psi \neq 0$. На языке алгебры A это означает, что для всякого ненулевого морфизма представлений $\psi\colon k[G]^{*\otimes 2} \Rightarrow k[G]^{*\otimes 2}$ композиция $\alpha^*\psi\colon k[G]^{*\otimes 2} \Rightarrow k[G]^*$ ненулевая. Если в алгебре есть радикал, то в нем имеется подидеал с нулевым умножением, который G-инвариантен. Пусть $\varkappa$ — проекция алгебры A на этот идеал, которая является морфизмом представлений. Положим $\psi = \varkappa \otimes \varkappa$. Указанная выше композиция будет нулевой. Мы пришли к противоречию. $\square$

Изучим подробнее представление группы St в факторалгебре по соответствующему максимальному двустороннему идеалу. Поскольку St действует на алгебре матриц, всякий автоморфизм которой является внутренним, то определено проективное представление T группы St.

Предложение 8. *Описанное выше проективное представление T неприводимо (имеется в виду линейное представление соответствующего линеаризатора).*

Доказательство. Если бы оно было приводимым, то размерность пространства его эндоморфизмов была бы больше 1. Такой же была бы размерность пространства инвариантов у группы St в ее представлении в факторалгебре по максимальному идеалу, которая, в свою очередь, равна размерности пространства инвариантов группы G в $k[G]$. $\square$

Замечание 3. Мы имеем равенство размерностей $\#(G) = \dim(k[G]) = \#(G/\,\mathrm{St})\dim(\mathrm{Mat}[n])$, откуда $\#(\mathrm{St}) = \dim(\mathrm{Mat}[n])$. (Здесь $\mathrm{Mat}[n]$ — алгебра квадратных матриц $n \times n$.)

Предложение 9. *Линеаризующий проективное представление T коцикл с нетривиален.*

Доказательство. Предположим, что он — тривиальный коцикл. Тогда представление T линейно и, как доказано выше, неприводимо. Но это представление должно встречаться в $k[\mathrm{St}]$ ровно $\dim(T)$ раз. Согласно замечанию 3, $k[\mathrm{St}]$ как представление должно быть изоморфно прямой сумме представлений T. Это невозможно, если $\mathrm{St} \neq \{1\}$. $\square$

Обозначение. Обозначим символом $\overline{\mathrm{St}}$ линеаризатор представления T. Представление T определяет сюръективный гомоморфизм алгебры $k[\overline{\mathrm{St}}]$ в алгебру матриц.

Предложение 10. *Пусть $p\colon \overline{\mathrm{St}} \Rightarrow \mathrm{St}$ — каноническая проекция, а p^{-1} — какое-нибудь сечение. Тогда элементы вида $T(p^{-1}(g))$, $g \in \mathrm{St}$, образуют базис в алгебре матриц.*

Доказательство. Всякий элемент образа $T(k[\overline{\mathrm{St}}])$ линейно выражается через данное множество, так как часть центра группы $\overline{\mathrm{St}}$, соответствующая исследуемому нами расширению, переходит при представлении T в скалярные операторы. С другой стороны, образ группы $\overline{\mathrm{St}}$ порождает всю алгебру матриц. Указанные элементы действительно образуют базис, так как по замечанию 3 их число равно размерности алгебры матриц. □

Вывод. Алгебру матриц вместе с действием группы St можно описать следующим образом: базис в алгебре $k[\mathrm{St}, c]$ образуют элементы группы St, закон умножения определяется по формуле $[g_1]*[g_2] = c(g_1, g_2)[g_1g_2]$ и левое действие элемента g из группы St есть действие сопряжением соответствующего элемента алгебры.

§3. Невырожденный 2-коцикл

Конструкцию алгебры, появившуюся в конце предыдущего параграфа, можно аксиоматизировать. Спрашивается: какие условия необходимо наложить на коцикл c, чтобы определенная выше алгебра $k[\mathrm{St}, c]$ была алгеброй матриц?

Воспользуемся одним свойством, выделяющим алгебру матриц из остальных полупростых алгебр над замкнутым полем: на алгебре матриц существует единственная с точностью до пропорциональности центральная функция.

