



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Аникин, В. А. Смирнов, R -операция в теориях с безмассовыми частицами, *ТМФ*, 1984, том 60, номер 1, 49–58

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 февраля 2025 г., 08:33:41



R-ОПЕРАЦИЯ В ТЕОРИЯХ С БЕЗМАССОВЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Аникин С. А., Смирнов В. А.

В теориях с безмассовыми частицами доказана теорема Боголюбова – Парасюка для перенормировочной процедуры с неминимальными вычитаниями, обобщающей перенормировку с «мягкой массой».

В серии работ [1] была описана процедура устранения как ультрафиолетовых (УФ-), так и инфракрасных (ИК-) расходимостей в широком классе теорий с помощью некоторой вычитательной процедуры. В данной статье предлагается обобщение этой перенормированной схемы, основанное на отказе от минимальности УФ- и ИК-вычитаний. Класс теорий, к которым применимо предлагаемое обобщение, остается прежним — это теории, в которых «почти нет» ИК-расходимостей. В теориях с худшим ИК-поведением ИК-расходимости невозможно устранить с помощью локальных (в x -пространстве) контрчленов.

Для описания R -операции необходимо определить вычитающие операторы. Прежде всего модифицируем безмассовые пропагаторы теории: в α -представлении введем в каждый из них дополнительный множитель $\varphi(\alpha)$, являющийся достаточное число раз дифференцируемой функцией, и если фейнмановская амплитуда (ФА) рассматривается в евклидовом пространстве, то убывающей на бесконечности быстрее любой обратной степени переменной α . Кроме того, положим $\varphi(0)=1$. В различные пропагаторы могут вставляться различные функции $\varphi(\alpha)$. Анализ сходимости для простоты изложения будет проводиться в евклидовой формулировке, хотя все результаты переносятся и на пространство Минковского (см. замечания в конце работы).

Введем вычитающие операторы, определенные на α -представлении модифицированной ФА подграфа γ $G_\gamma^\varphi(\underline{p}|\underline{\alpha}) \equiv G_\gamma(\underline{p}|\underline{\alpha}) \prod_{l \in \gamma} \varphi(\alpha_l)$:

$$(1) \quad M_\gamma^{\alpha_\gamma, b_\gamma} = M_\gamma^{b_\gamma} I_\varphi + (1 - M_\gamma^{b_\gamma}) M_{\gamma, \varphi}^{\alpha_\gamma},$$

где

$$(2) \quad I_\varphi M_\gamma^n G_\gamma^\varphi(\underline{p}|\underline{\alpha}) = \prod_{l \in \gamma} \varphi(\alpha_l - \kappa \alpha_l) \{ \kappa=1 \} \mathcal{M}_\kappa^n G_\gamma(\underline{\kappa} \underline{p}|\underline{\alpha}),$$

$$M_{\gamma, \varphi}^n G_\gamma^\varphi(\underline{p}|\underline{\alpha}) = \mathcal{M}_\kappa^n G_\gamma(\underline{\kappa} \underline{p}|\underline{\alpha}) \prod_{l \in \gamma} \varphi(\alpha_l - \kappa \alpha_l),$$

$$(3) \quad \mathcal{M}_\kappa^n f(\kappa) \equiv \sum_{k=0}^n \mathcal{M}_\kappa^{(k)} f(\kappa) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(0).$$

Заметим, что согласно определению оператора $M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$ он осуществляет разложение в ряд Тейлора по внешним импульсам до степени b_{γ} исходной ФА $G_{\gamma}(p)$, а члены со степенями импульсов от $b_{\gamma}+1$ до a_{γ} приобретают дополнительную ИК-регуляризацию за счет функций $\varphi(\alpha)$. Будем условно называть такие члены «массивными», т. к. функции $\varphi(\alpha)$ и их производные играют роль массивного члена в пропагаторе (более подробно об этом см. в части 1 работы [1]).

С помощью введенных вычитающих операторов определим R -операцию привычной формулой

$$(4) \quad R = \sum_{F_0} \prod_{\gamma \in F_0} (-M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}),$$

в которой суммирование ведется по всем лесам F_0 обобщенных блоков, т. е. полных одночастично-неприводимых подграфов. Нетрудно показать (см. приложение), что в (4) можно заменить суммирование по F_0 на суммирование по лесам F одночастично-неприводимых подграфов.

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема. Перенормированная ФА

$$RG_{\Gamma}^{\varphi}(p) \equiv R \int d\underline{\alpha} G_{\Gamma}(\underline{p} | \underline{\alpha}) \prod_{l \in \Gamma} \varphi(\alpha_l)$$

не содержит ни UV -, ни ИК-расходимостей, если числа α_l и b_l удовлетворяют соотношениям $0 \leq a_l - \omega_l \equiv a^l$; $0 \leq \omega_l - 1 - b_l \equiv b^l$; $\sum_i a^i \leq a^{\nu}$,

$\sum_i b^i \leq b^{\nu}$ для произвольной совокупности подграфов $\{\gamma_i\}$ таких, что:

