

$$\lambda_t(F; b) = \lambda_t(F; -\infty, b), \Delta(F; b) = F(b) - \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right);$$

$$\Lambda(Y) = -\sum_1^n (\lambda_1(F_j; y_j) \wedge 0), D(Y) = \sum_1^n (\Delta(F_j; y_j) \vee 0),$$

$$K_t(0, Y) = \sum_1^n \kappa_t(F_j; 0, y_j), K_t(Y) = \sum_1^n \kappa_t(F_j; y_j).$$

Теорема 4. Для любых чисел $x > 0, y > \max_{1 \leq j \leq n} y_j, 0 < \alpha < 1, t > 0$

$$P(S \geq x) < \sum_1^n P(X_j \geq y_j) + \exp\{\beta x/c_0 y - (\alpha x - \Lambda(Y))^2/4B_1^2(Y)\} + \\ + e^{\beta x/c_0 y} ((c_0 y/\beta x)(D(Y) + K_{t+1}(0, Y)/y^{t+1}))^{\beta x/c_0 y}, \quad (6)$$

где $B_1^2(Y) = B^2/2 + e^t K_2(Y), c_0 = 1 + 1/e, \beta = 1 - \alpha$.

Неравенство (6) усиливает результаты Эбралидзе [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01529).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kolmogoroff A. Über das Gesetz des iterierten Logarithmus//Math. Ann. 1929. 101, 126—135.
2. Statulevicius V. A. On large deviations//Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1966. 6, N 2. 133—144.
3. Архангельский А. Н. Нижние оценки для вероятностей больших отклонений сумм независимых случайных величин//Теория вероятн. и ее примен. 1989. 34, вып. 4. 625—655.
4. Фук Д. X., Нагаев С. В. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин//Теория вероятн. и ее примен. 1971. 16, вып. 4. 660—675.
5. Nagayev S. V. On a new approach to the study of the distribution of a norm of a random element in Hilbert space//Probab. Theory and Mathematical Statistics: Proceeding of the Fifth Vilnius Conference. Vilnius, Lithuania, 1990. 214—226.
6. Pinelis I. Optimum bounds for the distributions of martingales in Banach spaces//Ann. Probab. 1994. 22. 1679—1706.
7. Эбралидзе Ш. С. Неравенства для вероятностей больших отклонений в многомерном случае//Теория вероятн. и ее примен. 1971. 16, вып. 4. 755—759.

УДК 531.36

Ю. М. Окунев, В. А. Садовничий, В. А. Самсонов, Г. Г. Черный

КОМПЛЕКС МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

Исследование пространственных движений тел сложной формы в сопротивляющейся среде является практически важной и в то же время весьма трудной задачей.

Аналитические методы не обеспечивают возможность расчета характеристик таких движений в необходимом диапазоне определяющих параметров даже при наиболее простых законах динамического воздействия среды на тело.

Это обусловлено в первую очередь высоким порядком, нелинейностью и нестационарностью соответствующей динамической системы, ее «жесткостью», а также многопараметричностью задачи. Кроме того, в достаточно полных моделях динамического воздействия среды используются экспериментальные данные, представленные в виде таблиц.

В то же время совмещение качественных подходов и аналитических, численно-аналитических методов, объединенных в специализированную систему математического моделирования на ЭВМ с хорошо развитой графикой, включая мультипликацию, позволяет в ряде случаев довести решение задачи до конкретных выводов и технических рекомендаций [1—4].

С помощью этой системы моделирования для пространственной задачи внешней баллистики тела сложной аэродинамической формы получены следующие результаты: определены характеристики движения; выяснена структура фазового пространства при различных силовомоментных характеристиках; дан анализ динамической устойчивости; построены области притяжения асимптотически устойчивых решений; расширены эти области за счет гироскопической стабилизации; изучены факторы, влияющие на рассеивание траекторий; проведен параметрический (по конструктивным параметрам) синтез аэродинамических характеристик с целью получения движения с требуемыми свойствами; выявлены особенности движения тела вокруг центра масс при наличии динамической асимметрии при линейном и нелинейном характере аэродинамического воздействия.

Результаты моделирования визуализируются различными способами: на конфигурационной плоскости (α, β) и в трехмерном фазовом пространстве (α, β, Ω) ; на сфере Пуассона, а также с использованием скоростного $C_1 C_2 C_3$ и связанного $S_1 S_2 S_3$ трехгранников (рис. 1—3).

