В. Н. Гришин, Невозможность задания класса L_0-алгебр с помощью тождеств, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 641–651

https://www.mathnet.ru/mzm5575

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 5 (1985)

НЕВОЗМОЖНОСТЬ ЗАДАНИЯ КЛАССА L_0-АЛГЕБР С ПОМОЩЬЮ ТОЖДЕСТВ

В. Н. Гришин

Для исследования теоретико-множественного принципа свертывания была введена [1] логика без сокращений L_0, секвенциальная формулировка которой получается из генценовского исчисления секвенций LK классической логики удалением правил сокращения одинаковых формул. В [2] изучался связанный с этой логикой класс так называемых L_0-алгебр. L_0-алгебры — это частично упорядоченные алгебраические системы вида $\boldsymbol{A} = (A, \leqslant, +, \cdot, ^{-}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ с двуместными операциями $(x, y) \mapsto x + y$ и $(x, y) \mapsto x \cdot y$, одноместной операцией $x \mapsto x^{-}$ и константами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, являющимися наименьшим и наибольшим элементами соответственно. По каждой из операций $+$ и $\cdot$ L_0-алгебра является частично упорядоченной коммутативной полугруппой с единицей относительно операций $+$ и $\cdot$ (единицей для операции $+$ служит $\mathbf{0}$, а для операции $\cdot$ — $\mathbf{1}$). Кроме того, для любых элементов x, y, z из A выполняются неравенства

$$x \cdot (x)^{-} \leqslant \mathbf{0}, \qquad \mathbf{1} \leqslant (x)^{-} + x,$$

$$x \cdot (y + z) \leqslant (x \cdot y) + z.$$

Эти алгебры использовались [3] для исследования логики без сокращений L_0. Роль L_0-алгебр для логики без сокращений аналогична роли булевых алгебр в классической логике. Отношение порядка в L_0-алгебрах выражается через операции

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y^{-} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x^{-} + y = \mathbf{1}.$$

В силу этого можно дать аксиоматику L_0-алгебр, не содержащую символа $\leqslant$ (см. [2]). При этом, однако, некоторые аксиомы (например, аксиома антисимметричности) будут иметь вид импликаций. Возникает вопрос: можно ли эти импликации заменить равенствами? В настоящей заметке дается отрицательный ответ на этот вопрос. Доказывается, что квазимногообразие L_0-алгебр не является многообразием.

Для исследования пропозициональной BCK-системы Мередита (см. [4]) Имаи и Исеки ввели в [5] BCK-алгебры (см. [6, 7]). Если в данной L_0-алгебре A определить операцию квазивычитания $(x, y) \mapsto x - y$ равенством $x - y = x \cdot y^{-}$, то множество A, снабженное структурой, состоящей из этой операции и константы $\mathbf{0}$, будет BCK-алгеброй. Вронский в [8] показал, что квазимногообразие BCK-алгебр не является многообразием. Хиггс [9] доказал аналогичное утверждение для квазимногообразия $\mathscr{M}$, состоящего из BCK-алгебр, удовлетворяющих так называемому условию (S). Этот результат Хиггса является усилением упомянутого результата Вронского и вытекает из нашего результата.

Класс $\mathscr{M}$, рассматривавшийся Хиггсом, можно охарактеризовать также как класс частично упорядоченных коммутативных полугрупп с квазивычитанием, определяемым эквивалентностью

$$a - b \leqslant x \Leftrightarrow a \leqslant x + b, \tag{$\ast$}$$

в которых существует наименьший элемент $\mathbf{0}$, являющийся полугрупповой единицей.

Отметим, что полугрупповые алгебраические системы с операцией, определяемой эквивалентностью $(\ast)$, рассматривались многими авторами как в коммутативном, так и в некоммутативном случаях (см. библиографию [10—12]). По-видимому, впервые системы с операцией, определяемой по $(\ast)$, стал рассматривать Т. Сколем в 1919 г. (см. [13]).