- а) $\mathcal{L}(\gamma_i \cap \gamma_{i'}) = \emptyset$;
- б) любое объединение $\gamma_i \cup \gamma_{i'} \cup \dots$ является одночастично-приводимым;
- в) $\gamma_i \subseteq \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим регуляризованную ФА $G_{\Gamma}^{\varphi}(p)$, сопоставляемую сильно связанному графу Γ :

$$(5) \quad G_{\Gamma}^{\varphi}(\underline{p}) \equiv \int d\underline{\alpha} G_{\Gamma}^{\varphi}(\underline{p} | \underline{\alpha}) = \int_0^{\infty} d\underline{\lambda} D^{-2}(\underline{\alpha}) Z(\underline{p}, \underline{\alpha}) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{A(\underline{p}, \underline{\alpha})}{D(\underline{\alpha})} - \sum_l m_l^2 \alpha_l \right\} \prod_l \varphi(\alpha_l).$$

Здесь функция $Z(\underline{p}, \underline{\alpha})$, как обычно, учитывает наличие производных во взаимодействии и нескаларный характер пропагаторов. Разобьем интеграл в правой части (5) на сумму интегралов по секторам $\Delta_{\pi, j} = \{\alpha | \alpha_{\pi(1)} \leq \alpha_{\pi(2)} \leq \dots \leq \alpha_{\pi(j)} \leq 1 \leq \alpha_{\pi(j+1)} \leq \dots \leq \alpha_{\pi(L)}\}$. В дальнейшем без потери общности будем рассматривать вклад G_{Δ} в (5) от сектора $\Delta_j \equiv \Delta_{\Gamma, j}$, отвечающего тождественной перестановке. В интеграле по области Δ_j для $l \geq j+1$ введем переменные $\beta_l = \alpha_l^{-1}$.

При анализе сходимости различных вкладов в G_Δ удобно переходить к преобразованию Фурье по части переменных \underline{p} , т. е. использовать смешанное представление [2], которое с точностью до несущественного численного множителя имеет вид

$$(6) \quad \int d\underline{\alpha} \int d\underline{\beta} [A^r(\underline{\alpha}, \underline{\beta})]^{-2} Z^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) \times \\ \times \exp \left\{ -W^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta}) - \sum_{l=1}^j m_l^2 \alpha_l - \sum_{l=j+1}^L m_l^2 \beta_l^{-1} \right\} \times \\ \times \prod_{l=1}^j \varphi(\alpha_l) \prod_{l=j+1}^L \varphi(\beta_l^{-1}).$$

Напомним, что при определении действия вычитающих операторов в подынтегральное выражение вводятся параметры $\underline{\kappa} = \{\kappa_\gamma | \gamma \in F\}$. В результате функции A^r , Z^r и W^r (так же как и φ) приобретают зависимость от $\underline{\kappa}$ и оказываются выраженными в конечном счете через суммы по 1-, 2- и псевдо-деревьям графа $\hat{\Gamma}^r$ [2] величин

$$P_T(\alpha, \beta, \kappa) = \prod_{\substack{1 \leq l \leq j \\ l \in T}} \alpha_l \prod_{\substack{j \leq l \leq L \\ l \in T}} \beta_l \prod_{\gamma \in F} \kappa_\gamma^{2L(\gamma \setminus T)}.$$

Граф $\hat{\Gamma}^r$ получается из Γ путем присоединения новой вершины \hat{v} , связанной дополнительными линиями с каждой из r внешних вершин, рассматриваемых в координатном представлении, при этом ¹⁾ $\hat{\Gamma} \equiv \hat{\Gamma}^\kappa$. Анализ сходимости G_Δ будем проводить в «секторных» переменных $\underline{t} = (t_1, \dots, t_j)$ и $\underline{\tau} = (\tau_{j+1}, \dots, \tau_L)$, задаваемых соотношениями

$$(7) \quad \alpha_l = t_1 \dots t_j, \quad \beta_l = \tau_{j+1} \dots \tau_l$$

и изменяющихся в Δ_j на отрезке $[0, 1]$. Здесь и далее, если область изменения индексов l и l' не указана, они пробегают значения $1, 2, \dots, j$ и $j+1, \dots, L$, соответственно. Отметим, что сектор определяет максимальное гнездо \mathcal{N} подграфов γ_l ($l=1, 2, \dots, L$), каждый из которых состоит из линий с номерами $\{1, 2, \dots, l\}$.

Для анализа сходимости RG_Δ удобно перегруппировать слагаемые в (4) после перехода к суммированию по лесам согласно некоторому отношению эквивалентности. С этой целью введем операцию «достройки» $F \rightarrow \bar{F}$ такую, что $F \subset \bar{F}$. Лес \bar{F} достраивается из F следующим образом. Пусть $\gamma \in F$, а $\underline{\gamma} = \bigcup_{\substack{\gamma' \in F \\ \gamma' \subset \gamma}} \gamma'$ ($\underline{\gamma}$ может быть и пустым множеством). Рассмотрим

гнездо подграфов $\{\gamma' | \underline{\gamma} = \gamma \cup (\gamma_i \cap \gamma), l=1, \dots, L; \gamma' \neq \gamma\}$. Оно содержит $L_\gamma - L_\gamma$ различных элементов. Занумеруем их в порядке включения $\gamma^1 \subset \gamma^2 \subset \dots \subset \gamma^L \gamma^{-L} \underline{\gamma} \equiv \gamma$. При любом $i=1, 2, \dots, L_\gamma - L_\gamma - 1$ будем добавлять к F элемент, являющийся УФ-неприводимой ²⁾ компонентой подграфа γ^i , включающей линию $\mathcal{L}(\gamma^i \setminus \gamma^{i-1})$. После того как указанным способом произведена достройка по всем максимальным элементам леса F , мы про-

¹⁾ Здесь n — число внешних вершин диаграммы Γ .

