



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. П. Петрушев, В. Х. Христов, Обобщение признака Дини–Липшица равномерной сходимости ряда Фурье,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 557–568

<https://www.mathnet.ru/mzm10031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

23 апреля 2025 г., 14:27:46



ОБОБЩЕНИЕ ПРИЗНАКА ДИНИ — ЛИПШИЦА РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

П. П. Петрушев, В. Х. Христов

Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство 2π -периодических непрерывных функций f с нормой $\|f\|_C = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|$, а через

$$S_n(f; x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

n -ю частичную сумму ряда Фурье $S[f]$ функции f . В теории рядов Фурье хорошо известен признак Дини — Липшица [1, стр. 280; 2, стр. 108] о равномерной сходимости ряда Фурье для функций из $C_{2\pi}$: если функция $f \in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) \ln \delta = 0, \tag{1}$$

то ряд $S[f]$ равномерно сходится, где $\omega(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_C$ — модуль непрерывности функции f .

Отметим, что достаточное условие Дини — Липшица точно в том смысле, что существует функция $g \in C_{2\pi}$ с модулем непрерывности $\omega(g; \delta) = O\{1/\ln(1/\delta)\}$ и такая, что ряд $S[g]$ расходится в некоторой точке [3; 2, стр. 477].

В настоящей статье мы докажем, что условие (1) для равномерной сходимости ряда $S[f]$ можно ослабить, заменяя модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ модулем немонотон-

НОСТИ

$$\mu(f; \delta) = 2^{-1} \sup_{|x_1 - x_2| \leq \delta} \{ \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} [|f(x_1) - f(x)| + |f(x_2) - f(x)| - |f(x_1) - f(x_2)|] \},$$

введенным Сендовым [4].

Очевидно, если $f \in C_{2\pi}$, то

$$\mu(f; \delta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| \leq \delta \\ f(x_1) = f(x_2)}} \sup_{x_1 \leq x \leq x_2} |f(x_1) - f(x)|. \quad (2)$$

Свойства модуля немонотонности обсуждаются подробно в [4, 5]. Отметим только, что $\mu(f; \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ для всех функций f , не имеющих разрывов второго рода и таких, что

$$(f(x) - f(x - 0))(f(x) - f(x + 0)) \leq 0$$

и что если $\mu(f; \delta) = 0$ для некоторого $\delta > 0$, то функция f достигает все свои локальные экстремумы на интервалах длиной не меньше δ .

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если функция $f \in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(f; \delta) \ln \delta = 0, \quad (3)$$

то ряд $S[f]$ равномерно сходится.

Так как условие Дини — Липшица (1) для равномерной сходимости ряда $S[f]$ точно в указанном выше смысле и так как для любой функции f (см. [5])

$$\mu(f; \delta) \leq \omega(f; \delta), \quad \delta \geq 0, \quad (4)$$

то и условие (3), как достаточное условие для равномерной сходимости ряда $S[f]$, точно, т. е. существует функция $g \in C_{2\pi}$ такая, что $\mu(g; \delta) = O\{1/\ln(1/\delta)\}$ и ряд $S[g]$ расходится в некоторой точке.

Отметим, ввиду (4), что если для функции $f \in C_{2\pi}$ выполнено условие (1), то для нее выполнено и условие (3). Однако, существуют функции из $C_{2\pi}$, для которых условие (3) выполнено, а условие (1) — нет. Например, для функции

$$h(x) = \begin{cases} 1/\ln(1/x) & \text{при } 0 < x \leq \pi/4, \\ 1/\ln(4/\pi) & \text{при } \pi/4 < x \leq 3\pi/4, \\ 1/\ln(1/(\pi - x)) & \text{при } 3\pi/4 < x < \pi, \\ 0 & \text{при } \pi \leq x \leq 2\pi, \end{cases}$$

$h(x + 2k\pi) = h(x)$ при $x \in (0, 2\pi]$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
имеем

$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(h; \delta) \ln(1/\delta) > 0$ и $\mu(h; \delta) = 0$ при $0 \leq \delta \leq \pi/2$.