Для связи упоминавшихся алгебраических систем с логикой отметим, что BCK-алгебры являются алгебраическим эквивалентом $\supset$-фрагмента (т. е. фрагмента, формулы которого строятся только с помощью импликации) интуиционистского пропозиционального исчисления секвенций Генцена LJ без правил сокращения, а класс Хиггса $\mathscr{M}$ соответствует $(\supset, \wedge)$-фрагменту исчисления LJ также без правил сокращения.

1. Рассмотрим алгебру $A_4 = (A, +, \cdot, ^-, 0, 1)$, носитель которой A состоит из четырех элементов $A = \{0, a, b, 1\}$. Двуместные операции $+$, $\cdot$ и одноместная операция $^-$ определены следующим образом:

$x + 0 = 0 + x = x$; если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то $x + y = 1$.

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$; если $x \neq 1$ и $y \neq 1$, то $x \cdot y = 0$.

$$a^- = b, \ b^- = a, \ 0^- = 1, \ 1^- = 0.$$

Если определить

$$x \leqslant {}_4 y \Leftrightarrow x \cdot y^- = 0, \tag{1}$$

то отношение $x \simeq {}_4 y \Leftrightarrow (x \leqslant {}_4 y) \,\&\, (y \leqslant {}_4 x)$ будет конгруэнцией, а фактор-алгебра по этой конгруэнции будет L_0-алгеброй (а именно 3^x-элементной алгеброй Лукасевича (см. в связи с этим [1]); элементы a и b отождествляются).

Алгебра A_4 с порядком $\leqslant_4$, определяемым согласно (1), не является L_0-алгеброй (так как не выполняется закон антисимметричности для элементов a и b : $a \cdot b^- = 0$ и $b \cdot a^- = 0$, но $a \neq b$.

2. Рассмотрим пропозициональный язык с одной пропозициональной переменной p и связками $+$, $\cdot$, $\urcorner$. Формулы, образуемые с помощью этих связок из буквы p, будем обозначать через $\varphi, \psi, \chi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, а последовательности таких формул — через Γ, Δ с индексами. Таким образом, формулы описанного языка являются элементами абсолютно свободной алгебры с одной образующей p в сигнатуре $+$, $\cdot$, $\urcorner$.

Будем писать $\Gamma \cong \Delta$, если последовательность Γ получается из последовательности Δ некоторой перестановкой (другими словами: если $\Gamma = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ $(n \geqslant 0)$, то $\Delta = \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots, \varphi_{i_n}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$).

Секвенцией назовем выражение вида $\Gamma \to \Delta$. Рассмотрим следующее исчисление секвенций. Аксиомы имеют вид

(Акс 1) $\qquad \Gamma_1, p, \Gamma_2 \to \Delta_1, p, \Delta_2.$

Правила вывода имеют вид

$$(\cdot\to)\ \frac{\Gamma_1,\ \varphi,\ \psi,\ \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1,\ \varphi\cdot\psi,\ \Gamma_2 \to \Delta}\,; \quad (\to\cdot)\ \frac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ \varphi \quad \Gamma_2 \to \psi,\ \Delta_2}{\Gamma \to \Delta}\,,$$

где $\Gamma \cong \Gamma_1\Gamma_2$ и $\Delta \cong \Delta_1, (\varphi\cdot\psi), \Delta_2$;

$$(+\to)\ \frac{\Gamma_1,\ \varphi \to \Delta_1 \quad \psi,\ \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta},\qquad (\to +)\ \frac{\Gamma \to \Delta_1,\ \varphi,\ \psi,\ \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1,\ \varphi + \psi,\ \Delta_2};$$

где $\Gamma \cong \Gamma_1, (\varphi + \psi), \Gamma_2$ и $\Delta \cong \Delta_1\Delta_2$;

$$(\urcorner\to)\ \frac{\Gamma_1\Gamma_2 \to \varphi,\ \Delta}{\Gamma_1,\ \urcorner\varphi,\ \Gamma_2 \to \Delta};\qquad (\to\urcorner)\ \frac{\Gamma,\ \varphi \to \Delta_1\Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1,\ \urcorner\varphi,\ \Delta_2}.$$

Стандартным образом доказывается

ЛЕММА 1. *Правила* $(\cdot\to)$ *и* $(\to +)$ *обратимы. Правила перестановки формул слева и справа от стрелки, а также правило сечения*

$$\frac{\Gamma_1 \to \Delta_1,\ \varphi \quad \varphi,\ \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma_1\Gamma_2 \to \Delta_1\Delta_2}$$

допустимы, т. е. не расширяют запаса выводимых секвенций.