²⁾ УФ-неприводимым мы называем такой подграф, который либо сильно связан, либо состоит из единственной линии.

должаем достраивать лес «извне» с помощью изложенной процедуры, ограничиваясь, однако, только подграфами $\gamma_i \in \mathcal{N}$ с номерами $i \leq j$.

Прежде чем определить отношение эквивалентности, введем Σ — совокупность собственно-энергетических (СЭ-) обобщенных блоков γ диаграммы Γ , таких что: а) каждый из них соединен с остальной частью диаграммы двумя безмассовыми линиями, которые образуют подграф, обозначаемый γ^* ; б) произведение немодифицированных пропагаторов, отвечающих линиям γ^* , ведет себя при $p \rightarrow 0$ как p^{-4} . Такой выбор Σ соответствует фактически СЭ-вставкам в линии, сопоставляемые безмассовым скалярным и векторным частицам.

Обозначим символом $\Sigma_{\mathcal{N}}$ подмножество Σ , состоящее из подграфов, каждый из которых является компонентой связности хотя бы для одного $\gamma_i \in \mathcal{N}$.

Назовем теперь два леса F_1 и F_2 эквивалентными, если

$$(\overline{F_1 \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}}) \cup \Sigma_{\mathcal{N}} = (\overline{F_2 \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}}) \cup \Sigma_{\mathcal{N}}.$$

Лес, обладающий свойством $\bar{F} = F$, является [3] максимальным УФ-лесом (обозначим его \mathcal{F}_α), содержащим линии $\mathcal{L}(F) = \bigcup_{\gamma \in F} \mathcal{L}(\gamma)$. Из остав-

шихся линий построим аналогичным образом ИК-лес \mathcal{F}_β , используя гнездо, соответствующее обратному порядку линий. При этом УФ-неприводимость заменяется понятием ИК-неприводимости (подграф γ является ИК-(не)приводимым тогда и только тогда, когда $\hat{\Gamma}/(\Gamma \setminus \gamma)$ одновершинно (не)приводим), а роль числа независимых циклов $\mathfrak{N}(\gamma)$ играет $\mathfrak{M}(\gamma)$ — число независимых коциклов графа $\hat{\Gamma}$, содержащихся в подграфе γ (подробнее см. [3]). Отметим, что при построении \mathcal{F}_β достраивается лишь пустой ИК-лес.

Множество $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{F}_\beta$ является максимальным обобщенным лесом [3]. В нем ровно L элементов. Введем ассоциированные с \mathcal{F} вспомогательные переменные $\underline{t}' = \{t'_\gamma | \gamma \in \mathcal{F}_\alpha\}$ и $\underline{\tau}' = \{\tau'_\gamma | \gamma \in \mathcal{F}_\beta\}$:

$$(8) \quad \alpha_i = \prod_{l \in \mathcal{L}_\alpha} t'_l, \quad l \in \mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}_\alpha);$$

$$\beta_i = \prod_{l \in \mathcal{L}_\beta} \tau'_l, \quad l \in \mathcal{L}_\beta \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}_\beta).$$

Определим отображение $\sigma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}$. Линия $\sigma(\gamma)$ такова, что $\sigma(\gamma) \in \mathcal{L}(\gamma)$ и $\sigma(\gamma) \notin \mathcal{L}(\gamma')$, $\forall \gamma' \in \gamma$, $\gamma' \in \mathcal{F}$. Обозначим через $\bar{\gamma}$ минимальный из элементов леса, строго включающих в себя данный элемент γ . Переменные $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ выражаются через (α, β) следующим образом: $t'_\gamma = \alpha_{\sigma(\gamma)}$, если γ — максимальный элемент \mathcal{F}_α , и $t'_\gamma = \alpha_{\sigma(\gamma)} [\alpha_{\sigma(\bar{\gamma})}]^{-1}$ в противном случае; $\tau'_\gamma = \beta_{\sigma(\gamma)}$, если γ — максимальный элемент в \mathcal{F}_β , и $\tau'_\gamma = \beta_{\sigma(\gamma)} [\beta_{\sigma(\bar{\gamma})}]^{-1}$ в противном случае. Отсюда получаем связь $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ и $(\underline{t}, \underline{\tau})$. Для γ , являющихся максимальными элементами соответственно \mathcal{F}_α и \mathcal{F}_β ,

$$(9) \quad t'_\gamma = \begin{cases} t_{\sigma(\gamma)} \dots t_j, & \sigma(\gamma) \leq j, \\ [\tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & \sigma(\gamma) > j; \end{cases}$$

$$\tau'_\gamma = \tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}, \quad \sigma(\gamma) > j$$

