Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ю. Н. Зайко, Л. И. Кац, Н. Н. Киреев, С. А. Смолянский, О распространении электромагнитных волн в разреженной плазме, помещенной в переменное магнитное поле,
ТВТ, 1972, том 10, выпуск 2, 232–242

https://www.mathnet.ru/tvt9607

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
17 июля 2025 г., 14:45:28

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 10 *1972* *№ 2*

УДК 533.932

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЕРЕМЕННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Ю. Н. Зайко, Л. И. Кац, Н. Н. Киреев, С. А. Смолянский

Рассмотрен процесс распространения электромагнитной волны в плазме, помещенной в переменное магнитное поле при произвольной взаимной ориентации векторов напряженностей постоянного и переменного магнитных полей и волнового вектора **k** электромагнитной волны. Показано, что наличие переменного магнитного поля приводит к появлению дополнительных резонансных частот, областей отсечки сигнала, а также к возможности «просветлить» достаточно большой слой плазмы.

В настоящее время вопрос о распространении электромагнитных волн в плазме, находящейся в сильном стороннем магнитном поле, теоретически и экспериментально изучен недостаточно. В [1—5] предполагалось, что на разреженную плазму наложено сильное пространственно однородное переменное магнитное поле

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0(1 - \chi \cos \Omega t),$$

ориентация которого в пространстве остается неизменной во времени. При этом плазма становится анизотропной и нестационарной. В [1, 2] вычислен тензор электропроводности такой плазмы, что позволило качественно рассмотреть вопрос о распространении в плазме электромагнитной волны высокой частоты $\omega \gg \Omega$. В частности, в работе [2] показано, что в рамках сделанных предположений параметрическая раскачка электромагнитной волны невозможна.

С точки зрения ряда практических приложений (диагностика, высокочастотный нагрев плазмы, модуляция электромагнитного излучения и т. д.) представляет интерес дальнейшее исследование электрооптических свойств плазмы, помещенной в переменное магнитное поле.

В данной работе вычислен комплексный показатель преломления однокомпонентной лоренцевой плазмы при произвольной взаимной ориентации векторов напряженностей постоянного и переменного внешних магнитных полей и волнового вектора электромагнитной волны (в работе [3] практически рассмотрен лишь один частный случай, когда все три указанных вектора попарно коллинеарны). Следует отметить, что в [1—5] обсуждаются результаты, усредненные по периоду колебаний переменного магнитного поля. Предлагаемая работа свободна от этого ограничения, что немаловажно в тех случаях, когда представляют интерес фазовые соотношения между обыкновенной и необыкновенной волнами в замагниченной плазме, например, при изучении модуляционного эффекта. В данной работе также изучается отклик системы на электрическое поле, реально существующее в плазме и являющееся суперпозицией электрического поля, падающего на плазму, и вихревого электрического поля, индуцируемого внешним переменным магнитным полем, в отличие от работ [1—5], где учитывается лишь возмущение, создаваемое полем падающего на плазму электромагнитного излучения.

1. Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в бесконечной пространственно однородной лоренцевой плазме, помещенной в пространственно однородное переменное магнитное поле $\mathbf{H}(t) = \mathbf{h}_0 H_0 + \mathbf{h}_1 H_1 \cos \Omega t$, где $|\mathbf{h}_{0,1}| = 1$. Векторы $\mathbf{h}_{0,1}$ ориентированы произвольно относительно направления распространения электромагнитной волны. Предположим, что волна распространяется вдоль оси 3, а $\mathbf{h}_0 = \{h_1; h_2; h_3\}$ и $\mathbf{h}_1 = \{e_1; 0; e_3\}$. Будем считать, что переменное магнитное поле $\mathbf{H}_1(t)$ и индуцируемое им электрическое поле $\mathbf{E}_1(t)$ — сильные [1, 3, 6]. При вычислении тензора электропроводности плазмы будем исходить из уравнения движения электронов в нерелятивистском приближении

$$m(d\mathbf{v} / dt + \nu\mathbf{v}) = -e(\mathbf{E} + 1 / c[\mathbf{v}\mathbf{H}(t)]). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, где $\mathbf{E}_2(x, t) = \mathbf{E}_{20} e^{i(\omega t - \mathbf{kx})}$ — слабое электрическое поле волны; ν — эффективная частота соударений, которая предполагается не зависящей от $\mathbf{E}_2$. При $\Omega \gtrsim \nu$ ν не зависит от времени, будучи функцией лишь амплитуды поля $\mathbf{E}_1$ [3].