Определим отношение эквивалентности $\simeq$ на формулах.

Определение 1.

$$\varphi \simeq \psi \Leftrightarrow\ \vdash (\varphi \to \psi)\ \&\ \vdash (\psi \to \varphi).$$

Алгебра Линденбаума введенного исчисления является L_0-алгеброй (притом свободной L_0-алгеброй с одной образующей). Константой **0** служит класс эквивалентности формулы $p\cdot\urcorner p$. Константой **1** — класс $[p + \urcorner p]_{\simeq}$. Отношение порядка задается эквивалентностью

$$[\varphi]_{\simeq} \leqslant [\psi]_{\simeq} \Leftrightarrow\ \vdash (\varphi \to \psi).$$

Обозначим эту свободную L_0-алгебру через $\boldsymbol{F}$.

3. Чтобы получить результат о неаксиоматизируемости класса L_0-алгебр с помощью тождеств, достаточно построить эпиморфизм $h\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{A}_4$ на алгебру $\boldsymbol{A}_4$, не являющуюся L_0-алгеброй. По теореме Биркгофа [10, гл. VI] класс L_0-алгебр не будет многообразием, так как он не замкнут относительно эпиморфных образов.

Определение 2. Определим для каждой формулы φ значение $|\varphi|$, являющееся элементом алгебры $\boldsymbol{A}_4$:

$$|p| = a,$$

$$|\varphi + \psi| = |\varphi| + |\psi|,\quad |\varphi\cdot\psi| = |\varphi|\cdot|\psi|,\quad |\urcorner\varphi| = |\varphi|^{\urcorner}.$$

Очевидно, каждый элемент из $\boldsymbol{A}_4$ является значением некоторой формулы.

ТЕОРЕМА. *Если* $\varphi \simeq \psi$, *то* $|\varphi| = |\psi|$.

Следствие. *Класс L_0-алгебр не является многообразием.*

Доказательство. Искомый эпиморфизм $h\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{A}_4$ (см. п. 2) определяется равенством $h([\varphi]_{\simeq}) = |\varphi|$.

В оставшихся пунктах дается доказательство этой теоремы.

4. Формулу, у которой отрицание может встретиться только у переменной, назовем приведенной. Для каждой формулы существует приведенная формула, эквивалентная данной. Эквивалентность здесь понимается в смысле определения 1. Эта приведенная формула получается применением эквивалентностей

$$\neg(\varphi+\psi) \simeq \neg\varphi \cdot \neg\psi, \quad \neg(\varphi\cdot\psi) \simeq \neg\varphi + \neg\psi,$$
$$\neg\neg\varphi \simeq \varphi.$$

Так как формула, получаемая из данной применением указанных эквивалентностей, не меняет своего значения в алгебре $\boldsymbol{A}_4$, то можно считать, что φ и ψ, фигурирующие в теореме, являются приведенными формулами. Как видно из формулировки правил исчисления секвенций, вывод секвенции, составленной из приведенных формул, может содержать только такие применения правил $(\neg\to)$ и $(\to\neg)$, в которых формула φ является пропозициональной переменной p. Поэтому если правила $(\neg\to)$ и $(\to\neg)$ удалить, а вместо них написать аксиомы

(Акс 2). $\qquad \Gamma_1, p, \Gamma, \neg p, \Gamma_2 \to \Delta$

(Акс 3). $\qquad \Gamma \to \Delta_1, p, \Delta, \neg p, \Delta_2,$

то класс выводимых секвенций, составленных из приведенных формул, не изменится. В силу этого последнего утверждения будем считать, что символ $\vdash$ из определения 1 означает выводимость в исчислении с аксиомами (Акс 1), (Акс 2), (Акс 3) и правилами $(\cdot,\to)$, $(\to\cdot)$, $(+\to)$, $(\to +)$.