и для немаксимальных элементов из \mathcal{F}_α и \mathcal{F}_β

$$(9') \quad t'_\gamma = \begin{cases} t_{\sigma(\gamma)} \dots t_{\sigma(\bar{\gamma})-1}, & \sigma(\gamma) < \sigma(\bar{\gamma}) \leq j; \\ [t_{\sigma(\bar{\gamma})} \dots t_{\sigma(\gamma)-1}]^{-1}, & \sigma(\bar{\gamma}) < \sigma(\gamma) \leq j; \\ t_{\sigma(\gamma)} \dots t_j \tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}, & \sigma(\gamma) \leq j < \sigma(\bar{\gamma}); \\ [t_{\sigma(\bar{\gamma})} \dots t_j \tau_{j+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & \sigma(\bar{\gamma}) \leq j < \sigma(\gamma); \\ \tau_{\sigma(\gamma)+1} \dots \tau_{\sigma(\bar{\gamma})}, & j < \sigma(\gamma) < \sigma(\bar{\gamma}); \\ [\tau_{\sigma(\bar{\gamma})+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}]^{-1}, & j < \sigma(\bar{\gamma}) < \sigma(\gamma); \end{cases}$$

$$\tau'_j = \tau_{\sigma(\bar{\gamma})+1} \dots \tau_{\sigma(\gamma)}, \quad j < \sigma(\bar{\gamma}) < \sigma(\gamma).$$

Представим \mathcal{F}_α в виде непересекающегося объединения $\mathcal{F}_\alpha^+ \cup \mathcal{F}_\alpha^-$. К \mathcal{F}_α^+ отнесем такие максимальные γ из \mathcal{F}_α , для которых $\sigma(\gamma) \leq j$, и такие немаксимальные, для которых $\sigma(\gamma) < \sigma(\bar{\gamma})$. Нетрудно увидеть, что $F \setminus \Sigma_{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_\alpha$ всегда достраивается из $F \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$ элементами множества \mathcal{F}_α^+ . Таким образом, любой лес $F \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$ можно получить из \mathcal{F}_α , удалив из последнего некоторые элементы множества \mathcal{F}_α^+ , так что каждый член класса эквивалентности лесов характеризуется \mathcal{F}_α^- , некоторым подмножеством \mathcal{F}_α^+ и некоторым подмножеством $\Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{F}_\alpha^+$. Поэтому вклад всего класса эквивалентности в (4) группируется в выражение

$$(10) \quad R_{\mathcal{F}, \mathcal{M}} = \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^-} (-M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}) \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^+ \cup \Sigma_{\mathcal{M}}} (1 - M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}).$$

Ниже мы будем пользоваться различными представлениями операторов $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ через операторы \mathcal{M} . Определение операторов \mathcal{M} требует введения в G_Δ вспомогательных параметров. Сопоставим каждому подграфу γ пару таких параметров $-\kappa_\gamma$ и ξ_γ . Параметры ξ_γ вводятся в функции $\varphi(\alpha_i)$ так, что

$$\prod_i \varphi(\alpha_i) \Rightarrow \prod_i \varphi\left(\alpha_i \left(1 - \prod_{\gamma \ni i} \xi_\gamma^2\right)\right).$$

Параметры же κ_γ вводятся так же, как и в случае обычных УФ-вычитаний, т. е. на них домножаются все внешние импульсы подграфа γ . После простых преобразований эти параметры оказываются множителями некоторых из переменных α_i ($i=1, \dots, L$).

Произведем в G_Δ по части переменных p преобразование Фурье. Конкретный выбор этой группы импульсов будет дан ниже. Преобразованная функция $G_\Delta(p, \underline{x} | \underline{\kappa}, \underline{\xi})$ запишется как

$$(11) \quad G_\Delta(p, \underline{x} | \underline{\kappa}, \underline{\xi}) = \int_0^1 \prod_i t_i^{i-1} dt_i \prod_{i'} \tau_{i'}^{L-i'} d\tau_{i'} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_i m_i^2 \alpha_i(t) - \sum_{i'} m_{i'}^2 [\beta_{i'}(\underline{\tau})]^{-1} \right\} \times$$

$$\times \prod_{\gamma \in \mathcal{F} \cup \Sigma_{\mathcal{M}}} \kappa_\gamma^{4\Re(\gamma) + a(\gamma)} f_\gamma(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}, \underline{\beta} | \underline{\kappa}) \times$$

$$\times \prod_i \varphi(\alpha_i(t) \left(1 - \prod_{\gamma \ni i} \xi_\gamma^2\right)) \prod_{i'} \varphi([\beta_{i'}(\underline{\tau})]^{-1} \left(1 - \prod_{\gamma \ni i'} \xi_\gamma^2\right)).$$

Здесь $a(\gamma) = \sum_{l \in \Gamma} a_l$, a_l — степень импульса в числителе l -го пропагатора,

$f^r \equiv (A^r)^{-2} Z^r \exp(-W^r)$. Смешанное представление выбирается для $\mathcal{L}_\alpha \equiv \mathcal{L}(\mathcal{F}_\alpha)$ по рецепту работы [2]. В множество \mathcal{V}^r (множество внешних вершин, которым сопоставляются координатные переменные) включается по одной вершине из каждой совокупности вершин, связанных между собой и не связанных с другими вершинами путями, составленными из линий, принадлежащих \mathcal{L}_α . В результате такого выбора представления показатель экспоненты W^r оказывается гладкой функцией вспомогательных переменных $(\underline{t}', \underline{\tau}')$ и не содержит отрицательных степеней κ_γ , что вытекает из определения $\Sigma_{\mathcal{M}^r}$.