Предложение 11. *Алгебра $k[\mathrm{St}, c]$ является алгеброй матриц тогда и только тогда, когда c — невырожденный коцикл. Это означает следующее: пусть $g \in \mathrm{St}$ — произвольный элемент, не равный 1, и $H(g)$ — его централизатор. Тогда отображение $(m) = c(m, g)/c(g, m)$ есть нетривиальный гомоморфизм группы $H(g)$ в k^*.*

Доказательство. Выполняется равенство $[g]^{-1} = [g^{-1}]/c(g, g^{-1})$. Тогда $[g] * [h][g]^{-1} = c(g, h)c(g, hg^{-1})c(g, g^{-1})[ghg^{-1}]$. Представление сопряжением группы St в $k[\mathrm{St}, c]$ разбивается в сумму представлений $\sum M_\lambda$. Каждое представление M_λ порождено классом сопряженных элементов λ. Ограничение центральной функции на такое пространство дает инвариант в двойственном представлении, и, обратно, из инвариантов можно собрать центральную функцию. Но в двойственном представлении к представлению, порожденному классом единицы, всегда есть инвариант. Следовательно, для единственности центральной функции надо, чтобы не было инвариантов у представлений M_λ, $\lambda \neq \{1\}$.

Как устроены представления M_λ, $\lambda \neq \{1\}$? Фиксируем какой-нибудь элемент $g \neq 1$. Пусть $H(g)$ — его централизатор. Определено одномерное представление $\xi\colon m \Rightarrow c(m, g)/c(g, m)$ подгруппы $H(g)$, где $m \in H(g)$. Представление M_λ, $g \in \lambda$, очевидно, будет индуцировано с описанного представления подгруппы $H(g)$. У представления M_λ инварианты будут нулевыми, только когда ξ — нетривиальный гомоморфизм. □

Предложение 12. *Если коцикл c невырожден (см. предыдущее предложение), то представление группы St в алгебре $k[\mathrm{St}, c]$ изоморфно регулярному.*

Доказательство. Для доказательства вычислим характер этого представления. Он определяется формулой $\chi(g) = \sum_{m \in H(g)} c(g, m)/c(m, g)$, где $H(g)$ — централизатор элемента g. Но по предположению коцикл c невырожден, и, следовательно, $c(g,m)/c(m,g)$ — нетривиальный гомоморфизм при $g \neq 1$. Тогда сумма $\sum_{m\in H(g)} c(g,m)/c(m,g)$ равна нулю при $g \neq 1$. Отсюда мы делаем вывод, что характер χ совпадает с характером регулярного представления. $\square$

Предложение 13. *Соответствующий алгебре $k[\mathrm{St}, c]$ скручивающий 2-коцикл обратим. Предполагается, что c невырожден.*

Доказательство. Воспользуемся идеей предложения 5. Скручивающий 2-коцикл обратим, если для всякого морфизма $F\colon k[\mathrm{St}, c] \otimes k[\mathrm{St}, c] \Rightarrow k[\mathrm{St}, c] \otimes k[\mathrm{St}, c]$ представлений группы $\mathrm{St} \times \mathrm{St}$ образ морфизма не содержится целиком в ядре отображения умножения. Предположим противное. Тогда образ будет правым $1 \otimes A$-модулем и левым $A \otimes 1$-модулем. Но образ переводится в себя действием группы на правую компоненту (впрочем, как и на левую). Другими словами, если $f \in \operatorname{Im} F$, то $(1 \otimes [g]) f (1 \otimes [g])^{-1} \in \operatorname{Im} F$. Но тогда $(1 \otimes [g]) f \in \operatorname{Im} F$. Следовательно, $\operatorname{Im} F$ есть бимодуль над $1 \otimes A$ и над $A \otimes 1$, $\operatorname{Im} F = A \otimes A$ и умножение нулевое. $\square$

Предложение 14. *Скручивающий 2-коцикл, соответствующий алгебре A, является образом скручивающего 2-коцикла алгебры $k[\mathrm{St}, c]$.*