Отметим, что Неваи [6] и Жижиашвили [7] показали, что достаточное условие Дини — Липшица (1) для равномерной сходимости ряда Фурье можно ослабить, заменяя его следующим односторонним условием:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \geq -\varepsilon(h)/\ln(1/h), \quad h > 0, \quad (5)$$

которое должно выполняться равномерно по x и где $\varepsilon(h) \geq 0$, $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$.

Покажем, что если $f \in C_{2\pi}$ и для нее выполнено условие (5), то

$$\mu(f; h) \ln(1/h) \leq \varepsilon_1(h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \varepsilon(t) = o(1), \quad (6)$$

т. е. из (5) следует (3). Действительно, пусть точки x_1, x_2 и x такие, что $f(x_1) = f(x_2)$, $0 < x_2 - x_1 \leq h$ и $x_1 < x < x_2$. Тогда $0 < x - x_1 \leq h$ и $0 < x_2 - x \leq h$ и из (5) получаем

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &\geq -\varepsilon(x - x_1)/\ln(1/(x - x_1)) \geq \\ &\geq -\varepsilon_1(h)/\ln(1/h), \\ f(x_2) - f(x) &\geq -\varepsilon_1(h)/\ln(1/h). \end{aligned}$$

Но так как $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x) - f(x_1) = -(f(x_2) - f(x))$ и, следовательно, $|f(x) - f(x_1)| \leq \varepsilon_1(h)/\ln(1/h)$. Так как точки x_1, x_2 и x произвольные, то, ввиду (2), получаем (6).

С другой стороны, для вышеопределенной функции h условие (5) не выполняется, а (3) выполнено.

Известно, что ставя условия на характеристики, связанные с вариацией функции $f \in C_{2\pi}$, также можно обеспечить равномерную сходимость ряда $S[f]$. В статье [9] показано, что достаточное условие Чантурии [8] для равномерной сходимости ряда Фурье и достаточное условие (3) несравнимы.

Доказательству теоремы предположим две леммы, которые интересны сами по себе.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда для любых неотрицательных δ^* и μ таких, что $\mu(f; \delta^*) \leq \mu$, существуют

функции $g, r \in C_{2\pi}$ такие, что

$$а) f = g + r,$$

$$б) \|g\|_C \leq \mu, \mu(g; \delta) \leq \mu(f; \delta) \text{ при } 0 \leq \delta \leq \delta^*,$$

$$в) \|r\|_C \leq \max\{\|f\|_C - \mu, 0\}, \mu(r; \delta^*) = 0,$$

$$\omega(r; \delta) \leq \omega(f; \delta) \text{ при } \delta \geq 0.$$

Доказательство. Обозначим $M = \max_x f(x)$ и $m = \min_x f(x)$. В зависимости от величины $(M - m)/2$ и μ возможны следующие случаи для определения функций g и r .

I. $\mu = 0$. Тогда определяем $g \equiv 0$ и $r = f$. Очевидно, что для так определенных функций g и r выполняются свойства а) — в) леммы.

II. $\mu \geq (M - m)/2$. Тогда ясно, что существует константа C такая, что функции $r \equiv C$ и $g = f - C$ удовлетворяют условиям а) — в) леммы.

III. $0 < \mu < (M - m)/2$. В этом содержательном случае основная цель будет состоять в нахождении таких интервалов, на которых функция r будет постоянной, а на дополнительных к ним — монотонной.

Отметим, что так как $f \in C_{2\pi}$ и $0 < \mu < (M - m)/2$, то существуют точки x_1, x_2, x_3 такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad m + \mu \leq f(x_1) = f(x_3) \leq M - \mu$$

$$\text{и } |f(x_1) - f(x_2)| > \mu.$$

Пусть точка $y_2^{(0)}$ такая, что $y_2^{(0)} \in (x_1, x_3)$ и

$$|f(y_2^{(0)}) - f(x_1)| = \max_{x \in (x_1, x_3)} |f(x) - f(x_1)|.$$

Положим

$$y_1^{(0)} = \min \{y \in [x_1, y_2^{(0)}]: |f(x) - f(y_2^{(0)})| \leq \mu \text{ для всех } x \in [y, y_2^{(0)}]\},$$

$$y_3^{(0)} = \max \{y \in [y_2^{(0)}, x_3]: |f(x) - f(y_2^{(0)})| \leq \mu \text{ для всех } x \in [y_2^{(0)}, y]\}.$$