Запишем функцию f^r в виде

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^j \alpha_l^{-2} \prod_{l \in \mathcal{L}_\alpha} (\alpha_l')^2 f^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{\alpha}', \underline{\beta}' | \underline{\kappa}) = \\ & = \prod_{l=1}^j t_l^{-2l} \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha} (t_\gamma')^{2L_\gamma} f^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{t}', \underline{\tau}' | \underline{\kappa}) \end{aligned}$$

и воспользуемся для нее представлением [3, формула (15)], которое легко обобщается на случай наличия параметров $\underline{\kappa}$:

$$(12) \quad \begin{aligned} f^r(\underline{x}, \underline{p}, \underline{t}', \underline{\tau}' | \underline{\kappa}) &= \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\alpha} (\kappa_\gamma^2 t_\gamma')^{-2\Omega(\gamma) - [a(\gamma)/2]} \times \\ & \times \prod_{\gamma \in \mathcal{F}_\beta} (\tau_\gamma')^{-\Omega(\gamma) - L(\gamma)} \prod_{\gamma \in \Sigma_{\mathcal{M}^r} \setminus \mathcal{F}} \kappa_\gamma^{-2[\omega(\gamma)/2] - 2L(\gamma)} Q(\underline{t}', \underline{\tau}' | \underline{\kappa}), \end{aligned}$$

где $Q \in C^\infty$, а $[x]$ — целая часть x . В (12) введен ИК-индекс расходимости $\Omega(\gamma)$, удовлетворяющий неравенству

$$\Omega(\gamma) \leq \left[\frac{1}{2} \left(\omega(\widehat{\Gamma \setminus \gamma}) - \omega(\widehat{\Gamma}) + \sum_i \text{Odd}(\Gamma \setminus \gamma)_i + 1 \right) \right],$$

где $(\Gamma \setminus \gamma)_i$ — компоненты связности подграфа $\Gamma \setminus \gamma$, а нечетность $\text{Odd} \gamma$ равна $\text{Odd} \gamma = a(\gamma) - 2[\frac{1}{2}a(\gamma)]$. Переменная t_γ' входит в Q лишь в комбинации $t_\gamma' \pi_\gamma(\underline{\tau}) \kappa_\gamma^2$, где $\pi_\gamma(\underline{\tau}) = \prod \tau_{l'}$, а произведение берется по таким l' , для которых $\gamma \subset \gamma_{l'-1}$ и $\gamma^* \cap \gamma_{l'-1} = \emptyset$. Что же касается κ_γ с γ из $\Sigma_{\mathcal{M}^r} \setminus \mathcal{F}$, то они входят в Q только в комбинациях $\kappa_\gamma^2 \pi_\gamma(\underline{\tau})$. Эти утверждения следуют из свойств факторизации различных форм и того факта, что для γ таких, что $\gamma \subset \gamma_{l'-1}$, $\gamma^* \cap \gamma_{l'-1} = \emptyset$ всегда $\text{def}_\tau \gamma \leq \text{def}_\tau \gamma_{l'-1}$. Отметим также, что для $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha$, параметры ζ_γ входят в функции ϕ также в комбинациях $t_\gamma' \zeta_\gamma^2$.

Из соотношений (9) следует, что t_γ' содержит отрицательные степени переменных $(\underline{t}, \underline{\tau})$ тогда и только тогда, когда $\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^-$. Однако при действии оператора $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ соответствующий параметр κ_γ полагается равным нулю. Поэтому используемое представление (12) является фактически факторизацией и в переменных $(\underline{t}, \underline{\tau})$. Другими словами, правая часть (12) под действием операторов $M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}$ ($\gamma \in \mathcal{F}_\alpha^-$) превращается в выражение вида

$$\prod_i t_i^{\bar{N}_i} \prod_{l'} \tau_{l'}^{\bar{N}_{l'}} \psi(\underline{t}, \underline{\tau}), \quad \text{где } \psi \text{ — гладкая, ограниченная функция.}$$

Докажем УФ-сходимость $R_{\mathcal{F}, \mathcal{N}} G_{\Delta}$. Прежде всего перейдем в (10) к операторам \mathcal{M} , действующим на параметры. При этом мы переопределим введенные выше параметры $(\underline{\kappa}, \underline{\xi})$, заменяя $(\underline{\kappa}, \underline{\xi}) \rightarrow (\underline{\kappa}', \underline{\xi}', \underline{\kappa}')$. Тогда (опуская штрихи)

$$(13) \quad M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}} \Rightarrow M_{\xi_{\gamma}}^{b_{\gamma}} I_{\kappa_{\gamma}} + (I_{\xi_{\gamma}} - M_{\xi_{\gamma}}^{b_{\gamma}}) M_{\kappa_{\gamma}}^{a_{\gamma}}.$$