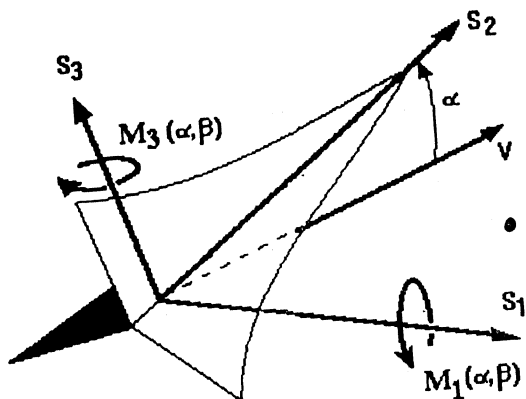


Рис. 1

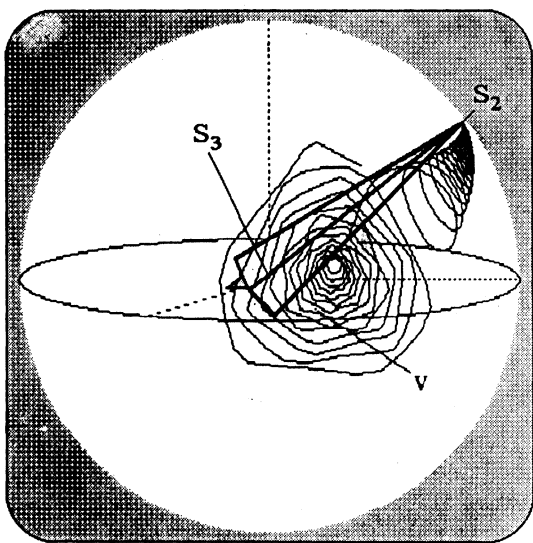


Рис. 2. Представление траектории на сфере Пуассона

При исследовании фазового пространства модельных динамических систем, описывающих задачу с различной точностью, применялся аппарат теории ветвления стационарных движений. Параметрический анализ позволил установить связь структуры модели аэродинамических сил с конфигурацией области устойчивости в пространстве параметров объекта. Выявление этой связи подсказывает перспективные направления для проектирования нетрадиционных натурных экспериментов.

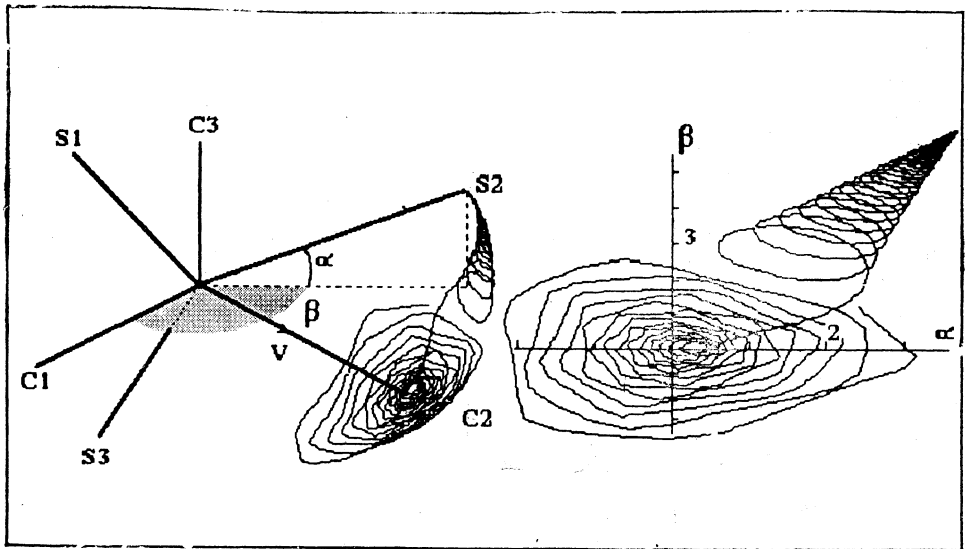


Рис. 3. Представление траектории модельной динамической системы на плоскости (α, β) и с использованием скоростного $C_1C_2C_3$ и связанного $S_1S_2S_3$ трехгранников

В процессе математического моделирования для объектов определенного класса установлен ряд новых особенностей их движения около центра масс в свободном полете.

I. Исследовано нестационарное движение относительно центра масс динамически симметричного тела пространственной аэродинамической формы с высокими несущими свойствами (достаточно большими значениями производной аэродинамического качества) при квадратичном законе сопротивления среды. В рамках линеаризованной модели аэродинамического воздействия, не содержащей «вращательных» производных (демпфирующих моментов), аналитически найдены ограничения на аэродинамические коэффициенты, которые обеспечивают демпфирование угловых колебаний тела [3]; в частности, показано демпфирующее влияние подъемной силы. Таким образом, эта модель аэродинамического воздействия позволяет в данном случае с качественной точки зрения адекватно описывать особенности динамики таких тел. Для линеаризованных по части переменных уравнений плоскопараллельного движения (с нулевым углом скольжения) при нелинейном восстанавливающем моменте построены области динамической устойчивости. Исследована их структура в зависимости от определяющих параметров. При несимметричном восстанавливающем моменте, отвечающем пространственной форме, не имеющей осевой симметрии, область статической устойчивости (по углу атаки) шире области динами-

ческой устойчивости. В случае симметричного момента, каким является восстанавливающий момент у пространственных форм с осевой симметрией, области статической и динамической устойчивости совпадают.