Уравнение (1) перепишем относительно плотности тока $\mathbf{j}(x, t) = -e\nu N$, индуцируемого полем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$,

$$d\mathbf{j} / dt = (1 / 4\pi)\omega_p^2 \mathbf{E} - \omega_0[\mathbf{j}\mathbf{h}_0] - \omega_1[\mathbf{j}\mathbf{h}_1] \cos \Omega t - \nu\mathbf{j}, \tag{2}$$

где

$$\omega_p^2 = (4\pi e^2 N) / m; \qquad \omega_{0,1} = eH_{0,1} / mc,$$

N — средняя плотность электронов.

В работах [1—3] найдено точное решение уравнения (2) для случая, когда векторы $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$ коллинеарны. Поскольку в общем случае точное решение уравнения (2) найти не удается, воспользуемся приближенным методом решения.

Для этого выполним в уравнении (2) преобразование Фурье по времени, ограничиваясь случаем, когда $\omega \gg \Omega$. Тогда зависимость векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ от времени определяется набором частот $\omega \pm n\Omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_n(\mathbf{x}, \omega) \exp[i(\omega + n\Omega)t], \tag{3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_n(\mathbf{x}, \omega) \exp[i(\omega + n\Omega)t]. \tag{3a}$$

Заметим, что в [1—5] предполагается в отличие от (3а), что $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathrm{Re}\, \mathbf{E}_0(x) e^{i\omega t}$. Как указывалось выше, это приводит к учету отклика системы лишь на внешнее поле $\mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)$. Использование соотношения (3а) означает, что под внешним возмущением подразумевается суммарное поле $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$.

Подставляя в уравнения (2) разложения (3), получим уравнения относительно токов $\mathbf{j}_n(\mathbf{x}, \omega)$

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \hat{A}_{nn'}(\omega) \mathbf{j}_{n'}(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{E}_n(\mathbf{x}, \omega), \tag{4}$$

где введено обозначение

$$\hat{A}_{nn'}(\omega) = \begin{cases} \hat{\Sigma}_n(\omega), & n' = n, \\ \frac{1}{2}\hat{\Sigma}(\omega) & n' = n \pm 1, \\ 0 & n' \neq n, n \pm 1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\hat{\Sigma}_n(\omega) = 4\pi\omega_p^{-2} \begin{bmatrix} z_n & \omega_0 h_3 & -\omega_0 h_2 \\ -\omega_0 h_3 & z_n & \omega_0 h_1 \\ \omega_0 h_2 & -\omega_0 h_1 & z_n \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$z_n = i(\omega + n\Omega - i\nu)$$

$$\hat{\Sigma}(\omega) = 4\pi\omega_p^{-2}\omega_1 \begin{bmatrix} 0 & e_3 & 0 \\ -e_3 & 0 & e_1 \\ 0 & -e_1 & \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Определим теперь матрицу проводимости $\hat{\sigma}_{nn'}(\omega)$ соотношением

$$\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{nn'}(\omega)\hat{A}_{n'm}(\omega) = \hat{1}\cdot\delta_{nm}. \tag{8}$$

С учетом (5) это соотношение может быть записано в следующем виде:

$$\hat{\sigma}_{nm}(\omega)\hat{\Sigma}_m(\omega) + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{nm+1}(\omega) + \hat{\sigma}_{nm-1}(\omega)]\hat{\Sigma}(\omega) = 1\cdot\delta_{nm}. \tag{9}$$

Определение (8) позволяет переписать уравнение (4) в форме закона Ома

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{nm}(\omega)\mathbf{E}_m(\mathbf{x}, \omega). \tag{10}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получим ($T = 2\pi / \Omega$)

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T}\int_0^T dt'\hat{\sigma}(t, t')\mathbf{E}(\mathbf{x}, t').$$

2. Уравнения (9) образуют систему бесконечного числа линейных зацепляющихся уравнений относительно матриц $\hat{\sigma}_{nm}(\omega)$. Поскольку в общем случае точно решить эту систему не удается, приходится для ее решения привлекать различные приближенные методы.

Если $\lambda = H_1 / H_0 \ll 1$, то для решения уравнения (9) можно воспользоваться теорией возмущений. Разложим $\hat{\sigma}_{nm}(\omega)$ в степенной ряд по λ

$$\hat{\sigma}_{nm}(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\sigma}_{nm}^{(i)}(\omega),$$

где $\hat{\sigma}_{nm}^{(i)}(\omega) \sim \lambda^i$. Подставляя это разложение в уравнение (9) и замечая, что согласно (6) $\hat{\Sigma}_n$ вообще не зависит от λ, а согласно (7) $\hat{\Sigma}(\omega) \sim \lambda$, получим

$$\hat{\sigma}_{nm}^{(0)}(\omega)\hat{\Sigma}_n(\omega) = \delta_{nm}, \tag{11}$$

$$\hat{\sigma}_{nm}^{(i)}(\omega)\hat{\Sigma}_m(\omega) + \frac{1}{2}[\hat{\sigma}_{nm+1}^{(i-1)}(\omega) + \hat{\sigma}_{nm-1}^{(i-1)}(\omega)]\hat{\Sigma}(\omega) = 0, \tag{12}$$