Используя для $(I_{\kappa} - M_{\kappa}^a)$ стандартное представление

$$(14) \quad (I_{\kappa} - M_{\kappa}^a) f(\kappa) = \int_0^1 d\kappa \frac{(1-\kappa)^a}{a!} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa} \right)^{a+1} f(\kappa),$$

можно оценить степени, в которых t_i входят в подынтегральное выражение для $R_{\mathcal{F}, \mathcal{N}} G_{\Delta}$. Согласно (9), (11) и (12) имеем

$$(15) \quad \deg t_i \equiv N_i = -l - 1 + \sum_{\sigma(\gamma) \leq l < \sigma(\bar{\gamma})} N_{\gamma}^{+} - \sum_{\sigma(\bar{\gamma}) \leq l < \sigma(\gamma)} N_{\gamma}^{-},$$

где N_{γ}^{\pm} — степени переменных t_{γ}' при $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}^{\pm}$. В (15) под знаком сумм мы не выписывали условие $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}$ и приняли, что для γ , являющихся максимальными, условие $\sigma(\gamma) \leq l < \sigma(\bar{\gamma})$ заменяется на $\sigma(\gamma) \leq l$. Легко видеть, что для $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}^{-}$

$$(16) \quad N_{\gamma}^{-} \leq L_{\gamma} + [a/2].$$

Так как согласно (13) действие оператора $(1 - M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}})$ при проводимом подсчете степеней сводится к $\omega_{\gamma} + a^{\gamma} + 1$ дифференцированию по κ_{γ} , то

$$(17) \quad N_{\gamma}^{+} \geq [a^{\gamma}/2] + L_{\gamma} + 1.$$

Перегруппировав в (15) слагаемые с помощью соотношений

$$(18) \quad \sum_{\sigma(\gamma) \leq l < \sigma(\bar{\gamma})} = \sum_{\sigma(\gamma) \leq l} - \sum_{\sigma(\gamma), \sigma(\bar{\gamma}) \leq l}, \quad \sum_{\sigma(\bar{\gamma}) \leq l < \sigma(\gamma)} = \\ = \sum_{\bar{\gamma}: \sigma(\bar{\gamma}) \leq l} - \sum_{\sigma(\gamma), \sigma(\bar{\gamma}) \leq l}, \quad \sum_{\bar{\gamma}: \sigma(\bar{\gamma}) \leq l} A_{\gamma} = \sum_{\bar{\gamma}: \sigma(\bar{\gamma}) \leq l} \sum_{\gamma': \bar{\gamma}' = \gamma} A_{\gamma'},$$

получаем из (15) с учетом (16) и (17), что при сформулированных в теореме условиях на a^{γ} степень $N_i \geq -1 + \sum_{\substack{\sigma(\gamma) \leq l < \sigma(\bar{\gamma}) \\ \gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}}} 1$. Покажем, что для лю-

бого $1 \leq l \leq j$ найдется такой $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}$, что $\sigma(\gamma) \leq l < \sigma(\bar{\gamma})$. Предположим противное. Рассмотрим максимальные элементы из \mathcal{F}_{α} . Согласно предположению для любого из них $\sigma(\gamma) \geq l + 1$. Пусть $\{\gamma_i\}$ — непересекающиеся друг с другом элементы \mathcal{F}_{α} , строго принадлежащие одному из максимальных элементов. По предположению и для них $\sigma(\gamma_i) \geq l + 1$. Продолжая рассуждение, получаем, что $\sigma(\gamma) \geq l + 1$ для всех γ из \mathcal{F}_{α} . Поскольку $\sigma(\gamma) \geq j + 1$ для $\gamma \in \mathcal{F}_{\beta}$ по построению \mathcal{F}_{β} , мы получили, что $\sigma(\gamma) \geq l + 1$ для всех $\gamma \in \mathcal{F}$. Поскольку в \mathcal{F} ровно L элементов, это противоречит изоморфности отображения σ .

Перейдем к анализу ИК-сходимости. Вернемся к исходному способу введения параметров κ_{γ} и ξ_{γ} , а для оператора $M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$ выберем следующее

представление:

$$M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}} \Rightarrow M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}} I_{\zeta_{\gamma}} + \sum_{k_{\gamma}=b_{\gamma}+1}^{a_{\gamma}} M_{\zeta_{\gamma}}^{a_{\gamma}-k_{\gamma}} M_{\kappa_{\gamma}}^{(k_{\gamma})},$$

отметим, что подынтегральное выражение в $R_{\mathcal{F}, \mathcal{M}} G_{\Delta}$ представляет собой сумму, каждое из слагаемых в которой с точностью до гладкой функции является произведением степеней $\tau_{i'}$ (и t_i) на функции φ и их производные. Таким образом, сходимость по каждому $\tau_{i'}$ будет следовать из положительности степеней этих переменных в тех и только тех слагаемых, которые не содержат функций φ , зависящих от данного $\tau_{i'}$. В прочих случаях сходимость будет обеспечиваться функциями φ .