5. Предположим, что теорема неверна. Тогда для некоторых φ и ψ будет

$$\vdash \varphi \to \psi \quad \text{и} \quad \vdash \psi \to \varphi, \tag{2}$$

$$|\varphi| \neq |\psi|. \tag{3}$$

Так как фактор-алгебра алгебры $\boldsymbol{A}_4$ по отношению $\simeq_4$ является L_0-алгеброй (см. п. 1), то из $\varphi \simeq \psi$ следует

$|\varphi| \simeq_4 |\psi|$. Отсюда и из (3) выводим

$$|\varphi| \in \{a, b\} \text{ и } |\psi| \in \{a, b\}. \qquad (4)$$

Возьмем пару (φ, ψ) с минимальным общим числом символов среди пар (φ, ψ), удовлетворяющих (2) и (3). Будем считать, что (φ, ψ) обозначает такую минимальную пару. Из (4) и условия минимальности пары (φ, ψ) следует, что

φ и ψ не содержат доказуемых или опровержимых подформул. (5)

Формула α называется доказуемой, если секвенция $\to \alpha$ с пустой левой частью выводима, и опровержимой, если секвенция $\alpha \to$ выводима.

6. Будем писать $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, если $n \geqslant 2$ и α получается из выражения $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ некоторой перестановкой членов с последующей расстановкой скобок. Если, кроме того, каждое α_i есть либо p, либо $\neg p$, либо имеет вид $\beta \cdot \gamma$ для некоторых формул β и γ, то пишем $\alpha \overset{*}{=} \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Двойственным образом определяются записи $\alpha = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ и $\alpha \overset{*}{=} \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$. Таким образом, в записях вида $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ главный знак некоторых формул α_i может быть $+$. Если же над знаком равенства поставлена звездочка, то такого не может быть. Из (2) — (5) следует, что

либо (I) $\varphi \overset{*}{=} \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ и $\psi \overset{*}{=} \psi_1 + \ldots + \psi_m$,

либо (II) $\varphi \overset{*}{=} \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_n$ и $\psi \overset{*}{=} \psi_1 \cdot \ldots \cdot \psi_m$

для некоторых n, m, φ_i, ψ_j. Другие случаи невозможны. Если бы, например, $\varphi \overset{*}{=} \varphi_1 + \ldots + \varphi_n$, а $\psi = p$, то в силу (2) были бы доказуемы секвенции $\varphi_1 + \ldots + \varphi_i \to p$ и $\varphi_{i+1} + \ldots + \varphi_n \to$ для некоторого i или секвенции $\varphi_1 + \ldots + \varphi_k \to$ и $\varphi_{k+1} + \ldots + \varphi_n \to p$ для некоторого k, из которых по правилу $(+ \to)$ выводится секвенция $\varphi \to p$. По другим правилам эта секвенция получиться не может. Следовательно, φ содержала бы опровержимую подформулу $\varphi_{i+1} + \ldots + \varphi_n$ или опровержимую подформулу $\varphi_1 + \ldots + \varphi_k$, что противоречит (5). Остальные невозможные случаи разбираются аналогично.

7. Вывод в исчислении с аксиомами Акс 1, Акс 2, Акс 3 и правилами $(+ \to)$, $(\to +)$, $(\cdot \to)$, $(\to \cdot)$ назовем левым, если за всяким применением правила $(\to \cdot)$ непосредственно может применяться любое правило, кроме

$(+\rightarrow)$, т. е. если в выводе нет частей вида

$$(+\rightarrow)\,\frac{\begin{matrix}\vdots\\ \mathrm{I}\end{matrix}\quad (\rightarrow\cdot)\,\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \mathrm{II} & \mathrm{III}\end{matrix}}{\mathrm{IV}}}{\mathrm{V}} \quad \text{или} \quad (+\rightarrow)\,\frac{(\rightarrow\cdot)\,\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \mathrm{I} & \mathrm{II}\end{matrix}}{\mathrm{IV}} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \mathrm{III}\end{matrix}}{\mathrm{V}}\,.$$