Из определения точек $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}$ следует, что

$$y_1^{(0)} < y_2^{(0)} < y_3^{(0)}, \quad y_3^{(0)} - y_1^{(0)} < 2\pi,$$

$$m + \mu \leq f(y_1^{(0)}) = f(y_3^{(0)}) \leq M - \mu,$$

$$|f(y_2^{(0)}) - f(y_1^{(0)})| = \mu, \quad |f(x) - f(y_2^{(0)})| \leq \mu$$

для всех $x \in [y_1^{(0)}, y_3^{(0)}]$. На отрезке $[y_1^{(0)}, y_3^{(0)}] = \Delta_0$ функция r будет постоянной.

Определим функции g и r на интервале $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ и потом продолжим их периодически с периодом 2π на всю ось.

Для интервала $(y_3^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ ставим следующий вопрос. Существуют ли точки $x_1, x_2, x_3 \in (y_3^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad m + \mu \leq f(x_1) = f(x_3) \leq M - \mu, \\ |f(x_2) - f(x_1)| > \mu? \quad (7)$$

Если существуют, то, как и выше, им сопоставляем точки $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}$, аналогичные точкам $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}$. Отметим, ввиду (7), что $y_3^{(0)} < y_1^{(1)}$ и $y_1^{(0)} + 2\pi > y_3^{(1)}$. На отрезке $[y_1^{(1)}, y_3^{(1)}] = \Delta_1$ функция r будет постоянной.

Для интервала $(y_3^{(0)}, y_1^{(1)})$ ставим тот же самый вопрос. Существуют ли точки $x_1, x_2, x_3 \in (y_3^{(0)}, y_1^{(1)})$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad m + \mu \leq f(x_1) = f(x_3) \leq M - \mu$$

$$\text{и } |f(x_1) - f(x_2)| > \mu?$$

Если существуют, то, как и выше, по ним определяем отрезок $[y_1^{(2)}, y_3^{(2)}] = \Delta_2$, на котором функция r будет постоянной. Аналогично рассуждаем и для интервала $(y_3^{(1)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$.

Для любого из оставшихся интервалов, дополнительных к уже определенным отрезкам постоянства функции r , ставим тот же самый вопрос, и если для некоторого из них существуют три точки с вышеуказанными свойствами, то, как и выше, определяем еще отрезок постоянства для функции r . Так как функция f непрерывна, то после конечного числа шагов получим следующую ситуацию. В зависимости от функции f интервалу $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ сопоставлены конечное число отрезков $\Delta_i = [y_1^{(i)}, y_3^{(i)}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, таких, что $\Delta_i \subset [y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$, $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$ при $j \neq k$,

$$m + \mu \leq f(y_1^{(i)}) = f(y_3^{(i)}) \leq M - \mu \quad (8)$$

и существует точка $y_2^{(i)} \in (y_1^{(i)}, y_3^{(i)})$ такая, что

$$|f(y_2^{(i)}) - f(y_1^{(i)})| = \max_{x \in [y_1^{(i)}, y_3^{(i)}]} |f(x) - f(y_1^{(i)})| = \mu, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (9)$$

Из определения (2) модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ для функций $f \in C_{2\pi}$ и из свойства (9) отрезков Δ_i , $i = 0, 1, \dots, N$, следует, что

$$y_3^{(i)} - y_1^{(i)} = |\Delta_i| \geq \delta^*, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (10)$$

Для оставшихся N интервалов d_i , $i = 0, 1, \dots, N$, дополнительных к $\bigcup_{i=0}^N \Delta_i$ до интервала $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi]$, имеем, что для любых точек $x_1, x_2, x_3 \in d_i$ ($0 \leq i \leq N$) таких, что $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ и $m + \mu \leq f(x_1) = f(x_3) \leq M - \mu$, выполнено

