



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. Kh. Mamatova, A. R. Hayotov, Kh. M. Shadimetov, Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space $\widetilde{L}_2^m(H)$ of periodic function of n variables by Sobolev method, *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2013, Volume 5, Issue 1, 90–101

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

January 26, 2025, 09:45:20



**ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ
ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ
СОБОЛЕВА $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n
ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ СОБОЛЕВА**

Н.Х. МАМАТОВА, А.Р. ХАЁТОВ, Х.М. ШАДИМЕТОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача построения решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ периодических функций n переменных. Найдены коэффициенты решетчатых оптимальных интерполяционных формул.

Ключевые слова: пространство Соболева, оптимальная интерполяционная формула, свойства дискретного аналога оператора Δ^m , оптимальные коэффициенты.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним определение пространства Соболева $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ периодических функций n переменных.

Пусть функция $\varphi(x)$ периодична с матрицей периодов H :

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где γ — произвольный целочисленный вектор столбец, H — матрица размера $n \times n$ с единичным определителем.

Матрице H сопоставим ее фундаментальный параллелепипед Ω_0 , положив

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = Hy, \text{ где } 0 \leq y_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Предположим, что $2m > n$, и конечен интеграл

$$\int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx,$$

где α — мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$,

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Норма в $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ определяется формулой

$$\|\varphi(x)|_{\widetilde{L}_2^{(m)}(H)}\| = \left[\int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

N.KH. MAMATOVA, A.R. HAYOTOV, KH.M. SHADIMETOV, CONSTRUCTION OF OPTIMAL GRID INTERPOLATION FORMULAS IN SOBOLEV SPACE $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ OF PERIODIC FUNCTION OF n VARIABLES BY SOBOLEV METHOD.

© МАМАТОВА Н.Х., ХАЁТОВ А.Р., ШАДИМЕТОВ Х.М. 2013.

Поступила 20 декабря 2011 г.

Элементами пространства $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ служат функции, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое.

Пространство $L_2^{(m)*}(H)$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице, т.е.

$$(\ell(x), 1) = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^N C_k(x) \varphi(x^{(k)}) \quad (2)$$

в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k(x)$ называем соответственно узлами и коэффициентами интерполяционной формулы (2).

Одной из основных задач теории интерполирования является отыскание максимума погрешности интерполяционной формулы $\varphi(x) \cong P_\varphi(x)$ в функциональных пространствах. Погрешность в некоторой точке z есть значение функционала погрешности на функции φ :

$$\begin{aligned} (\ell(x), \varphi) &\equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \varphi(x^{(k)}) = \\ &= \int_{\Omega_0} \left[\left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \delta(x-x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \right] \varphi(x) dx, \end{aligned} \quad 1$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, $\phi_0(H^{-1}x) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta)$,

$$\ell(x) = \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \delta(x-x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \quad (3)$$

— функционал погрешности интерполяционной формулы.

Переменными параметрами интерполяционной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k(z)$. *Оптимальной интерполяционной формулой* называем такую, функционал погрешности которой при заданных узлах имеет наименьшую по вариациям коэффициентов норму в $\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$, то интерполяционную формулу называем *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, называемый *шагом решетки*.

В настоящей работе построены решетчатые оптимальные интерполяционные формулы в пространстве Соболева $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. Аналогичная задача впервые поставлена и рассмотрена Соболевым [1], где найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(m)}$ функций, у которых производные порядка m интегрируемы с квадратом.

Следует отметить, что решение при $p = 2$ (теорема Холлидея [2]) задачи о минимизации L_p -нормы m -й производной функций, интерполирующих заданные значения y_i в заданных точках x_i , привело к развитию теории сплайнов. В дальнейшем эта задача исследовалась во многих работах в более общей постановке как проблема минимизации функционала при ограничениях (см., например, [3–8]).

Центральным результатом данной работы является следующая

¹Запись интеграла от функции Дирака есть историческая условность: $\int \delta(x-z) \varphi(x) dx \equiv (\delta_z, \varphi) \equiv \varphi(z)$; свертка δ -функций определена как $\delta(x-a) \delta(x-b) = \delta(x-(a+b))$.