где $i = 1, 2, \ldots$ Уравнения (11) и (12) позволяют определить тензор проводимости в любом порядке по λ. Если переменное магнитное поле отсутствует, то выражение (11) определяет проводимость плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле. Из (12) видно, что $\hat{\sigma}_{n,\,n+k} \sim \lambda^k$. В частности, в первом и втором порядке по λ имеем

$$\hat{\sigma}_{nm}^{(1)}(\omega) = -\frac{1}{2}[\delta_{nm+1} + \delta_{nm-1}]\hat{\Sigma}_n^{-1}(\omega)\hat{\Sigma}(\omega)\hat{\Sigma}_m^{-1}(\omega), \tag{13}$$

$$\hat{\sigma}_{nm}^{(2)}(\omega) = \frac{1}{4}\{[\delta_{nm+2} + \delta_{nm}]\hat{\Sigma}_n^{-1}(\omega)\hat{\Sigma}(\omega)\hat{\Sigma}_{m+1}^{-1}(\omega) + \\ + [\delta_{nm} + \delta_{nm-2}]\hat{\Sigma}_n^{-1}(\omega)\hat{\Sigma}(\omega)\hat{\Sigma}_{m-1}^{-1}(\omega)\}\hat{\Sigma}(\omega)\hat{\Sigma}_m^{-1}(\omega). \tag{14}$$

Желая выйти за рамки теории возмущений (в резонансных точках зависимость функций $\hat{\sigma}_{nm}$ от λ может оказаться неаналитической), оборвем формально цепочку уравнений (9), полагая приближенно

$$\hat{\sigma}_{nm+n}(\omega) \begin{cases} \neq 0 & |m| \leqslant k, \\ = 0 & |m| > k. \end{cases}$$

При этом система уравнений (9) переходит в замкнутую систему $2k+1$ уравнений относительно $2k+1$ неизвестных $\hat{\sigma}_{nm}(\omega)\, m = n, n \pm 1, \ldots, n \pm k$. В частности, при $k = 1$ из (9) получим систему трех уравнений и

$$\hat{\sigma}_{nn}(\omega) = \left\{\hat{\Sigma}_n(\omega) - \frac{1}{4}\hat{\Sigma}(\omega)[\hat{\Sigma}_{n-1}^{-1}(\omega) + \hat{\Sigma}_{n+1}^{-1}(\omega)]\hat{\Sigma}(\omega)\right\}^{-1}, \tag{15}$$

$$\hat{\sigma}_{nn\pm1}(\omega) = -\frac{1}{2}\left\{\hat{\Sigma}_n(\omega) - \frac{1}{4}\hat{\Sigma}(\omega)[\hat{\Sigma}_{n-1}^{-1}(\omega) + \right. \\ \left. + \hat{\Sigma}_{n+1}^{-1}(\omega)]\hat{\Sigma}(\omega)\right\}^{-1}\hat{\Sigma}(\omega)\hat{\Sigma}_{n\pm1}^{-1}(\omega). \tag{16}$$

При $\lambda \ll 1$ формула (16) в первом порядке по λ совпадает с формулой (13). Нетрудно также убедиться, что коэффициент при λ^2 в разложении в ряд по λ матрицы (15) совпадает с матрицей $\hat{\sigma}_{nn}^{(2)}(\omega)$, определяемой формулой (14).

3. Соотношения (15) и (16) определяют матрицу проводимости плазмы, помещенной в переменное магнитное поле. Нетрудно установить обычным путем связь между матрицей проводимости $\hat{\sigma}_{nm}$ и матрицей диэлектрической проницаемости

$$\hat{\varepsilon}_{nm}(\omega) = 1 \cdot \hat{\delta}_{nm} - \frac{4\pi i}{\omega + n\Omega}\hat{\sigma}_{nm}(\omega). \tag{17}$$

Определим далее комплексный показатель преломления электромагнитной волны с частотой $\omega_n = \omega + n\Omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}$ соотношением

$$\mathbf{n}_m(\omega) = n_m'(\omega) + in_m''(\omega) = c / \omega_m \cdot \mathbf{k} \tag{18}$$

и запишем условие совместности уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитной волны в анизотропной среде с временной дисперсией [7]:

$$|\{n_m^2(\omega)\delta_{\alpha\beta} - [n_m(\omega)]_\alpha[n_m(\omega)]_\beta\}\delta_{nm} - \varepsilon_{nm}^{\alpha\beta}(\omega)| = 0, \tag{19}$$

где $[n_m(\omega)]_\alpha$ — α-я компонента вектора $\mathbf{n}_m(\omega)$.