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \mu. \quad (11)$$

Положим

$$\Delta_{N+1} = [y_1^{(N+1)}, y_3^{(N+1)}] = [y_1^{(0)} + 2\pi, y_3^{(0)} + 2\pi]$$

и $y_2^{(N+1)} = y_2^{(0)} + 2\pi$. Тогда любой из интервалов d_i , $i = 0, 1, \dots, N$, имеет следующий вид: $d_i = (y_3^{(k)}, y_1^{(l)})$ для некоторых k и l ($0 \leq k \leq N$, $1 \leq l \leq N + 1$).

Положим $r(x) = f(y_1^{(i)})$ для $x \in \Delta_i$, $i = 0, 1, \dots, N$. Для определения функции r на интервале $d_i = (y_3^{(k)}, y_1^{(l)})$ ($0 \leq i \leq N$), где $0 \leq k \leq N$, $1 \leq l \leq N + 1$, положим а) если

$$f(y_3^{(k)}) < f(y_2^{(k)}), \quad f(y_1^{(l)}) < f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \leq f(y_1^{(l)}),$$

то

$$r(x) = \max \{f(y_3^{(k)}), \min_{x \leq t \leq y_1^{(l)}} f(t)\}$$

для $x \in d_i$;

б) если

$$f(y_3^{(k)}) < f(y_2^{(k)}), \quad f(y_1^{(l)}) < f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \geq f(y_1^{(l)}),$$

то

$$r(x) = \max \{f(y_1^{(l)}), \min_{y_3^{(k)} \leq t \leq x} f(t)\}$$

для $x \in d_i$;

в) если

$$f(y_3^{(k)}) > f(y_2^{(k)}), f(y_1^{(l)}) > f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \leq f(y_1^{(l)}),$$

то

$$r(x) = \min \{f(y_1^{(l)}), \max_{y_3^{(k)} \leq t \leq x} f(t)\}$$

для $x \in d_i$;

г) если

$$f(y_3^{(k)}) > f(y_2^{(k)}), f(y_1^{(l)}) > f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \geq f(y_1^{(l)}),$$

то

$$r(x) = \min \{f(y_3^{(k)}), \max_{x \leq t \leq y_1} f(t)\}$$

для $x \in d_i$;

д) пусть

$$f(y_3^{(k)}) > f(y_2^{(k)}) \text{ и } f(y_1^{(l)}) < f(y_2^{(l)})$$

или

$$f(y_3^{(k)}) < f(y_2^{(k)}) \text{ и } f(y_1^{(l)}) > f(y_2^{(l)}).$$

Тогда, если $f(y_3^{(k)}) \geq f(y_1^{(l)})$, то определяем функцию r на интервале d_i , как в случае б) или г), а если $f(y_3^{(k)}) \leq f(y_1^{(l)})$ — как в случае а) или в).

Таким образом, функция r определена на интервале $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$. Отметим, что так определенная функция монотонна на интервалах d_i , $i = 0, 1, \dots, N$.

Положим $g(x) = f(x) - r(x)$ для $x \in [y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ и продолжим функции g и r периодически с периодом 2π на всей оси. Докажем, что функции g и r удовлетворяют всем требованиям леммы.

Из определения функций g и r следует, что $g, r \in C_{2\pi}$ и $f = g + r$, т. е. утверждение а) леммы выполнено.

Из свойств интервалов Δ_i и d_i , $i = 0, 1, \dots, N$ (см. (8), (9), (11)), и так как $r(x) \equiv f(y_1^{(i)})$ для $x \in \Delta_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, вытекает, что $\|r\|_C \leq \|f\|_C - \mu$, $\|g\|_C \leq \mu$.

Второе утверждение условия б) леммы, т. е. то, что $\mu(g; \delta) \leq \mu(f; \delta)$ при $0 \leq \delta \leq \delta^*$, вытекает из определения (2) модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ для $f \in C_{2\pi}$, из факта, что $|\Delta_i| \geq \delta^*$, $i = 0, 1, \dots, N$ (см. 10)), и из определения функции r на интервалах Δ_i и d_i , $i = 0, 1, \dots, N$.