Теорема. В пространстве Соболева $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ существует единственная решетчатая оптимальная интерполяционная формула вида (2) с функционалом погрешности (3). Ее коэффициенты определяются формулой

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma) \right),$$

$$\text{где } K(\gamma) = \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t - \gamma)|^{2m}} \right]^{-1}.$$

2. ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в пространстве $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ будем использовать понятие экстремальной функции функционала. Функцию $u(x)$ из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ называют *экстремальной* для данного функционала погрешности $\ell(x)$, если выполняется равенство

$$(\ell(x), u(x)) = \left\| \ell|_{\widetilde{L}_2^{(m)*}(H)} \right\| \left\| u|_{\widetilde{L}_2^{(m)}(H)} \right\|.$$

Пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ – гильбертово, со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_m = \int_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha \varphi(x) D^\alpha \psi(x) dx.$$

По теореме Рисса любой ограниченный функционал $\ell(x)$ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(\ell, \varphi) = \langle \varphi, \psi_\ell \rangle_m \quad (4)$$

для любого $\varphi(x)$ из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$. $\psi_\ell(x)$ – функция из $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$, определенная однозначно по функционалу $\ell(x)$ и экстремальная для него. Интегрируя по частям в смысле теории обобщенных функций выражение в правой части (4) и пользуясь периодичностью функций $\varphi(x)$ и $\psi_\ell(x)$, получим равенство

$$(\ell, \varphi) = (-1)^m \int_{\Omega_0} \Delta^m \overline{\psi_\ell(x)} \varphi(x) dx.$$

Таким образом, функция $\psi_\ell(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m \psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x). \quad (5)$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Явное выражение экстремальной функции функционала погрешности (3) дается формулой

$$\psi_l(x) = (-1)^m \left[B_{2m}(x - z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) + d_0 \right], \quad (6)$$

где d_0 – постоянная, $B_{2m}(x) = (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}x\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}}$ – функция Бернулли-Соболева – периодическое фундаментальное решение оператора Δ^m .

Доказательство. Найдем передическое решение уравнения (5). Применяя к обеим частям (5) преобразование Фурье и пользуясь известными формулами $F[\delta(x-z)] = e^{2\pi i p^* z}$, $F[\phi_0(H^{-1}x)] = \phi_0(H^*p)$ (см. [9]), получим

$$\left[\sum_{j=1}^n (2\pi i p_j)^2 \right]^m F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m \left[e^{-2\pi i p^* z} - \sum_{k=1}^N C_k(z) e^{-2\pi i p^* x^{(k)}} \right] \phi_0(H^*p). \quad (7)$$

Здесь p^* — вектор-строка (p_1, p_2, \dots, p_n) , сопряженная с вектором-столбцом p . В силу (1) правая часть (7) равна нулю в окрестности начала координат. Поэтому можно делить обе части (7) на $(2\pi i)^{2m} \left(\sum_{j=1}^n p_j^2 \right)^m$. Функция $F[\psi_\ell(x)]$ определяется из уравнения (7) с точностью до слагаемого вида

$$(-1)^m d_0 \delta(p) + \sum_{0 < |\alpha| \leq 2m} d_\alpha D^\alpha \delta(p).$$

Поскольку, однако, $F[\psi_\ell(x)]$ должна быть боронообразной, то есть линейной комбинацией δ -функций, сосредоточенных в узлах целочисленной решетки, то все слагаемые, кроме $(-1)^m d_0 \delta(p)$, должны быть отброшены.

Следовательно,

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m d_0 \delta(p) + \frac{\exp(2\pi i p^* z) \phi_0(H^*p)}{(2\pi)^{2m} \left(\sum_{j=1}^n p_j^2 \right)^m} - \frac{\sum_{k=1}^N C_k(z) \exp(2\pi i p^* x^{(k)}) \phi_0(H^*p)}{(2\pi)^{2m} \left(\sum_{j=1}^n p_j^2 \right)^m}. \quad (8)$$

Заменяя $\phi_0(H^*p)$ рядом по δ функциям и применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям (8), получаем (6), что и доказывает лемму 1.