Пусть $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}^{-}$. Если действие операторов $M_{\kappa_{\gamma}}^{(k_{\gamma})}$ влияет на степень $\tau_{i'}$, то в γ должна находиться хотя бы одна линия с номером, большим или равным l' (см. соотношения (9)). Однако в этом случае действие операторов $M_{\zeta_{\gamma}}^{a_{\gamma}-k_{\gamma}}$ приводит к появлению функций φ (либо их производных), зависящих от $\tau_{i'}$, так что с учетом сделанного выше замечания остается лишь рассматривать вклад в $M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$, равный $M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}} I_{\zeta_{\gamma}}$.

Пусть теперь $\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}^{+} \cup \Sigma_{\mathcal{M}}$. Запишем $1 - M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$ в виде $(I_{\kappa_{\gamma}} - M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}}) I_{\zeta_{\gamma}} - \sum_{k_{\gamma}=b_{\gamma}+1}^{a_{\gamma}} M_{\zeta_{\gamma}}^{a_{\gamma}-k_{\gamma}} M_{\kappa_{\gamma}}^{(k_{\gamma})}$. Если операторы $M_{\zeta_{\gamma}}^{a_{\gamma}-k_{\gamma}}$ обеспечивают

сходимость по $\tau_{i'}$, то достаточно учитывать вклад в $1 - M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$ оператора $(I_{\kappa_{\gamma}} - M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}}) I_{\zeta_{\gamma}}$. В противном случае вкладом $\sum_{k_{\gamma}=b_{\gamma}+1}^{a_{\gamma}} M_{\zeta_{\gamma}}^{a_{\gamma}-k_{\gamma}} M_{\kappa_{\gamma}}^{(k_{\gamma})}$ пренебречь нельзя в указанном выше смысле. Отметим, что любое слагаемое из этой суммы приводит к действию производной $(\partial/\partial \kappa_{\tau})^{k_{\gamma}}$ порядка $k_{\gamma} \geq b_{\tau} + 1$. С другой стороны, использование формулы для остаточного члена (14) показывает, что действие оператора $(I_{\kappa_{\gamma}} - M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}})$ при подсчете степеней также эквивалентно применению операции $(\partial/\partial \kappa_{\tau})^{b_{\gamma}+1}$. Таким образом, действие всего оператора $1 - M_{\gamma}^{a_{\gamma}, b_{\gamma}}$ при подсчете степеней τ сводится к применению этой операции. С учетом сделанных замечаний имеем

$$(19) \quad \deg \tau_{i'} = Q_{i'} + L - l' + \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_{\beta}}} \deg \tau_{\bar{\gamma}} + \\ + \sum_{\substack{\sigma(\gamma) < l' \leq \sigma(\bar{\gamma}) \\ \gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}}} N_{\bar{\gamma}}' + - \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_{\alpha}}} N_{\bar{\gamma}}' - ,$$

где $Q_{i'}$ — прямой вклад в степень $\tau_{i'}$ от действия операторов $\prod_{\gamma \in \Sigma_{\mathcal{M}}} (I_{\kappa_{\gamma}} - M_{\kappa_{\gamma}}^{b_{\gamma}})$ за счет $\kappa_{\tau}(\tau)$, равный, как легко убедиться,

$$(20) \quad Q_{i'} = \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma_{\mathcal{M}} \\ \gamma \in \gamma_{i'} - 1 \\ \gamma^* \cap \gamma_{i'} - 1 = \emptyset}} (b_{\gamma} - \text{Odd } \gamma + 1),$$

Из (12) и (13) получаем

$$\begin{aligned} \deg \tau_{l'} \geq & L - l' + \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\alpha}} (L_\gamma - [b^{\gamma/2}]) - \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\alpha}} (L_\gamma - \\ & - [\frac{b^{\gamma+1}}{2}]) + \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\beta}} (-\Omega(\gamma) - L(\gamma)) + Q_{l'}, \end{aligned}$$

где $b^{\gamma} = \omega_\gamma - 1 - b_\gamma$. Тогда, пользуясь формулами, аналогичными (18), получаем

$$\begin{aligned} (21) \quad \deg \tau_{l'} \geq & -1 + \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\beta}} 1 + \sum_{\substack{\sigma(\gamma) \geq l' \\ \gamma \in \mathcal{F}_\alpha}} \left([\frac{b^{\gamma+1}}{2}] - \sum_{\gamma': \bar{\gamma}' = \gamma} [\frac{b^{\gamma'}}{2}] \right) - \\ & - \sum_{\substack{\sigma(\bar{\gamma}) < l' \leq \sigma(\gamma) \\ \gamma \in \mathcal{F}_\beta}} (1 + \Omega(\gamma)) + Q_{l'}. \end{aligned}$$

Сумма первых двух членов неотрицательна, в чем легко убедиться, повторяя рассуждения, приведенные при оценке $\deg t_l$. Третий член неотрицателен, если b^{γ} выбрать так, чтобы

$$\left[\frac{b^{\gamma} + 1}{2} \right] \geq \sum_{\gamma': \bar{\gamma}' = \gamma} \left[\frac{b^{\gamma'}}{2} \right],$$

что сводится к сформулированным в условиях теоремы ограничениям на b^{γ} . Что касается последних двух членов в правой части (21), то напомним, что $\Omega(\gamma) \geq 0$ лишь тогда, когда подграф $\Gamma \setminus \gamma$ содержит в себе γ' из $\Sigma_{\mathcal{M}}$ в качестве компоненты связности. Но в этом случае происходит взаимная компенсация между последней и предпоследней суммами в (21). Таким образом, $\deg \tau_{l'} \geq 0$ для l' таких, что $\gamma_{l'-1}$ не содержит «массивных» линий.