При условии, что воздействие на тело аэродинамических сил существенно превосходит силу тяжести, получено аналитическое решение модельной линеаризованной по части переменных динамической системы, описывающей движение относительно центра масс.

Установлена аналогия движения тела около центра масс в свободном полете и возмущенного движения гироскопа Фуко. Проведена полная классификация траекторий на изображающей плоскости (α, β) и указаны семь возможных типов движения тела около центра масс.

При нестационарном движении центра масс тела установлен факт смены знака угловой скорости прецессии продольной оси тела вокруг вектора путевой скорости V , если начальная угловая скорость $\omega_2(0)$ закрутки тела вокруг продольной оси меньше некоторого критического значения $\omega^{кр}$. Определена зависимость $\omega^{кр}$ от аэродинамических параметров и начального значения скорости V . Найден момент времени смены знака, зависящий от начального значения угловой скорости закрутки и названных выше параметров. При стационарном движении центра масс тела указанный эффект отсутствует.

И. Исследована нестационарная задача динамики углового движения тела в свободном полете при наличии динамической асимметрии. Рассматривался линейный характер аэродинамического воздействия. В качестве меры динамической асимметрии принималась величина $J = (J_{12}/J_0)^2 + (J_{23}/J_0)^2$, где J_{12}, J_{23} — недиагональные элементы тензора инерции, а $J_0 = J_{11} = J_{33}$ — экваториальный момент инерции.

Проведен параметрический анализ модельной динамической системы по параметру J и параметру n — отношению коэффициента подъемной силы к удвоенному коэффициенту лобового сопротивления ($n = c_2/2c_1$).

Определена структура множества стационарных точек, исследованы возможные типы траекторий, включая критические многообразия, резонансные режимы, периодические движения. Показано, что при фиксированных значениях аэродинамических параметров множество стационарных точек зависит от параметра J . Если J не превосходит некоторого критического значения J^* , то существует только тривиальная стационарная точка. При $J > J^*$ система имеет пять стационарных точек, включая тривиальную.

Если $J > J^*$, то можно найти значение n^* параметра n , такое, что при $n > n^*$ продольная ось тела совершает в возмущенном движении затухающие колебания около положения, определяемого стационарными значениями углов атаки и скольжения. При $n < n^*$ амплитуда колебаний пространственного угла атаки возрастает. При $n = n^*$ в зависимости от начального значения угловой скорости закрутки тела возможны две ситуации: либо траектории стремятся к некоторым «предельным» многообразиям SG , либо устанавливается периодическое движение (рис. 4).

В случае $n = n^*$ конфигурационное пространство было параметризовано с помощью величины начального значения угловой скорости закрутки. Проанализирован широкий диапазон изменения этого параметра. Установлены критические значения параметра, разбивающие числовую прямую на интервалы, внутри которых система либо выходит на установившееся периодическое движение, либо оказывается асимптотически устойчивой по отношению к пространственному углу атаки $\chi = \alpha + i\beta$. Для первого случая в зависимости от начальной угловой скорости закрутки тела в конфигурационном пространстве углов атаки,