3. НОРМА ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Норма функционала погрешности интерполяционной формулы выражается через билинейную форму от коэффициентов формулы и значений экстремальной функции $\psi_\ell(x)$.

Поскольку пространство $\widetilde{L}_2^{(m)}(H)$ гильбертово, то имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell | \widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\| \|\psi_\ell | \widetilde{L}_2^{(m)}(H)\| = \|\ell | \widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\|^2. \quad (9)$$

Пользуясь формулами (3), (6), (9) после непосредственных вычислений, получим

$$\begin{aligned} \|\ell | \widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\|^2 &= \int_{\Omega_0} \ell(x) \psi_\ell(x) dx = \\ &= (-1)^m \int_{\Omega_0} \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \delta(x-x^{(k)}) \right) * \phi_0(H^{-1}x) \left(B_{2m}(x-z) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(x-x^{(k)}) + d_0 \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (1) и по определению дельта-функции, имеем

$$\|\ell | \widetilde{L}_2^{(m)*}(H)\|^2 =$$

$$= (-1)^m \int_{\Omega_0} \left(\sum_{\beta} \delta(x - z - H\beta) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{\beta} \delta(x - x^{(k)} - H\beta) \right) \times \\ \times \left(B_{2m}(x - z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) \right) dx.$$

Пользуясь характеристической функцией $\chi_{\Omega_0}(x)$ области Ω_0 , последнее выражение, полученное для нормы функционала, перепишем в виде

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = (-1)^m \left(\sum_{\beta} \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(H\beta) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{\beta} \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(z + H\beta - x^{(k)}) - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{\beta} \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - z) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{k'=1}^N C_{k'}(z) \sum_{\beta} \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - x^{(k')}) \right).$$

Так как $x^{(k)} \in \Omega_0$, $z \in \Omega_0$, $\sum_{\beta} \chi_{\Omega_0}(y + H\beta) = 1$, $y \in \Omega_0$, используя четность функции Бернулли-Соболева $B_{2m}(y)$, т.е. $B_{2m}(y) = B_{2m}(-y)$, окончательно имеем

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = \\ = (-1)^m \left(B_{2m}(0) - 2 \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(z - x^{(k)}) + \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{k'=1}^N C_{k'}(z) B_{2m}(x^{(k)} - x^{(k')}) \right). \quad (10)$$

Заметим, квадрат нормы функционала ℓ является неотрицательным многочленом второй степени от N вещественных переменных $C_1(z), \dots, C_N(z)$. Этот многочлен рассматривается на линейном многообразии $\sum_{k=1}^N C_k(z) = 1$. Очевидно, такая функция достигает минимума в некоторой точке $C^0(z) = (C_1^0(z), \dots, C_N^0(z))$. Благодаря строгой выпуклости нормы гильбертова пространства эта точка единственна.

Для нахождения точки минимума нормы (10) при условии (1) можно применить метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(C(z), \lambda) = \|\ell\|^2 - 2(-1)^m \lambda(\ell, 1).$$

Приравнявая к нулю частные производные от $\Psi(C(z), \lambda)$ по $C_k(z)$ и λ , получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^N C_k^0(z) B_{2m}(x^{(k')} - x^{(k)}) + \lambda^0 = B_{2m}(z - x^{(k')}), \quad k' = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^N C_k(z) = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим систему на решетке, т.е. пусть узлы $x^{(\gamma)} = Hh\gamma$. Такую интерполяционную формулу будем называть *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, *шаг решетки*. Тогда система примет вид

$$\sum_{hH\gamma \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z) B_{2m}(hH(\beta - \gamma)) + \lambda^0 = B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0, \quad (13)$$

$$\sum_{hH\gamma \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z) = 1. \quad (14)$$

Пользуясь сверткой двух функций дискретного аргумента, определяемой формулой (см. [9])

$$f[\beta] * g[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f[\gamma] \cdot g[\beta - \gamma],$$

систему (13), (14) записываем в виде уравнений в свертках.

$$B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta]; z) \chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda^0 = B_{2m}(z - [\beta]), \quad [\beta] \in \Omega_0, \quad (15)$$

$$\sum_{[\beta] \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) = 1, \quad (16)$$

где $[\beta] = hH\beta$.