Из (10) и из того, что на всех отрезках Δ_i , $i = 0, 1, \dots, N$, функция r постоянна, а на интервалах d_i , $i = 0, 1, \dots, N$, монотонна, следует, что $\mu(r; \delta^*) = 0$ (см. (2)).

Так как функции r и f отличаются только на интервалах, на которых функция r постоянна, то $\omega(r; \delta) \leq \omega(f; \delta)$ при $\delta \geq 0$. Лемма доказана.¹

ЛЕММА 2. Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда для любых $0 = \delta_0 \leq \delta_1 \leq \dots \leq \delta_s$, s — натуральное, существуют функции $f_1, f_2, \dots, f_s, r_s$ из $C_{2\pi}$ такие, что

$$a) f = \sum_{k=1}^s f_k + r_s,$$

$$б) \|f_k\|_C \leq \mu(f; \delta_k) - \mu(f; \delta_{k-1}) \text{ и } \mu(f_k; \delta_{k-1}) = 0,$$

$$в) \mu(r_s; \delta_s) = 0, \omega(r_s; \delta) \leq \omega(f; \delta) \text{ при } \delta \geq 0 \text{ и } \|r_s\|_C \leq \max\{\|f\|_C - \mu(f; \delta_s), 0\}.$$

Доказательство. Применяя лемму 1 с $\delta^* = \delta_s$ и $\mu = \mu(f; \delta_s)$ к функции f и полагая $g = g_s$ и $r = r_s$, получаем:

$$\|g_s\|_C \leq \mu(f; \delta_s), f = g_s + r_s, g_s, r_s \in C_{2\pi},$$

$$\mu(g_s; \delta) \leq \mu(f; \delta) \text{ при } 0 \leq \delta \leq \delta_s,$$

$$\|r_s\|_C \leq \max\{\|f\|_C - \mu(f; \delta_s), 0\}, \mu(r_s; \delta_s) = 0,$$

$$\omega(r_s; \delta) \leq \omega(f; \delta) \text{ при } \delta \geq 0.$$

Применяя лемму 1 с $\delta^* = \delta_{s-1}$ и $\mu = \mu(f; \delta_{s-1})$ к функции g_s и полагая $g = g_{s-1}$ и $r = f_s$, получаем:

$$g_s = g_{s-1} + f_s, g_{s-1}, f_s \in C_{2\pi}, f = g_{s-1} + f_s + r_s,$$

$$\|g_{s-1}\|_C \leq \mu(f; \delta_{s-1}),$$

$$\mu(g_{s-1}; \delta) \leq \mu(g_s; \delta) \leq \mu(f; \delta) \text{ при } 0 \leq \delta \leq \delta_{s-1},$$

$$\mu(f_s; \delta_{s-1}) = 0,$$

$$\|f_s\|_C \leq \max\{\|g_s\|_C - \mu(f; \delta_{s-1}), 0\} \leq \mu(f; \delta_s) - \mu(f; \delta_{s-1}).$$

Снова применяем лемму 1, но уже к функции g_{s-1} с $\delta^* = \delta_{s-2}$ и $\mu = \mu^f(f; \delta_{s-2})$, и полагаем $g = g_{s-2}$ и $r = f_{s-1}$ и т. д. После s -кратного применения леммы 1, полагая при последнем применении $g = f_1$ и $r = f_2$, получаем утверждение леммы.

З а м е ч а н и е. Незначительно усложняя доказательства лемм 1 и 2, можно добиться, чтобы для функций f_k , $k = 1, 2, \dots, s$, из леммы 2 выполнялось $\omega(f_k; \delta) \leq \leq \omega(f; \delta)$ при $\delta \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть функция $f \not\equiv \text{const}$. Тогда существует N такое, что для всех $n \geq N$ выполнено

$$\pi(1 + \ln n)/n \leq (\omega(f; 1/n))^{1/2} \leq 1. \quad (12)$$

Пусть n — произвольное натуральное, $n \geq N$, $N \geq 3$ и $x \in [0, 2\pi)$. Из принципа локализации Римана [10] имеем, что для любого $\delta > 0$ справедливо

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leq \pi^{-1} \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) \frac{\sin nt}{t} dt \right| + C\delta^{-1}(1 + \|f\|_C)\omega(f; n^{-1}),$$

где C — абсолютная константа. В дальнейшем через C будем обозначать все абсолютные константы.