Для всякого вывода можно с помощью ряда перестановок правила $(+\rightarrow)$ с правилом $(\rightarrow\cdot)$ построить левый вывод той же секвенции. Перестановка осуществляется следующим образом. Пусть, например, в выводе имеется такая часть:

$$(+\rightarrow)\,\frac{\Gamma_1,\ \alpha\rightarrow\Delta_1 \quad (\rightarrow\cdot)\,\dfrac{\Gamma_2\rightarrow\varphi,\ \Delta_2 \quad \Gamma_3,\ \beta\rightarrow\psi,\ \Delta_3}{\Gamma_2\Gamma_3\beta\rightarrow(\varphi\cdot\psi)\ \Delta_2\Delta_3}}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\,(\alpha+\beta)\rightarrow(\varphi\cdot\psi),\ \Delta_1\Delta_2\Delta_3}\,.$$

Эту часть заменим на следующую:

$$(\rightarrow\cdot)\,\frac{\Gamma_2\rightarrow\varphi,\ \Delta_2 \quad (+\rightarrow)\,\dfrac{\Gamma_1,\ \alpha\rightarrow\Delta_1 \quad \Gamma_3,\ \beta\rightarrow\psi,\ \Delta_3}{\Gamma_1\Gamma_3,\ (\alpha+\beta)\rightarrow\psi,\ \Delta_1\Delta_3}}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3,\ (\alpha+\beta)\rightarrow(\varphi\cdot\psi),\ \Delta_1\Delta_2\Delta_3}\,.$$

Аналогичным образом всякий вывод можно перестроить в правый вывод, определение которого дается двойственным образом.

8. ЛЕММА 2. *Пусть формулы* $\gamma = {}^*\gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ *и* $\delta = {}^*\delta_1 + \ldots + \delta_m$ *удовлетворяют условию* (5) *и секвенция* $\gamma\rightarrow\delta$ *выводима. Тогда имеет место одна из двух альтернатив* — (А) *или* (В).

(А). *Существует разбиение множества* $\{1, 2, \ldots, m\}$ *на попарно не пересекающиеся непустые множества* $I(i) = \{j_1^{(i)}, \ldots, j_{p(i)}^{(i)}\}$ $1\leqslant i\leqslant n$ *(т.е.* $\{1, \ldots m\} = \bigcup_{i\leqslant n} I(i)$ *и* $I(i)\cap I(k) = \varnothing$, $i\neq k$*) такие, что для всякого* $i\leqslant n$

$$\vdash \gamma_i\rightarrow\sum\nolimits_{j\in I(i)}\delta_j, \qquad (6)$$

где через $\sum_{j\in I(i)}\delta_j$ *обозначена формула, получающаяся какой-нибудь расстановкой скобок в выражении* $\delta_{j_1}^{(i)} + \ldots$ $\ldots + \delta_{j_{p(i)}^{(i)}}$.

(В). *Существуют формулы* δ', α, β, δ'' *такие, что*

$$\delta = \delta' + (\alpha\cdot\beta) + \delta'' \text{ и } \vdash\gamma\rightarrow\delta' + \alpha \quad \vdash\rightarrow\beta + \delta''.$$

Двойственное утверждение справедливо для формул вида $\gamma = {}^*\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_n$ *и* $\delta = {}^*\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_m$.