Систему уравнений (15), (16) будем называть *системой Винера-Хопфа*, и теперь задача состоит в том, чтобы решить эту систему относительно $\overset{\circ}{C}([\beta]; z)$ и λ^0 .

Задача А. Найти функцию $\overset{\circ}{C}([\beta]; z)$ и λ , удовлетворяющие системе Винера-Хопфа.

При решении задачи А важную роль играют некоторые свойства дискретного аналога $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m , которые будут доказаны в следующем пункте.

Традиционно к дискретному аналогу полигармонического оператора приводит замена входящих в Δ^m производных на соответствующие конечные разности. Восходящая к С.Л. Соболеву [9] идея другого способа дискретизации дифференциального оператора заключается в следующем. В уравнении, определяющем фундаментальное решение дифференциального оператора (у нас это $\Delta^m B_{2m}(x) = \Phi_0(x)$ — в периодическом варианте), переходят к дискретным аргументам фундаментального решения и δ -функции, заменяя полигармонический оператор на некоторую функцию дискретных аргументов, действующую как дискретная свертка на дискретизированное фундаментальное решение.

Это записывается формулой

$$D_{hH}^m[\beta] * B_{2m}[\beta] = \sum_{\gamma} \delta[\beta - \gamma/h],$$

где $[\beta] = hH\beta$, $\beta \in \mathbb{Z}^n$, $1/h$ — натуральное число, $\delta[\beta] \equiv \delta_0^{|\beta|}$ — символ Кронекера.

Определяемый этим равенством оператор дискретной свертки $D_{hH}^m[\beta] *$ и является дискретным аналогом полигармонического оператора.

4. НОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА $D_{hH}^{(m)}[\beta]$

Займемся обоснованием новых свойств оператора свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]$. Отметим, что при $n = 1$ дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} построен в работе [10].

С этой целью ищем такую функцию дискретного аргумента $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}[\beta] = \Phi[\beta] - h^n. \quad (17)$$

Здесь $B_{2m}[\beta]$ – функция Бернулли-Соболева, которая задается формулой

$$B_{2m}[\beta] = (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \gamma^* h \beta)}{|2\pi H^{-1*} \gamma|^{2m}},$$

а $\Phi[\beta]$ – дискретная периодическая дельта-функция и

$$\Phi[\beta] = \sum_{\gamma} \delta[\beta - h^{-1} \gamma], \quad (18)$$

$[\beta] = hH\beta$, h^{-1} – натуральное число, $\delta[\beta - h^{-1} \gamma]$ – дискретная дельта-функция, определяемая формулой

$$\delta[\beta - h^{-1} \gamma] = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta - h^{-1} \gamma = 0, \\ 0, & \text{если } \beta - h^{-1} \gamma \neq 0, \end{cases} \quad (19)$$

$\beta = \uparrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – вектор столбец, $\beta^* = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – вектор строка, $\beta_j \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.

Лемма 2. Решение уравнения в свертках (17) определяется формулой

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] = \frac{1}{|\Omega_1|} \int_{\Omega_1} \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \exp(2\pi i \beta^* h H^* p) dp, \quad (20)$$

где Ω_1 – фундаментальный параллелепипед для матрицы $h^{-1} H^{-1*}$, $|\Omega_1|$ – объем области Ω_1 ,

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p) = \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|p - h^{-1} H^{-1*} \gamma|^{2m}} \right]^{-1}, \quad p \neq h^{-1} H^{-1*} \gamma. \quad (21)$$

Доказательство. Для отыскания $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ пользуемся оператором преобразования Фурье. Известно, что класс функций дискретного аргумента и класс функций боронообразных функций изоморфны (см. [9]). Используя это, от функций дискретного аргумента перейдем к боронообразным обобщенным функциям

$$\overline{\psi}(x) = \sum_{\beta} h^n \psi[\beta] \delta(x - hH\beta).$$

Для $\Phi[\beta]$, которая определена формулой (18), имеем

$$\overline{\Phi}(x) = \sum_{\beta} h^n \Phi[\beta] \delta(x - hH\beta) = h^n \sum_{\beta} \sum_{\gamma} \delta[\beta - h^{-1} \gamma] \delta(x - hH\beta).$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$\overline{\Phi}(x) = \sum_{\gamma} h^n \delta(x - H\gamma) = h^n \phi_0(H^{-1}x).$$