4. Формулы (15) — (17) и (19) позволяют найти явное выражение для комплексного показателя преломления плазмы. Поскольку формулы (15), (16) в общем случае являются достаточно сложными для анализа, рассмотрим подробно наиболее важные с практической точки зрения случаи, когда векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{h}_0$ и $\mathbf{h}_1$ попарно перпендикулярны или параллельны друг другу. Существует всего пять таких физически различных частных случаев:

I. Продольное распространение: $h_3 = e_3 = 1$; $h_1 = h_2 = e_1 = 0$.

II. Поперечное распространение: $h_1 = e_1 = 1$; $h_2 = h_3 = e_3 = 0$.

III. Векторы $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны:

$$h_2 = e_1 = 1; \quad h_1 = h_3 = e_3 = 0.$$

IV. Переменное магнитное поле коллинеарно, а постоянное перпендикулярно направлению распространения электромагнитной волны: $h_1 = e_3 = 1$; $h_2 = h_3 = e_1 = 0$.

V. Постоянное магнитное поле коллинеарно, а переменное перпендикулярно направлению распространения электромагнитной волны: $h_3 = e_1 = 1$; $h_1 = h_2 = e_3 = 0$.

В работе [3] фактически был проанализирован лишь первый частный случай, тогда как анализ второго — ошибочный. В частности, при «выключении» переменного магнитного поля при поперечном распространении отсутствует соответствие со статическим случаем. Ошибка в том, что условие совместности уравнений Максвелла, записанное для случая продольного распространения, используется в работе [3] и в случае поперечного распространения.

Для частных случаев из формулы (15) получим

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{I}}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_n D_n}\begin{bmatrix} \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) & -\tilde{z}_n(y_0 - B_n) & 0 \\ \tilde{z}_n(y_0 - B_n) & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) & 0 \\ 0 & 0 & (\tilde{z}_n + C_n)^2 + (y_0 - B_n)^2 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{II}}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_n D_n}\begin{bmatrix} (\tilde{z}_n + C_n)^2 + (y_0 - B_n)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) & -\tilde{z}_n(y_0 - B_n) \\ 0 & \tilde{z}_n(y_0 - B_n) & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{III}}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_n P_n}\begin{bmatrix} (\tilde{z}_n + C_n)(\tilde{z}_n + A_n) & 0 & y_0(\tilde{z}_n + C_n) \\ 0 & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + A_n) + y_0^2 & 0 \\ -y_0(\tilde{z}_n + C_n) & 0 & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{IV}}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_n P_n}\begin{bmatrix} (\tilde{z}_n + C_n)(\tilde{z}_n + A_n) & -y_0(\tilde{z}_n + C_n) & 0 \\ y_0(\tilde{z}_n + C_n) & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + A_n) + y_0^2 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{V}}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_n P_n}\begin{bmatrix} \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + A_n) + y_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{z}_n(\tilde{z}_n + C_n) & -y_0(\tilde{z}_n + C_n) \\ 0 & y_0(\tilde{z}_n + C_n) & (\tilde{z}_n + C_n)(\tilde{z}_n + A_n) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$A_n = A_n' + iA_n'' = \frac{1}{4} y_1^2 \sum_{s=\pm 1} \frac{\Gamma - i(1 + s\gamma_n)}{(1 + s\gamma_n)^2 + \Gamma^2};$$

$$B_n = B_n' + iB_n'' = \frac{1}{4} y_1^2 y_0 \times$$

$$\times \sum_{s=\pm 1} \frac{y_0^2 - (1 + s\gamma_n)^2 - 2i\Gamma(1 + s\gamma_n)}{[y_0^2 - (1 + s\gamma_n)^2 + \Gamma^2]^2 + 4\Gamma^2(1 + s\gamma_n)^2};$$

$$C_n = C_n' + iC_n'' = \frac{1}{4} y_1^2 \times$$

$$\times \sum_{s=\pm 1} \frac{\Gamma[y_0^2 + (1 + s\gamma_n)^2] + i(1 + s\gamma_n)[y_0^2 - (1 + s\gamma_n)^2]}{[y_0^2 - (1 + s\gamma_n)^2 + \Gamma^2]^2 + 4\Gamma^2(1 + s\gamma_n)^2}.$$

$$D_n = D_n' + iD_n'' = \tilde{z}_n[(\tilde{z}_n + C_n)^2 + (y_0 - B_n)^2];$$

$$P_n = P_n' + iP_n'' = (\tilde{z}_n + C_n)[\tilde{z}_n(\tilde{z}_n + A_n) + y_0^2];$$

$$\tilde{z}_n = i + \Gamma;$$

где в свою очередь $\Gamma = \nu / \omega_n$; $\gamma_n = \Omega / \omega_n$; $y_{0,1} = \omega_{0,1} / \omega_n$; $x_n = \sqrt{4\pi}\omega_p^2 / \omega_n$; $\tilde{z}_n = z_n / \omega_n$.