Доказательство. В силу обратимости правила $(\rightarrow +)$ секвенция $\gamma\rightarrow\delta_1, \ldots, \delta_m$ выводима. В силу п. 7 она имеет левый вывод. Если последнее правило в этом выводе есть $(\to \cdot)$, то получается альтернатива (B). Если последнее правило есть $(+ \to)$, то мы имеем две выводимые секвенции $\gamma_1 + \ldots + \gamma_p \to \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_q}$ и $\gamma_{p+1} + \ldots + \gamma_n \to \delta_{i_{q+1}} \ldots, \delta_{i_m}$ для некоторых p, q и некоторой перестановки $i_1, \ldots, i_m$ чисел $1, \ldots, m$. Если $p = 1$ и $n = 2$, то получается альтернатива (A). В противном случае каждая из указанных секвенций, левая часть которых имеет по крайней мере два слагаемых, должна получаться (так как вывод левый) только по правилу $(+ \to)$ из секвенций подобного вида. К этим последним секвенциям опять применяем приведенное рассуждение. В конце концов мы придем к секвенциям вида $\gamma_1 \to \sum_{i \in I(1)} \delta_i, \ldots, \gamma_n \to \sum_{i \in I(n)} \delta_i$, являющимся выводимыми и из которых с помощью многократного применения правила $(+ \to)$ получается секвенция $\gamma \to \delta_1, \ldots, \delta_m$, т. е. мы придем к альтернативе (A).

9. Вернемся к доказательству теоремы. В п. 5 возникли условия (2), (3) и условие минимальности. Как отмечено в п. 6, имеются две возможности. Рассмотрим возможность I, т. е. $\varphi = {}^*\varphi_1 + \ldots + \varphi_n$ и $\psi = {}^*\psi_1 + \ldots + \psi_m$. В силу доказанной леммы появляется четыре возможности: (AA) — альтернатива (A) для секвенции $\varphi \to \psi$ и эта же альтернатива для секвенции $\psi \to \varphi$; (AB) — альтернатива (A) для $\varphi \to \psi$ и (B) для $\psi \to \varphi$; (BA) — (B) для $\varphi \to \psi$ и (A) для $\psi \to \varphi$; (BB) — (B) для $\varphi \to \psi$ и $\psi \to \varphi$.

(AA). В этом случае для каждого $i \leqslant n$ существует разбиение $(I(i) \mid i \leqslant n)$ множества $\{1, \ldots, m\}$ на непустые множества и разбиение $(J(j) \mid j \leqslant m)$ множества $\{1, \ldots, n\}$ также на непересекающиеся непустые множества. Из этого следует, что $n \leqslant m$ и $m \leqslant n$, т. е. $n = m$, и каждое $I(i)$ и $J(j)$ одноэлементно. Из определения операции $+$ в $\boldsymbol{A}_4$, а также из (4) следует, что существует $i_0 \leqslant n$ такое, что $|\varphi_{i_0}| \in \{a, b\}$ и $|\varphi_i| = \mathbf{0}$ для $i \neq i_0$. Аналогично существует $j_0 \leqslant m$ такое, что $|\psi_{j_0}| \in \{a, b\}$ и $|\psi_j| = \mathbf{0}$ для $j \neq j_0$. Из неравенства $|\varphi_{i_0}| \leqslant \left|\sum_{j \in I(i_0)} \psi_j\right|$, справедливого в альтернативе (A), одноэлементности множества $I(i_0)$ и равенств $|\psi_j| = \mathbf{0}$ для всех $j \neq j_0$ вытекает, что $I(i_0) = \{j_0\}$. Таким образом, $\vdash \varphi_{i_0} \to \psi_{j_0}$. Аналогично $\vdash \psi_{j_0} \to \varphi_{i_0}$. Кроме того, $|\varphi_{i_0}| = |\varphi|$ и $|\psi_{j_0}| = |\psi|$. Пара $(\varphi_{i_0}, \psi_{j_0})$ содержит меньше символов, чем исходная пара (φ, ψ), и удовлетворяет условиям (2) и (3) в противоречие с минимальностью пары (φ, ψ), (АВ). Альтернатива (В) для секвенции $\psi \to \varphi$ означает существование формул φ', α, β, φ'' таких, что $\varphi = \varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi''$ и

$$\vdash \psi \to \varphi' + \alpha \tag{7}$$

и

$$\vdash \quad \to \beta + \varphi''. \tag{8}$$

Альтернатива (А) для секвенции $\varphi \to \psi$ позволяет утверждать, что существуют формулы ψ', ψ'', χ такие, что $\psi = \psi' + \chi + \psi''$,