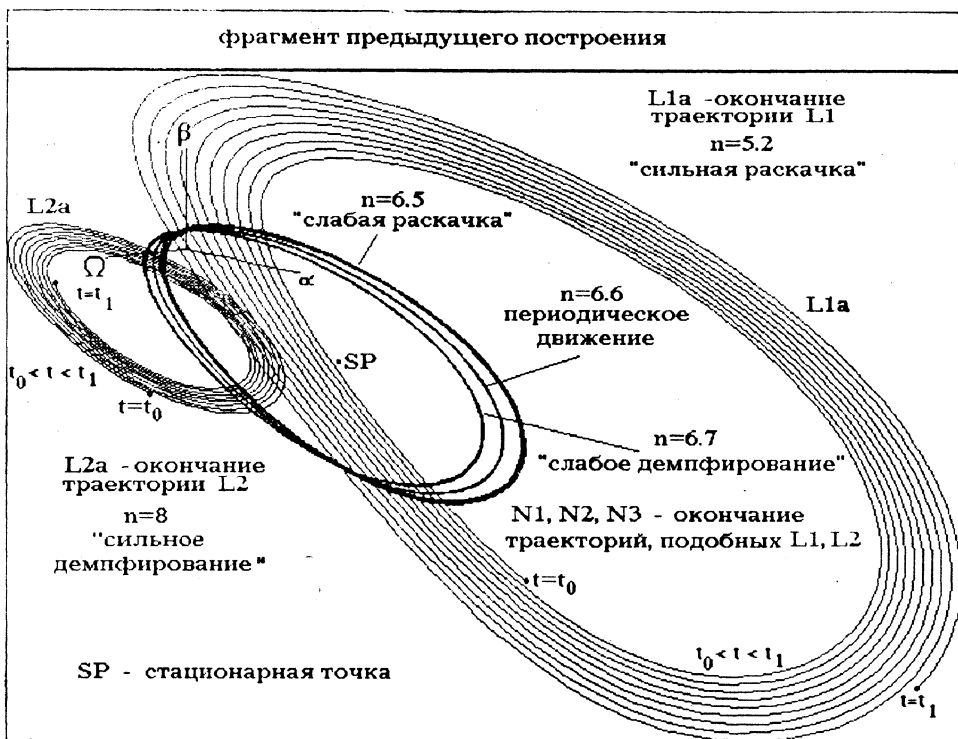
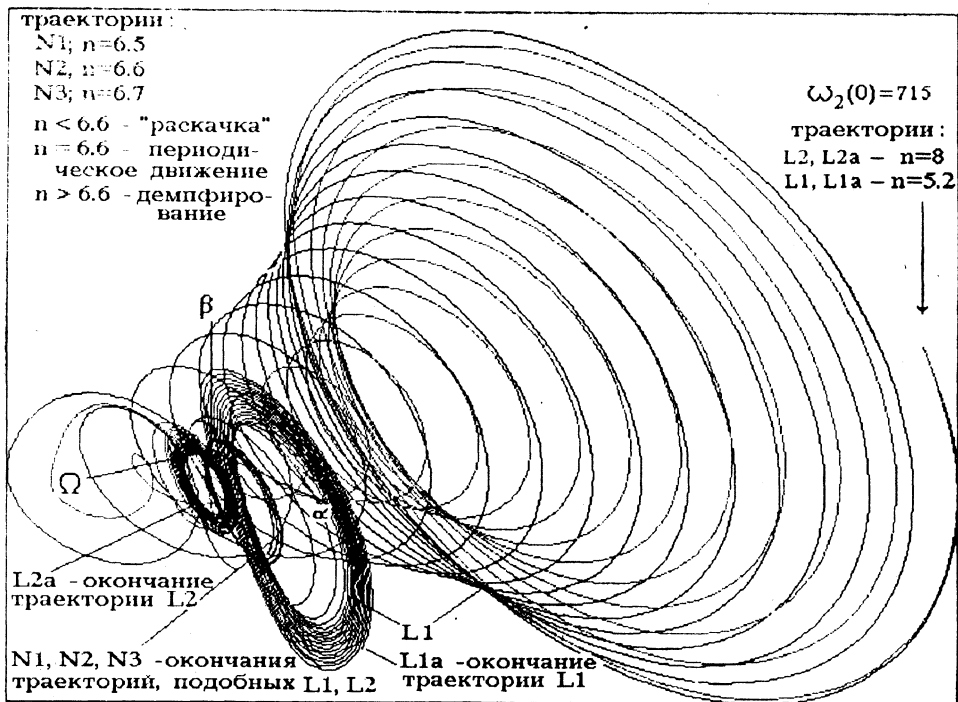


Рис. 4. Трехмерные в пространстве (α, β, Ω) проекции траекторий динамической системы, отвечающие различным значениям параметра $n=C_2/2C_1$, но с одинаковыми начальными значениями вектора состояния системы

скольжения и приведенной угловой скорости $\Omega_2 = \omega_2/V$ дано описание семейства периодических движений, состоящего из циклов двух типов. Эти циклы назовем циклами максимальной и минимальной амплитуд. Циклы чередуются при уменьшении $\omega_2(0)$. При этом циклы максимальной амплитуды монотонно сжимаются, стремясь к определенному пределу, а циклы минимальной амплитуды сначала монотонно сжимаются, а затем начинают расширяться, стремясь к тому же пределу, что и циклы максимальной амплитуды.