В заключение отметим, что для ФА, рассматриваемых в пространстве Минковского, можно воспользоваться стандартной ИК-ε-регуляризацией и техникой разворота контура [1] либо же интегрированием по частям по переменным $\tau_{l'}$ [2]. В первом случае на функцию φ накладывается условие быстрого убывания в нижней полуплоскости комплексного аргумента, а во втором (близкое условие) достаточно считать, что найдутся такие $\eta > 0$, $C_m, n > 0$ и $\beta_0 > 0$, что при $\beta \leq \beta_0$

$$|(\chi^{(n)} / \chi^{(n+1)})^{(m)}| < C_m, n \beta^{\eta - m + 1},$$

где $\chi^{(n)}(\beta) = (d/d\beta)^n \varphi(1/\beta)$. Этим обоим ограничениям удовлетворяет, в частности, суперпозиция массивных экспонент. Перенормировка с «мягкой массой» соответствует выбору $\varphi(\alpha) = \exp(-i\mu^2 \alpha)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем равенство

$$(П.1) \quad R = \sum_{F_0 \in \{F_0\}} \prod_{\gamma \in F_0} (-M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}) = \sum_{F \in \{F\}} \prod_{\gamma \in F} (-M_\gamma^{a_\gamma, b_\gamma}),$$

где F_0 — леса обобщенных блоков, а F — леса одночастично-неприводимых подграфов.

Рассмотрим $\gamma \in F$, не являющийся полным подграфом. В $\{F_0\}$ существует подграф $\bar{\gamma}$, являющийся пополнением γ , т. е. получающийся присоединением к γ всех линий, соединяющих вершины γ , но не включенных в γ . Легко увидеть, что в $\sum_{\{F\}}$

после несложной перегруппировки соответствующие операторы входят в комбинации $M_{\bar{\gamma}}^{a_{\bar{\gamma}}, b_{\bar{\gamma}}}(1 - M_{\bar{\gamma}}^{a_{\bar{\gamma}}, b_{\bar{\gamma}}})$. Согласно (1) имеем

$$M_{\bar{\gamma}}^{a_{\bar{\gamma}}, b_{\bar{\gamma}}}(1 - M_{\bar{\gamma}}^{a_{\bar{\gamma}}, b_{\bar{\gamma}}}) = M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}}(1 - M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}}) I_{\Phi}(I_{\rho} - M_{\bar{\gamma}, \rho}^{a_{\bar{\gamma}}}) + (1 - M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}})(1 - M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}}) M_{\bar{\gamma}, \rho}^{a_{\bar{\gamma}}}(I_{\rho} - M_{\bar{\gamma}, \rho}^{a_{\bar{\gamma}}}).$$

Если положить $a_{\bar{\gamma}} \geq a_{\gamma}$, $b_{\bar{\gamma}} \geq b_{\gamma}$ и провести несложный анализ того, как входят соответствующие параметры $(\kappa_{\bar{\gamma}}, \zeta_{\bar{\gamma}})$ и $(\kappa_{\gamma}, \zeta_{\gamma}')$ в ФА, то легко показать, что

$$M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}}(1 - M_{\bar{\gamma}}^{b_{\bar{\gamma}}}) G^{\rho}(\underline{p} | \underline{\alpha}) = M_{\gamma, \rho}^{a_{\gamma}}(1 - M_{\gamma}^{b_{\gamma}}) G^{\rho}(\underline{p} | \underline{\alpha}) = 0,$$

т. е. члены в (II.4), содержащие операторы, отвечающие неполным подграфам, выпадают.

Литература

- [1] Аникин С. А., Завьялов О. И., Карчев Н. И. — ТМФ, 1980, 44, № 3, 291–306; 1981, 46, № 1, 3–26. Аникин С. А., Бордаг М., Завьялов О. И. — ТМФ, 1983, 56, № 2, 163–170.
- [2] Смирнов В. А. — ТМФ, 1980, 44, № 3, 307–320; 1981, 46, № 2, 199–212.
- [3] Смирнов В. А. — ТМФ, 1983, 59, № 3, 373–387.
- [4] Завьялов О. И. Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.

Научно-исследовательский институт
ядерной физики
Московского государственного
университета

Поступила в редакцию
3.X.1983 г.

R-OPERATION IN THEORIES WITH MASSLESS PARTICLES

Anikin S. A., Smirnov V. A.

In theories with massless particles the Bogoliubov – Parassiuk theorem is proved which describes the renormalization procedure with nonminimal subtractions generalizing the renormalization with a «soft mass».