Заметим, что матрицы $\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{I}}(\omega)$, $\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{II}}(\omega)$ связаны между собой унитарным преобразованием, равно как и матрицы

$$\hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{III}}(\omega), \quad \hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{IV}}(\omega), \quad \hat{\sigma}_{nn}^{\mathrm{V}}(\omega).$$

5. Определим комплексный показатель преломления. В силу громоздкости окончательных формул приведем лишь приближенные результаты, справедливые в случае, когда $|n_n'(\omega)| \gg |n_n''(\omega)|$.

I. Для левополяризованной волны (верхний знак) и для правополяризованной волны (нижний знак) получим

$$n_{n\pm}'(\omega) = \left[1 - \frac{x_n^2}{1 + C_n'' \pm (y_0 - B_n')}\right]^{1/2}, \tag{25}$$

$$n_{n\pm}''(\omega) = \frac{x_n^2}{2n'_{n\pm}(\omega)} \frac{\Gamma + C_n' \pm B_n''}{[1 + C_n'' \pm (y_0 - B_n')]^2}. \tag{26}$$

II. Для левополяризованной волны

$$n_{n+}'(\omega) = (1 - x_n^2)^{1/2}, \tag{27}$$

$$n_{n+}''(\omega) = \frac{x_n^2 \Gamma}{2(1 - x_n^2)^{1/2}} \tag{28}$$

для правополяризованной волны

$$n_{n-}'(\omega) = \left[1 - x_n^2 \frac{x_n^2 - (1 + C_n'')}{D_n'' + x_n^2(1 + C_n'')}\right]^{1/2}, \tag{29}$$

$$n_{n-}''(\omega) = \frac{x_n^2}{2n_{n-}'(\omega)} \frac{(D_n' - \Gamma D_n'')(x_n^2 - 1 - C_n'') + (x_n^4 + D_n'')(C_n' + \Gamma)}{[D_n'' + x_n^2(1 + C_n'')]^2}. \tag{30}$$

III. Для левополяризованной волны

$$n_{n+}'(\omega) = \left[1 - \frac{x_n^2}{1 + C_n''}\right]^{1/2}, \tag{31}$$

$$n_{n+}''(\omega) = \frac{x_n^2}{2n_{n+}'(\omega)} \frac{\Gamma + C_n'}{(1 + C_n'')^2} \tag{32}$$

для правополяризованной волны

$$n_{n-}'(\omega) = \left[1 - x_n^2 \frac{x_n^2 - 1 - A_n''}{y_0^2 + x_n^2 - 1 - A_n''}\right]^{1/2}, \tag{33}$$

$$n_{n-}''(\omega) = \frac{x_n^2}{2n_{n-}'(\omega)} \frac{\Gamma(x_n^2 - 1 - A_n'') + y_0^2(\Gamma + A_n')}{[y_0^2 + x_n^2 - 1 - A_n'']^2}. \tag{34}$$

IV. Для левополяризованной волны $n_{n+}'(\omega)$, $n_{n+}''(\omega)$ определяются формулами (31) и (32). Для правополяризованной волны имеем

$$n_{n-}'(\omega) = \left[1 - x_n^2 \frac{x_n^2 - 1}{y_0^2 + (x_n^2 - 1)(1 + A_n'')}\right]^{1/2}, \tag{35}$$

$$n_{n-}''(\omega) = \frac{x_n^2}{2n_{n-}'(\omega)} \frac{(x_n^2 - 1)(\Gamma + A_n') + y_0^2\Gamma}{[y_0^2 + (x_n^2 - 1)(1 + A_n'')]^2} \tag{36}$$

V. Для левополяризованной и правополяризованной волн получим

$$n_{n\pm}'(\omega)=\left[1-\frac{1}{2}x_n^2\frac{2+A_n''\pm\sqrt{(A_n'')^2+4y_0^2}}{1+A_n''-y_0^2}\right]^{1/2}, \tag{37}$$

$$n_{n\pm}''(\omega)=\frac{x_n^2}{4n_{n\pm}'(\omega)(y_0^2-1-A_n'')}\left\{A_n'+2\Gamma\pm\frac{A_n'A_n''}{2[(A_n'')^2+4y_0^2]^{1/2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(2+A_n'')\Gamma+A_n'}{y_0^2-1-A_n''}(2+A_n''\pm[(A_n'')^2+4y_0^2]^{1/2})\right\}. \tag{38}$$

Заметим, что при «выключении» переменного магнитного поля формулы (25)—(38) переходят в формулы, соответствующие статическому случаю [8].