Установленная топология конфигурационного пространства отражена в трехмерных портретах траекторий изучаемой динамической системы (рис. 5). Тем самым определены: область значений аэродинамиче-

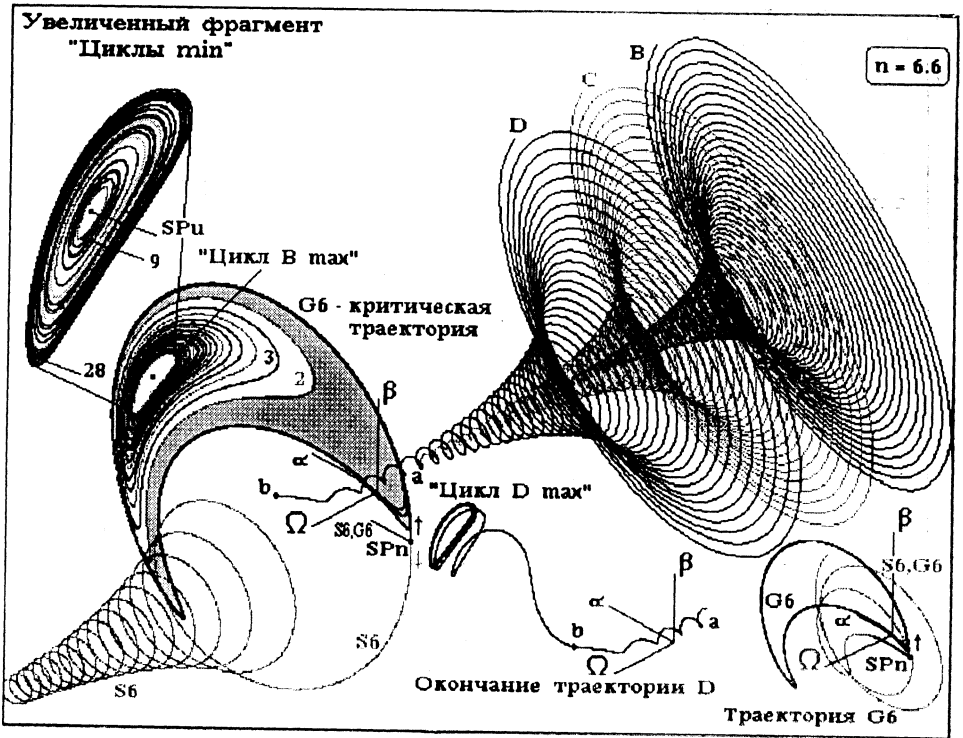


Рис. 5. В пространстве (α, β, Ω) представлено множество траекторий, отвечающих установившимся периодическим движениям с максимальными и минимальными амплитудами $300 \leq \omega_2(0) \leq WG_6$; $t_1 < t \leq T_i$. При $0 < t < t_i$ траектории развиваются подобно кривым B, C, D . Для траекторий 9—28 циклов $\min \omega_2(0)$ принимает значения: 769, 755, 740, 727, 714, 690, 668, 648, 638, 629, 611, 602, 586, 563, 535, 498, 481, 449, 400, 300. Для траекторий 1—28 циклов $\max \omega_2(0)$ принимает значения: WG_6 , 924, 896, 871, 850, 826, 810, 793, 777, 762, 747, 733, 720, 696, 674, 653, 643, 633, 615, 607, 590, 567, 538, 501, 483, 452, 402, 301; WG_6 — критическое значение угловой скорости собственного вращения. Для траекторий B, C, D $\omega_2(0)$ принимает значения: 301, 402, 501

ских параметров, интервал мер динамической асимметрии и интервалы значений $\omega_2(0)$, в которых в процессе движения возникают явления, подобные параметрическому резонансу.

Показано, что при $J > J^*$ и $n > n^*$ две из пяти стационарных точек фазового пространства асимптотически устойчивы, а три неустойчивы, при этом тривиальная точка устойчива лишь по части переменных (угол атаки, угол скольжения). Такие движения тела, при которых

пространственный угол атаки остается неизменным, а проекции вектора абсолютной угловой скорости на оси связанного трехгранника $S_1S_2S_3$ изменяются пропорционально скорости полета, соответствуют устойчивым точкам рассматриваемой динамической системы.

Особый интерес представляют фазовые траектории, идущие из окрестности неустойчивой особой точки (рис. 6). Имеются три типа