$$\vdash \varphi' \to \psi' \tag{9}$$

и

$$\vdash \alpha\cdot\beta \to \chi \tag{10}$$

и

$$\vdash \varphi'' \to \psi''. \tag{11}$$

Используя эти секвенции, напишем следующую цепочку выводимых секвенций:

$$\psi = \psi' + \chi + \psi'' \xrightarrow{(7)} \varphi' + \alpha \xrightarrow{(8)}$$
$$\xrightarrow{(8)} (\varphi' + \alpha)\cdot(\beta + \varphi'') \to \varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi'' \xrightarrow{(9)} \psi' + \alpha\cdot\beta + \varphi'' \xrightarrow{(10)}$$
$$\xrightarrow{(10)} \psi' + \chi + \varphi'' \xrightarrow{(11)} \psi' + \chi + \psi'' = \psi,$$

где цифры над стрелками указывают секвенцию, используемую при обосновании соответствующих стрелок. Из этой цепочки выводимых секвенций и допустимости правила сечения (лемма 1) следует

$$\varphi' + \alpha \simeq \psi' + \chi + \varphi'' \tag{12}$$

и

$$\varphi' + \alpha \simeq \psi' + \chi + \psi''. \tag{13}$$

Так как $|\varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi''| = |\varphi'| + |\alpha\cdot\beta| + |\varphi''| = |\varphi| \in \{a, b\}$, то

$$|\varphi''| \neq 1. \tag{14}$$

Из (8) следует $|\beta + \varphi''| = |\beta| + |\varphi''| = 1$. Отсюда из (14) вытекает, что либо $|\varphi''| = 0$ и $|\beta| = 1$, либо $|\varphi''| \in \{a, b\}$. В первом случае $|\varphi| = |\varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi''| = |\varphi'| + |\alpha|\cdot|\beta| + |\varphi''| = |\varphi'| + |\alpha|$. Таким образом, значение левой части эквивалентности (13) равно $|\varphi|$, а значение правой есть $|\psi|$. Но эквивалентность (13) содержит меньше символов, чем исходная $\varphi \simeq \psi$, что противоречит условию минимальности из п. 5. Во втором случае, т. е. когда $|\varphi''| \in \{a, b\}$, из условия $|\varphi| = |\varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi''| \in \{a, b\}$ следует, что $|\varphi'| = 0$

и $|\alpha\cdot\beta| = 0$. Из (11) вытекает $|\varphi''| \leqslant_4 |\psi''|$. Это вместе с $|\psi| = |\psi' + \chi + \psi''| \in \{a, b\}$ дает $|\psi''| \in \{a, b\}$ и $|\psi'| = 0$, $|\chi| = 0$. Таким образом,

$$|\varphi| = |\varphi''| \quad \text{и} \quad |\psi| = |\psi''|. \tag{15}$$

Эквивалентности (12) и (13) содержат меньше символов, чем исходная эквивалентность $\varphi \simeq \psi$, удовлетворяющая условию минимальности. Поэтому $|\varphi' + \alpha| = |\psi' + \chi + \varphi''| = |\varphi''|$ и $|\varphi' + \alpha| = |\psi''|$. Отсюда и из (15) следует $|\varphi| = |\psi|$, что противоречит (3).

(ВА). Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

(ВВ). Существуют формулы (см. лемму 2) φ', α, β, φ'', ψ', γ, σ, ψ'' такие, что $\varphi = \varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi''$ и $\psi = \psi' + \gamma\cdot\delta + \psi''$ и секвенции

$$\begin{aligned} &\varphi \to \psi' + \gamma \quad \to \sigma + \psi'', \\ &\psi \to \varphi' + \alpha \quad \to \beta + \varphi'' \end{aligned}$$

выводимы. Из этих секвенций вытекает следующая цепочка доказуемых секвенций:

$$\varphi \to \psi' + \gamma \to \psi' + \gamma\cdot\delta + \psi'' = \\ = \psi \to \varphi' + \alpha \to \varphi' + \alpha\cdot\beta + \varphi'' = \varphi,$$

откуда

$$\begin{gathered} \varphi \simeq \psi' + \gamma, \\ \psi \simeq \varphi' + \alpha, \\ \varphi' + \alpha \simeq \psi' + \gamma. \end{gathered}$$

Каждая из этих эквивалентностей содержит меньше символов, чем исходная эквивалентность $\varphi \simeq \psi$. Поэтому $|\varphi| = |\psi' + \gamma| = |\varphi' + \alpha| = |\psi|$, что противоречит (3).