6. Приступим к анализу рассматриваемых частных случаев. Резонансы осуществляются при условиях

I. $\omega=\mp\omega_0+n\Omega,\ n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots$ (39)

$$\omega=\mp\omega_0\pm\left[\Omega^2+\frac{1}{2}\omega_1^2\right]^{1/2}+n\Omega \tag{40}$$

(в соответствующем статическом случае резонанс наступает при условии $\omega=\mp\omega_0$).

II. Левополяризованная волна резонансов не имеет, правополяризованная имеет резонансы при условии

$$y_0^2+x_n^2-1=$$
$$=y_1^2\frac{(y_0^2-1)\left(y_0^2+1-\gamma_n^2-\frac{1}{4}y_1^2-\frac{1}{2}x_n^2\right)+\frac{1}{2}x_n^2\gamma_n^2}{[(y_0^2-1)^2-\gamma_n^2][(y_0^2+1)^2-\gamma_n^2]}. \tag{41}$$

В соответствующем статическом случае резонанс имеет место, если

$$\omega^2=\omega_p^2+\omega_0^2 \tag{42}$$

(гибридный резонанс). В частности, при $\omega_1,\ \omega_0,\ \Omega\ll\omega_n$ из формулы (41) приближенно получим с точностью до членов первого порядка

$$y_0^2+x_n^2-1=y_1^2\left(\frac{1}{2}x_n^2-1\right). \tag{43}$$

Это уравнение указывает на существование четырех резонансных точек, расположенных симметрично относительно точки $\omega=0$. В общем же случае, как следует из уравнения (41), число резонансов может оказаться равным десяти.

III. Для левополяризованной волны имеются четыре точки резонанса

$$\omega_n^2=\omega_0^2+\Omega^2+\frac{1}{4}\omega_1^2\pm\frac{1}{2}\left[16\omega_0^2\Omega^2+\frac{1}{4}\omega_1^4\right]^{1/2}. \tag{44}$$

В отсутствие переменного магнитного поля этих резонансов нет (в формулах (31), (32) $C_n=0$). Для правополяризованной волны резонанс наступает при условии

$$\omega_n^2=\frac{1}{2}\left(\omega_0^2+\omega_p^2+\Omega^2+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)\pm$$
$$\pm\frac{1}{2}\left[\left(\omega_0^2+\omega_p^2+\Omega^2+\frac{1}{2}\omega_1^2\right)^2-4\Omega^2(\omega_0^2+\omega_p^2)\right]^{1/2} \tag{45}$$

(четыре резонансные точки). В статическом случае имеет место гибридный резонанс на частотах (42).

IV. Условие резонанса для правополяризованной волны

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_0^2 + \omega_p^2 + \Omega^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\left[\left(\omega_0^2 + \omega_p^2 - \Omega^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2\right)^2 + 2\omega_0^2\omega_1^2\right]^{1/2} \qquad (46)$$

(четыре резонансные точки). В статическом случае имеет место гибридный резонанс (42). Для левополяризованной волны условие резонанса совпадает с условием резонанса для левополяризованной волны третьего случая.

V. Условия резонанса для лево- и правополяризованной волн совпадают и имеют вид

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_0^2 + \Omega^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right) \pm \frac{1}{2}\left[\left(\omega_0^2 + \Omega^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right)^2 - 4\omega_0^2\Omega^2\right]^{1/2} \qquad (47)$$

(четыре резонансные точки). В соответствующем статическом случае имеются две резонансные точки $\omega = \mp\omega_0$.

Большинство приведенных здесь условий существования резонансов явно зависят от амплитуды переменного магнитного поля (аналогичный результат получается и исходя из теории возмущения). Для объяснения этого эффекта удобно воспользоваться аналогией с резонансов в колебательном контуре при наличии внешней вынуждающей силы с изменяющейся по периодическому закону частотой. Как известно, при воздействии на резонансную систему внешней э.д.с. с периодически меняющейся частотой, т. е. $\omega(t) = a\cos bt$, резонансная кривая последней приобретает осциллирующий характер. При этом положение максимумов на кривой — функция резонансной частоты и параметров a и b. В рассматриваемом случае в качестве резонансной частоты контура можно считать циклотронную частоту ω_0 параметрами a и b — ω_1 и Ω соответственно.

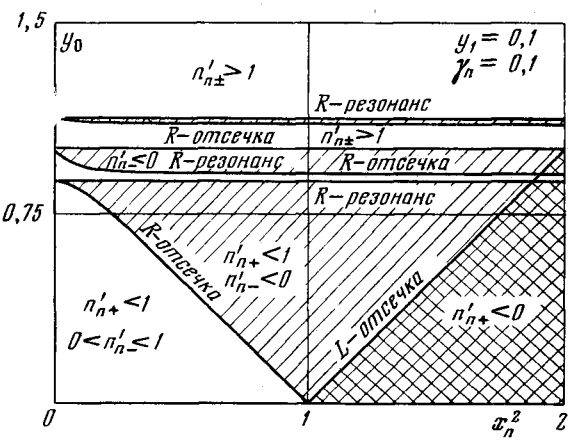

Рис. 1. Характерные области при распространении волн с круговой поляризацией (продольное распространение). Заштрихованные участки — области отсечки. Соударения отсутствуют. Индексы: L соответствует левополяризованной волне, R — правополяризованной

Запишем условия отсечки сигнала.