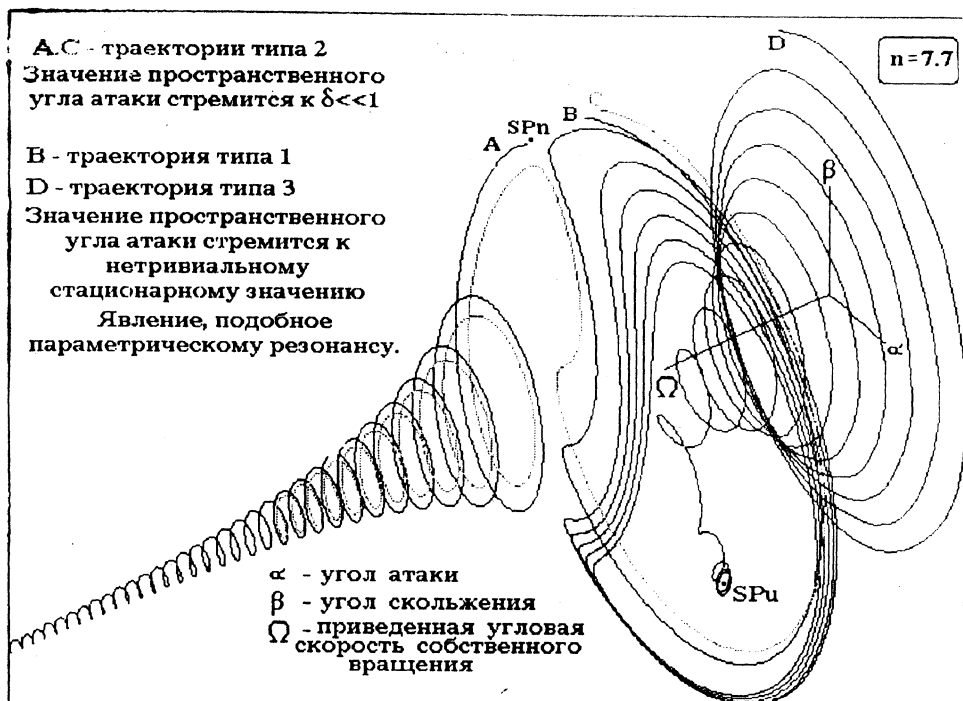


Рис. 6. Проекция траекторий динамической системы в пространстве (α, β, Ω) ; $\omega_2(0)$ принимает значения: 1200, 1106, 1082, 800

траекторий: 1 — траектории, сразу приводящие в окрестность нетривиальной точки, устойчивой по части фазовых переменных: углу атаки, углу скольжения и отвечающим им приведенным угловым скоростям; 2 — траектории, приводящие в окрестность тривиальной стационарной точки, при этом скорость собственного вращения принимает установившееся значение; 3 — траектории, развитие которых на определенном интервале времени не отличается от типа 2, но которые впоследствии переходят в окрестность устойчивой точки подобно траекториям типа 1.

III. Показано также, что некоторые отмеченные выше тенденции развития траекторий модельной динамической системы при $n > n^*$ проявляются и в случае $n < n^*$, но на отдельных временных интервалах развития одной траектории и с той разницей, что нетривиальная стационарная точка становится неустойчивой (рис. 7).

При $n < n^*$ параметризация конфигурационного пространства α, β, Ω с помощью величины начального значения угловой скорости собственного вращения $\omega_2(0)$ позволила определить (как и в случае $n = n^*$) критические значения названного параметра. Эти значения разбивают числовую прямую на некоторые интервалы. При изменении $\omega_2(0)$

внутри этих интервалов имеют место два качественно различных типа траекторий. По аналогии со случаем $n=n^*$ условно назовем их траекториями типа S и типа G .

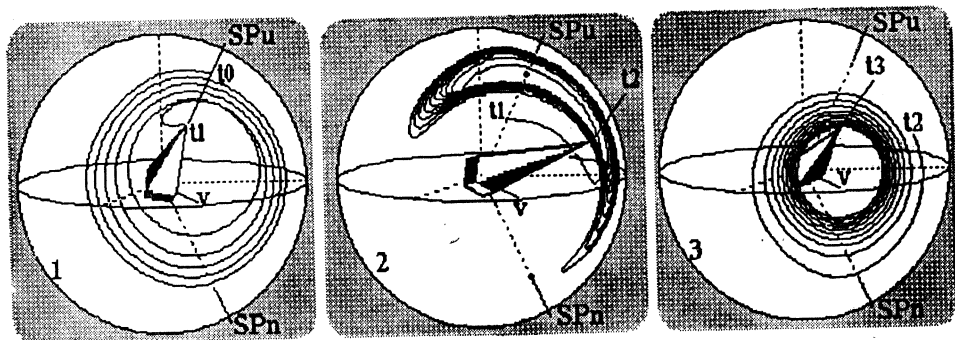


Рис. 7. Представление траекторий на сфере Пуассона. 1. Продольная ось тела прецессирует вокруг вектора скорости V . Угловая скорость прецессии положительна. Амплитуда колебаний пространственного угла атаки убывает; $t_0 < t < t_1$. 2. Продольная ось тела прецессирует вокруг вектора SPu . Угловая скорость прецессии положительна. Амплитуда колебаний пространственного угла атаки возрастает. Резонанс; $t_1 < t < t_2$. 3. Продольная ось тела прецессирует вокруг вектора скорости V . Угловая скорость прецессии отрицательна. Амплитуда колебаний пространственного угла атаки убывает; $t_2 < t < t_3$; $SPu(\alpha, \beta)$ — стационарная устойчивая точка; $SPn(\alpha, \beta)$ — стационарная неустойчивая точка