Доказательство. Каноническая проекция $\pi\colon A \Rightarrow k[\mathrm{St}, c]$ определяет вложение коалгебр $\pi^*\colon k[\mathrm{St}, c]^* \Rightarrow A^*$. Пусть минимальный G-подмодуль, содержащий $\operatorname{Im} \pi^*$, будет обозначаться буквой M. Подмодуль M совпадает с A^*, иначе ядро отображения π содержало бы нетривиальный G-подмодуль. Он должен содержаться в пересечении всех максимальных двусторонних идеалов, так как на них G действует транзитивно. В предложении 7 доказано, что пересечение всех максимальных двусторонних идеалов равно нулю. Выберем какой-нибудь регулярный элемент $e \in \operatorname{Im}(\pi^*)$ — мы доказали его существование. Образуем при помощи него базис, на котором G действует транзитивно. Значение коумножения на e по построению есть вектор вида $\sum \alpha(m,n) me \otimes ne$, где $n, m \in \mathrm{St}$. Тогда, как доказано в предложении 5, исходный скручивающий 2-коцикл эквивалентен коциклу с матрицей $\alpha(m,n)$ при $m, n \in \mathrm{St}$ и нулю при $m, n \notin \mathrm{St} \times \mathrm{St}$. $\square$

§4. Аналогия с теорией квантовых групп

Предложения, доказанные выше, по форме, но не по доказательствам, напоминают некоторые утверждения из теории квантовых групп. Там элемент зависит от параметра h, и деформации такого рода там называют кограничными. В этой теории нашему случаю соответствует квантование при помощи решения классического уравнения Янга–Бакстера. Как и в нашем случае, там проводится редукция к некоторой подалгебре, для которой решение как матрица невырожденно. Обратная к нему матрица есть невырожденный 2-коцикл алгебры Ли. Интеграл от него будет непрерывным 2-коциклом группы Ли. Аналогично дискретному случаю выписывается G-инвариантное квантование. Условие невырожденности из предложения 11 можно сформулировать и для непрерывного коцикла группы Ли. Оно оказывается более сильным, чем обычно используемое — невырожденность производной в единице. Сформулируем усиление невырожденности в случае алгебр Ли.

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $l \in \mathfrak{g}$ и $(\cdot\,,\cdot)$ — 2-коцикл алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Скажем, что форма $(\cdot\,,\cdot)$ удовлетворяет усиленному уравнению Янга–Бакстера, если функционал $(l,\,\cdot)$ определяет нетривиальный гомоморфизм для централизатора элемента l.

Предложение 15. *Пусть на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определен 2-коцикл, удовлетворяющий усиленному уравнению Янга–Бакстера. Тогда $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли.*

Доказательство. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет разложение Леви $\mathfrak{g} = L + \mathrm{Rad}$. Вычислим ее вторые когомологии в предположении, что известны когомологии $H^2(\mathrm{Rad})$. Воспользуемся спектральной последовательностью Серра–Хохшильда. Тогда $E_2^{pq} = \{0\}$ при $p = 1, 2$ по лемме Уайтхеда. Все дифференциалы, бьющие в когомологии $E_2^{02} = H^0(L, H^2(\mathrm{Rad}))$, нулевые. Кроме члена E_2^{02} на диагонали в спектральной последовательности стоят нули. Вторые когомологии алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равны ядру единственного дифференциала d_3, бьющего в $E_2^{30} = k$. Из каждого элемента $E_2^{02} = H^0(L, H^2(\mathrm{Rad}))$ можно получить 2-коцикл $\mathfrak{g}$ по правилу $(a+m, b+n) = (m,n)$, $a, b \in L$, $m, n \in \mathrm{Rad}$. При ограничении на Rad такая форма будет определять нетривиальный коцикл; следовательно, d_3 будет на ней равен нулю. Тогда для всякого коцикла $(\cdot\,,\cdot)$ существует ковектор l, такой, что $(a,x) = l[a,x]$ при $a \in L$. Применим это к нашей ситуации. Если $\mathrm{Rad} \neq \mathfrak{g}$, то $(a,x) = l([a,x])$ будет определять нулевой гомоморфизм централизатора элемента a в поле. □

Возникает естественная гипотеза, что дискретная группа, наделенная невырожденным 2-коциклом, разрешима.

Автор благодарен А. Ю. Лазареву за обсуждение работы.

Литература

1. *Лазарев А. Ю., Мовшев М. В.* Деформации алгебр Хопфа // УМН. – 1990. – Т. 6. – С. 211–212.
2. *Дринфельд В. Г.* О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга–Бакстера // ДАН СССР. – 1983. – Т. 273, №3. – С. 531–535.

Малое издательское
предприятие «МИГ»

Поступило в редакцию
5 марта 1992 г.