Таким образом, предположение о несправедливости теоремы приводит к противоречию во всех случаях. Этим завершается доказательство теоремы.

10. Из построенного гомоморфизма h свободной L_0-алгебры $\boldsymbol{F}$ на алгебру $\boldsymbol{A}_4$ вытекает результат Хиггса. Действительно, если определить в алгебрах $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{A}_4$ операцию $(x, y) \mapsto x - y$ равенством $x - y = x\cdot y^-$, то алгебра $\boldsymbol{F}$ будет принадлежать классу $\mathscr{M}$, а алгебра $\boldsymbol{A}_4$ — нет. Очевидно, гомоморфизм h будет гомоморфизмом и по этой операции. Следовательно, класс $\mathscr{M}$ не замкнут относительно гомоморфных образов.

11. Класс L_0-алгебр можно получить из приведенного во введении определения класса $\mathscr{M}$ наложением условий:

сигнатура содержит константу 1, для которой выполнены тождества $1 + x = 1$ и $1 - (1 - x) = x$. Определяя $x^{-} = 1 - x$ и $x \cdot y = (x^{-} + y^{-})^{-}$, мы получаем квазимногообразие L_0-алгебр. Действительно, достаточно установить, что при таком определении для любых x и y имеет место $x \leqslant y \Leftrightarrow 1 \leqslant x^{-} + y$ и $x \leqslant 1$. По определению квазивычитания (см. эквивалентность (∗)) имеем

$$1 \leqslant x^{-} + y \Leftrightarrow 1 - x^{-} \leqslant y \Leftrightarrow 1 - (1 - x) \leqslant y \Leftrightarrow x \leqslant y.$$

В силу этого неравенство $x \leqslant 1$ эквивалентно верному неравенству $1 \leqslant x^{-} + 1 = 1$.

Заметим, что построенная Хиггсом [9] алгебра, гомоморфный образ которой не принадлежит классу $\mathscr{M}$, не является L_0-алгеброй.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 27.12.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гришин В. Н. Об одной нестандартной логике и ее применении к теории множеств.— В кн.: Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. М.: Наука, 1974, с. 135—171.

[2] Гришин В. Н. Об алгебраической семантике логики без сокращений.— В кн.: Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976, с. 247—264.

[3] Гришин В. Н. Предикатные и теоретико-множественные исчисления, основанные на логике без сокращений.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1981, т. 45, № 1, с. 47—68.

[4] Prior A. N. Formal logic.— Oxford, 1962.

[5] Imai Y., Iseki K. On axiom systems of propositional cal culi XIV.— Proc. Japan Acad., 1966, v. 42, p. 19—22.

[6] Iseki K., Tanaka S. An introduction to the theory of BCK-algebras.— Math. Japan., 1978, v. 23, N 1, p. 1—26.

[7] Cornish W. H. On Iseki's BCK-algebras.— Lecture notes in pure and applied math., 1982, v. 74, p. 101—122.

[8] Wronski A. BCK-algebras do not form a variety.— Math. Japan., 1983, v. 28, p. 211—213.

[9] Higgs D. Dually residuated commutative monoids with identity elements as least element do not form an equational class.— Math. Japan., 1984, v. 29, № 1, p. 69—75.

[10] Биркгоф Г. Теория решеток.— М.: Наука, 1984.

[11] Rao N. P. Brouwerian semigroups.— Math. Japan., 1978, v. 23, p. 49—60.

[12] Гришин В. Н. Об одном обобщении системы Айдукевича — Ламбека.— В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983, с. 315—334.

[13] Skolem T. Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalkuls und über Produktions und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen.— In: Skolem Thoralf. Selected works in Logic. Oslo: Universitats forlaget, 1970, p. 67—101.