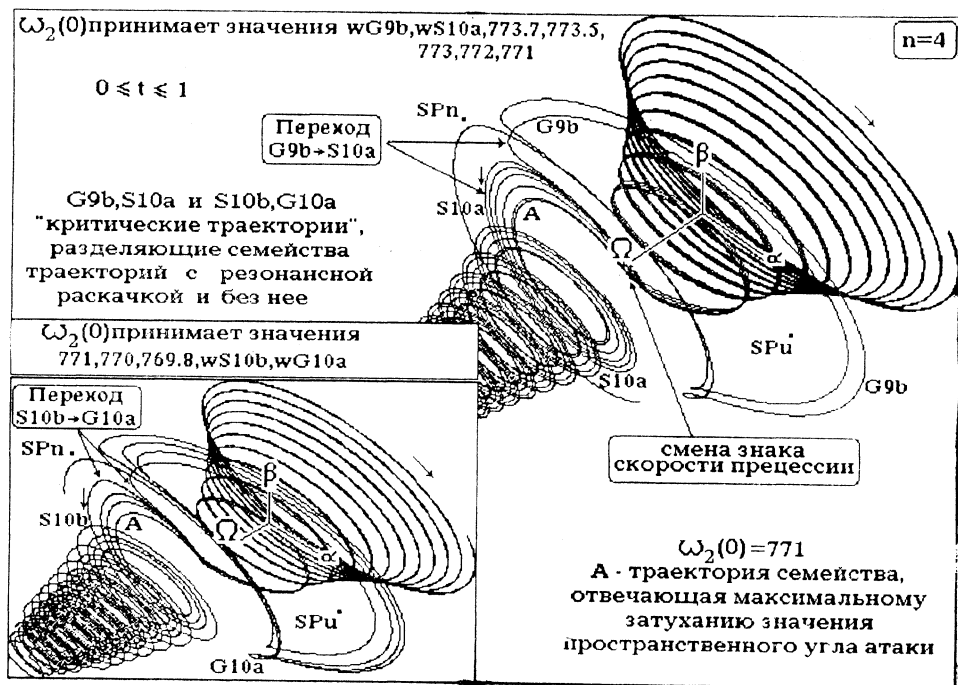


Рис. 8. В пространстве (α, β, Ω) иллюстрируется поведение траекторий динамической системы при изменении значения $\omega_2(0)$ в области $WS10b < \omega_2 < WS10a$

На начальном временном интервале при $0 \leq t < t^*$ (t^* различно для траекторий указанных типов) характер движения по траекториям S , G качественно одинаков. Амплитуда колебаний пространственного угла атаки убывает — происходит начальное демпфирование колебаний.