I. Для лево- и правополяризованной волн отсечка сигнала наступает при условиях

$$x_n^2 = (1 \pm y_0)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{(1 \pm y_0)^2 - \gamma_n^2}\right]. \qquad (48)$$

В соответствующем статическом случае отсечка наступает при условии

$$x_n^2 = 1 \pm y_0 \qquad (49)$$

(одна область непрозрачности для каждой волны определенной поляризации). При включении переменного магнитного поля для лево- и правополяризованной волн возникают дополнительные области непрозрачности (рис. 1).

II. Для левополяризованной волны отсечка наступает при условии $\omega_n = \omega_p$ (в статическом случае $\omega = \omega_p$). Условия отсечки сигнала для правополяризованной волны имеют вид

$$x_n^2 = (1 \pm y_0)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{(1 \pm y_0)^2 - \gamma_n^2}\right]. \tag{50}$$

В статическом случае эти условия переходят в условия (49), определяющие две области непрозрачности. При наличии переменного магнитного поля появляются еще две области непрозрачности.

III. Для левополяризованной волны условие отсечки имеет вид

$$x_n^2 = 1 + \frac{1}{2} y_1^2 \frac{y_0^2 - 1 + \gamma_n^2}{(y_0^2 - 1 - \gamma_n^2)^2 - 4\gamma_n^2}. \tag{51}$$

В статическом случае имеется одна область непрозрачности, определяемая условием $\omega = \pm\omega_p$. При включении переменного магнитного поля возникают еще две области непрозрачности. Для правополяризованной волны отсечка наступает при условии

$$y_0^2 = (1 - x_n^2)\left(1 - x_n^2 - \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{1 - \gamma_n^2}\right). \tag{52}$$

В статическом случае имеются две области непрозрачности, определяемые условиями (49). При наличии переменного магнитного поля имеются три области непрозрачности.

IV. Для этого случая условия отсечки сигнала для лево- и правополяризованной волн совпадают с соответствующими условиями для третьего случая.

V. Условия отсечки для лево- и правополяризованных волн имеют вид

$$1 - y_0^2 = \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{1 - \gamma_n^2} + x_n^2\left(1 - \frac{1}{4}\frac{y_1^2}{1 - \gamma_n^2} \pm \right.$$
$$\left. \pm \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\frac{y_1^4}{(1 - \gamma_n^2)^2} + 4y_0^2\right]^{1/2}\right). \tag{53}$$

В статическом случае эти условия переходят в условия (49). Следовательно, в этом случае для каждой волны определенной поляризации имеется одна область непрозрачности. При включении переменного магнитного поля добавляются еще области непрозрачности.

В работах [1, 3] показано, что в случае продольного распространения введением переменной составляющей внешнего магнитного поля удается «просветлить» большой объем плазмы. Обсудим условия прозрачности ($n_n'(\omega) = 1, n_n''(\omega) = 0$) в рассматриваемых частных случаях. При этом следует отметить, что для обнаружения точек прозрачности необходимо пользоваться «точными» формулами, определяющими комплексный показатель преломления. Последние следуют из соотношений (17), (19)—(24), при этом членами порядка ν^2 не пренебрегают, поскольку такое приближение делает формулы (25)—(38) непригодными для описания поведения комплексного показателя преломления в окрестностях резонансных точек.

I. Из «точных» формул следует, что в случае продольного распределения прозрачность для волн обеих поляризаций осуществляется на частотах, отличающихся от частот (39) на величины порядка ν.

II. Из формул (27), (28) следует, что левополяризованная волна не имеет «окон прозрачности». Для правополяризованной волны прозрачность

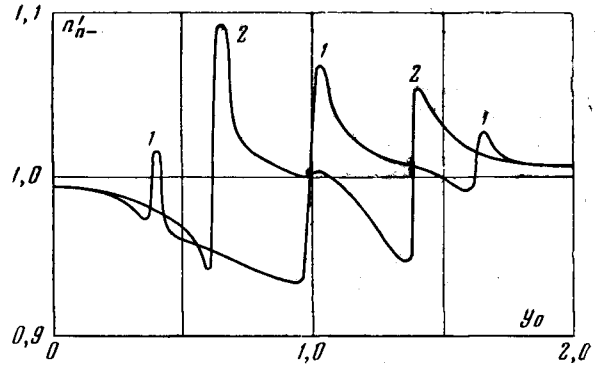

Рис. 2. Зависимость показателя преломления $n_{n-}'(\omega)$ от приведенной циклотронной частоты постоянного магнитного поля, при $\Gamma = 10^{-2}$, $y_1 = 0{,}5$, $x_n = 0{,}1$:

1 — $\gamma_n = 0{,}5$; 2 — $\gamma_n = 10^{-2}$ (случай I)

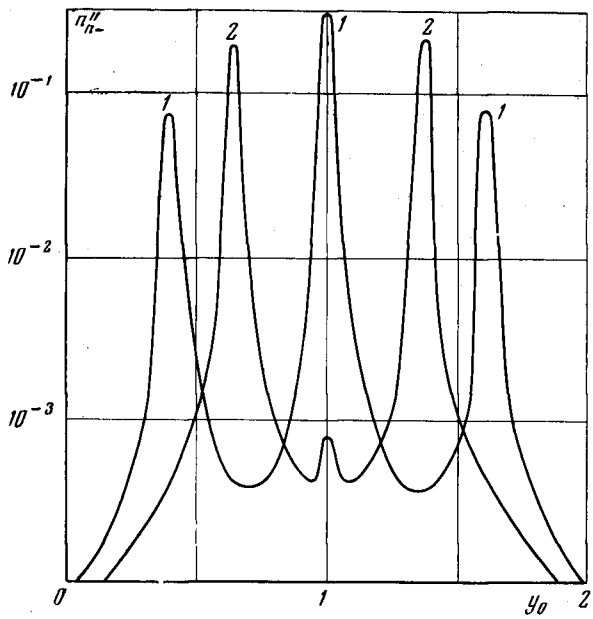

Рис. 3. Зависимость коэффициента поглощения $n_n''(\omega)$ от y_0 при $\Gamma = 10^{-2}$, $y_1 = 0{,}5$, $x_n = 0{,}1$:

1 — $\gamma_n = 0{,}5$; 2 — $\gamma_n = 10^{-2}$ (случай I)

осуществляется и на частотах (39), и на частотах, определяемых уравнениями

$$x_n^2 = \frac{1}{2} y_1^2 \frac{y_0^2 - 1 + \gamma_n^2 \pm (y_0^2 - 1 - \gamma_n^2)}{(y_0^2 - 1 - \gamma_n^2)^2 - 4\gamma_n^2}. \tag{54}$$

III—IV. Для левополяризованной волны прозрачность наступает на частотах (39), для правополяризованной волны «окон прозрачности» нет.

V. Для волн обеих поляризаций прозрачность наступает при условии

$$y_1^2(1 + \gamma_n^2) = 4(1 - \gamma_n^2)(2\gamma_n^2 \pm [2(1 + \gamma_n^4)]^{1/2}). \tag{55}$$

Заметим, что во всех случаях «просветление» плазмы становится возможным лишь в результате наложения переменной составляющей магнитного поля.

На рис. 1 приведены характерные области при распространении волн с круговой поляризацией вдоль направления магнитного поля (первый случай).

Как указывалось выше, наличие переменной составляющей магнитного поля приводит к появлению дополнительных резонансных точек и областям отсечки сигнала, причем «ширина» области непрозрачности зависит от величины y_1 и γ_n. На рис. 2 и 3 показана зависимость $n_{n-}'(\omega)$ и $n_{n-}''(\omega)$ от приведенной циклотронной частоты постоянного магнитного поля. Видно, что при уменьшении γ_n наблюдается «просветление» плазмы ($n_{n-}' \to 1$; $n_{n-}'' \to 0$) только на частотах, определяемых соотношением (39). Кривые на этих графиках соответствуют падающему излучению миллиметрового диапазона длин волн, частоте переменной составляющей магнитного поля 20—600 *Мгц* и плотности электронов $10^{10} - 10^{12}$ *см*$^{-3}$.

Авторы выражают благодарность Л. И. Баранову за обсуждение данной работы.

Институт механики и физики
Саратов

Поступила в редакцию
4 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. В. Бункин. Ж. эксперим. и теор. физ., 41, 1859, 1961.
2. В. Н. Луговой. Ж. эксперим. и теор. физ., 41, 1562, 1961.
3. В. Н. Луговой. Известия вузов, Радиофизика, 5, № 5, 1962.
4. В. Н. Луговой. Известия вузов, Радиофизика, 6, № 4, 1963.
5. Ф. Т. Васько, И. М. Дыкман. Физика твердого тела, 11, 3343, 1969.
6. В. А. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. «Наука», 1967.
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
8. М. Хилд, С. Уортон. Микроволновая диагностика плазмы. Атомиздат, 1968.