Положим $\delta = \alpha_n = (\omega(f; 1/n))^{1/2}$. Тогда имеем

$$C\alpha_n^{-1}(1 + \|f\|_C)\omega(f; 1/n) = C(1 + \|f\|_C)(\omega(f; 1/n))^{1/2} = o(1).$$

Оценим $\left| \int_0^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin(nt) dt \right| = I$. Имеем

$$I \leq \left| \int_0^{\pi/n} \right| + \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} \right| = o(1) + \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} \right|.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся разложением функции f из леммы 2 с $s = [\ln n]$ и $\delta_i = i\pi/n$, $i = 0, 1, \dots, s$. Получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin nt dt \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^s \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f_k(x+t) - f_k(x)) t^{-1} \sin nt dt \right| + \\ &+ \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (r_s(x+t) - r_s(x)) t^{-1} \sin nt dt \right| = \sum_{k=1}^s I_k + R_s. \end{aligned}$$

Сначала оценим I_1 :

$$I_1 \leq 2 \|f_I\|_C \int_{\pi/n}^{\alpha_n} |\sin nt| t^{-1} dt \leq C \mu(f; \pi/n) \ln n = o(1)$$

ввиду (3).

Для I_{k+1} ($1 \leq k \leq s-1$), разбивая интервал $[\pi/n, \alpha_n]$ на подынтервалы длиной $k\pi/n$, имеем

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x)) t^{-1} \sin nt dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{p_k-1} \left| \int_{\pi/n+k\pi j/n}^{\pi/n+k\pi(j+1)/n} \right| + \left| \int_{\pi/n+k\pi p_k/n}^{\alpha_n} \right| = \\ &= \sum_{j=0}^{p_k-1} I_{k+1}^{(j)} + I'_{k+1}, \end{aligned}$$

где $p_k = [(\alpha_n - \pi/n)/(k\pi/n)]$, $1 \leq p_k \leq n-1$ ($1 \leq k \leq s$), ввиду (12) (здесь через $[x]$ обозначили целую часть числа x).

Заметим, ввиду равенства $\mu(f_{k+1}; k\pi/n) = 0$, что функция $f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x)$, как функция от t , монотонна на каждом интервале длины $k\pi/n$, и поэтому в каждом из интегралов $I_{k+1}^{(j)}$ можно применить вторую теорему о среднем значении (см. [1, стр. 19]). Тогда, обозначая $\pi/n + k\pi j/n = a_j$, $j = 0, 1, \dots, p_k$, получаем

$$\begin{aligned} I_{k+1}^{(j)} &= \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} (f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x)) t^{-1} \sin nt dt \right| \leq \\ &\leq |f_{k+1}(x+a_j) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{a_j}^{\xi_j} t^{-1} \sin nt dt \right| + \\ &+ |f_{k+1}(x+a_{j+1}) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{\xi_j}^{a_{j+1}} t^{-1} \sin ntdt \right| \leq \\ &\leq 4 \|f_{k+1}\|_C \left| \int_{a_j}^{a_j+\pi/n} t^{-1} \sin nt dt \right| \leq \\ &\leq 4 (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) \int_{a_j}^{a_j+\pi/n} t^{-1} dt \leq \\ &\leq 4 (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi)) / (kj+1), \quad \xi_j \in [a_j, a_{j+1}]. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается и I'_{k+1} . Получаем

$$I'_{k+1} \leq 4 (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi)) / (kp_k + 1)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I_{k+1} &\leq \sum_{j=0}^{p_{k-1}} I_{k+1}^{(j)} + I'_{k+1} \leq \\
 &\leq 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) \sum_{j=0}^{p_k} 1/(1+kj) \leq \\
 &\leq 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) + \\
 &\quad + 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) k^{-1} \ln n.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} &\leq 4 \sum_{k=1}^{s-1} (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) + \\
 &\quad + 4 \ln n \sum_{k=1}^{s-1} k^{-1} (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) \leq \\
 &\leq 4(\mu(f; s\pi/n) - \mu(f; \pi/n)) + \\
 &\quad + 4 \ln n \sum_{k=1}^{s-1} k^{-1} (\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)).
 \end{aligned}$$