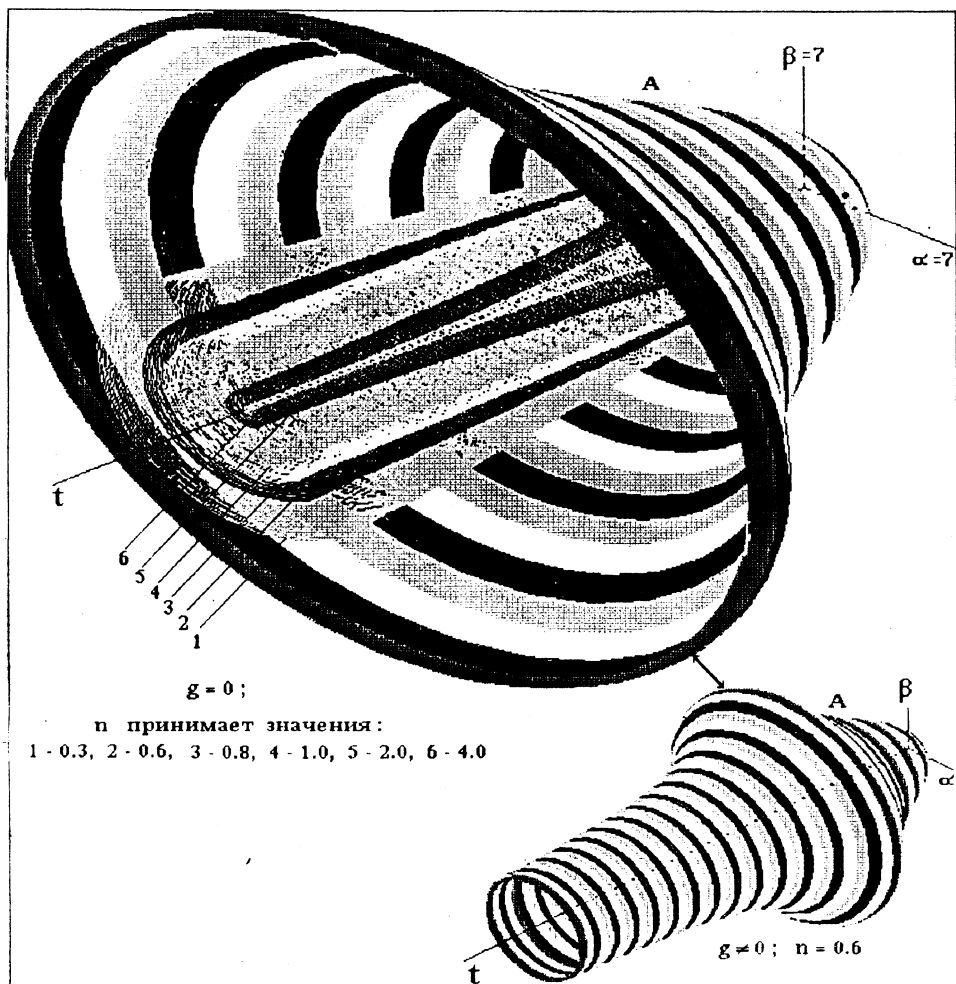


Рис. 9. Диаграмма изменения во времени амплитуды пространственного угла атаки. Варьируется значение параметра n

Различие возникает при $t > t^*$.

Траектории типа S описывают такое движение продольной оси тела, при котором после переходного процесса, сопровождающегося сменой знака угловой скорости прецессии продольной оси тела вокруг вектора путевой скорости, колебания пространственного угла атаки продолжают затухать и устанавливается постоянная угловая скорость собственного вращения.

Траектория типа G характеризует движение, при котором возникает явление, подобное параметрическому резонансу, угол атаки и угол скольжения колеблются около их стационарных значений с нарастающей амплитудой.

Описанные тенденции в развитии траекторий указанных типов иллюстрируются на рис. 8.

IV. Для тела с диагональным тензором инерции в модельной динамической системе, линеаризованной по части переменных, изучена динамика полета с учетом влияния силы тяжести. Необходимость такого исследования очевидна, поскольку на больших интервалах времени по мере уменьшения путевой скорости влияние гравитационных сил становится сравнимым с влиянием сил аэродинамических. Установлено, что при выполнении условия $c_2 > c_1$ пространственный угол атаки сначала растет, а затем уменьшается. Это обстоятельство обусловлено возникновением режима стабилизации путевой скорости и угла наклона траектории.

На малых интервалах времени, когда не требовался учет влияния силы тяжести, эффективное затухание пространственного угла атаки происходило при условии $c_2 > 2c_1$, полученном при анализе упрощенной модельной динамической системы, эквивалентной одному комплексному уравнению второго порядка относительно пространственного угла атаки $\chi = \alpha + i\beta$. Конечно, данный результат следует рассматривать лишь как наводящий, поскольку принятый в модели закон воздействия среды на тело может быть неадекватным при малых скоростях.

Диаграмма изменения амплитуды угла атаки при различных значениях параметра n приведена на рис. 9.

Таким образом, показана эффективность применения метода имитационного моделирования для решения задач динамики полета.

Работа поддержана РФФИ (№ 94-01-01547) и программой «Университеты России» (ММ 8.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. М., 1983.
2. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М., 1992.
3. Окунев Ю. М., Привалов В. А., Самсонов В. А. Некоторые задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Тр. Всесоюз. конф. «Нелинейные явления». М., 1991. 140—144.
4. Окунев Ю. М. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления: Монографический сборник. М., 1983.

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 6

УДК 517.95

Е. Ю. Панов

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть X — пространство симметричных линейных операторов на \mathbf{R}^n или эрмитовых операторов на \mathbf{C}^n , $N = \dim X$. Рассмотрим следующую $N \times N$ -систему квазилинейных законов сохранения:

$$U_t + (\tilde{f}(U))_x = 0, \quad (1)$$

$U = U(t, x) \in X$; $(t, x) \in \Pi = (0, +\infty) \times \mathbf{R}$; $\tilde{f}: X \rightarrow X$, $U \mapsto \tilde{f}(U)$ — функция от оператора U , определенная в соответствии с функциональным исчислением для самосопряженных операторов по некоторой скалярной вещественной функции $f(u) \in C^1(\mathbf{R})$. При сделанном предположении $f(u) \in C^1(\mathbf{R})$ отображение \tilde{f} дифференцируемо на X и дифференциал