Так как $s = [\ln n]$ и

$$\begin{aligned}
 \ln n \cdot \sum_{k=2}^{s-1} k^{-2} \mu(f; (k+1)\pi/n) &\leq \\
 &\leq \ln n \cdot \mu(f; s\pi/n) \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} \leq C \ln \sqrt{n} \mu(f; 1/\sqrt{n}) = o(1)
 \end{aligned}$$

ввиду (3), то после преобразования Абеля в последней сумме получаем

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} &\leq 4\mu(f; s\pi/n) + \\
 &\quad + 4 \ln n \sum_{k=2}^{s-1} k^{-2} \mu(f; (k+1)\pi/n) + 4 \ln n \mu(f; s\pi/n)/s = o(1).
 \end{aligned}$$

Оценим R_s аналогично I_{k+1} :

$$\begin{aligned}
 R_s &\leq \int_{j=0}^{p_s-1} \left| \int_{\pi/n+\pi sj/n}^{\pi/n+\pi s(j+1)/n} \right| + \left| \int_{\pi/n+\pi s(j+1)/n}^{\alpha_n} \right| = \\
 &= \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R'_s.
 \end{aligned}$$

Для $R_s^{(j)}$, как при оценке $I_{k+1}^{(j)}$, получаем

$$\begin{aligned}
 R_s^{(j)} &\leq 2 \max_{t \in [x, x+\pi s(j+1)/n]} |r_s(x+t) - r_s(x)| / (1+js) \leq \\
 &\leq 2\omega(f; \alpha_n) / (1+js).
 \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$R'_s \leq 2\omega(f; \alpha_n) / (1+sp_s).$$

Окончательно получаем

$$R_s \leq \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R'_s \leq 2\omega(f; \alpha_n) + 2\omega(f; \alpha_n) \sum_{j=1}^{p_s-1} 1/sj \leq \\ \leq 2\omega(f; \alpha_n) + 2\omega(f; \alpha_n) s^{-1} \ln n = o(1).$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin nt \, dt \right| \leq \\ \leq I_1 + \sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} + R_s = o(1)$$

равномерно по x . Аналогично получается, что

$$\left| \int_{-\alpha_n}^{-\pi/n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin nt \, dt \right| = o(1)$$

равномерно по x . Теорема доказана.

Наконец, отметим, что результаты настоящей статьи анонсированы в [9].

Институт математики
Болгарской АН

Поступило
8.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
- [2] З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, т. 1, М., «Мир», 1965.
- [3] L e b e s q u e H., Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184—240.
- [4] С е н д о в Бл., Върху някой линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние, Годисник Соф. у-тет, Физ.-матем. фак., 58 (1965), 107—140.
- [5] С е н д о в Бл., Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа, Успехи матем. наук, 24, № 5 (1969), 141—178.
- [6] Н е в а и Г. П., О признаке Дини — Липшица, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 24, № 3—4 (1973), 349—351.
- [7] Ж и ж и а ш в и л и Л. В., О тригонометрических рядах Фурье, Матем. сб., 100, № 4 (1976), 580—609.
- [8] Ч а н т у р и я З. А., О равномерной сходимости рядов Фурье, Матем. сб., 100, № 4 (1976), 534—554.
- [9] Х р и с т о в В. Х., П е т р у ш е в П. П., Одно улучшение критерия Дини — Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье, Докл. Болг. АН, 29, № 11 (1976), 1579—1582.
- [10] H i l l e E., K l e i n G., Riemann's localization theorem for Fourier series, Duke Math. J., 21 (1954), 587—591.