Уравнение (17) на классе боронообразных функций примет вид

$$h^n \overline{D}_{hH}^{(m)}(x) * \overline{B}_{2m}(x) = h^n \phi_0(H^{-1}x) - h^n \phi_0(h^{-1} H^{-1}x), \quad (22)$$

где $\phi_0(h^{-1} H^{-1}x) = \sum_{\beta} h^n \delta(x - hH\beta)$.

Преобразование Фурье функций $\phi_0(H^{-1}x)$ и $\phi_0(h^{-1} H^{-1}x)$, как известно, соответственно задаются формулами

$$\begin{aligned} F[\phi_0(H^{-1}x)] &= \int e^{2\pi i p^* x} \phi_0(H^{-1}x) dx = \\ &= \int e^{2\pi i p^* x} \sum_{\beta} \delta(x - H\beta) dx = \sum_{\beta} \int e^{2\pi i p^* x} \delta(x - H\beta) dx = \sum_{\beta} e^{2\pi i p^* H\beta}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \int e^{2\pi ip^*x} \phi_0(h^{-1}H^{-1}x) dx = \sum_{\beta} h^n e^{2\pi ip^*hH\beta}. \quad (24)$$

Пользуясь известной формулой Пуассона

$$h^n \sum_{\beta} e^{2\pi ip^*hH\beta} = \sum_{\beta} \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta), \quad (25)$$

равенства (23) и (24) приводим к виду

$$F[\phi_0(H^{-1}x)] = \sum_{\beta} \delta(p - H^{-1*}\beta), \quad (26)$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \sum_{\beta} \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta). \quad (27)$$

Теперь вычислим преобразование Фурье функции

$$\overline{B}_{2m}(x) = h^n (-1)^m \sum_{\beta} \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \gamma^* h \beta)}{|2\pi H^{-1*} \gamma|^{2m}} \delta(x - hH\beta).$$

По определению преобразования Фурье

$$\begin{aligned} F[\overline{B}_{2m}(x)] &= \int e^{2\pi ip^*x} \overline{B}_{2m}(x) dx = \\ &= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta} h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i \gamma^* h \beta) \exp(2\pi ip^* h H \beta)}{|H^{-1*} \gamma|^{2m}} = \\ &= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta} h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i (p^* H - \gamma^*) h \beta)}{|H^{-1*} \gamma|^{2m}}. \end{aligned}$$

В силу (25) имеем

$$\begin{aligned} h^n \sum_{\beta} \exp(2\pi i (p^* H - \gamma^*) h \beta) &= \sum_{\beta} h^n \exp(2\pi i (p^* - \gamma^* H^{-1}) h H \beta) = \\ &= \sum_{\beta} \delta(p - H^{-1*} \gamma - h^{-1} H^{-1*} \beta). \end{aligned}$$

Тогда

$$F[\overline{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta} \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\delta(p - H^{-1*}(\gamma + h^{-1}\beta))}{|H^{-1*} \gamma|^{2m}}.$$

Делая замену переменных $\gamma + h^{-1}\beta = k$, окончательно получим

$$F[\overline{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta} \sum_{\substack{k \\ kh \notin \mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}k)}{|H^{-1*}(k - h^{-1}\beta)|^{2m}}. \quad (28)$$

Теперь применив к обеим частям (22) преобразование Фурье и пользуясь формулами (26), (27) и (28) и сокращая на $h^n > 0$ получим следующее уравнение:

$$F[\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)] \cdot \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\beta} \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h \notin \mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_{\substack{\gamma \\ h\gamma \notin \mathbb{Z}}} \delta(p - H^{-1*}\gamma). \quad (29)$$

Известно, что

$$\sum_{\beta} \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h \notin \mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_{\beta} \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h \notin \mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|p - h^{-1}H^{-1*}\beta|^{2m}}. \quad (30)$$

В силу (30), уравнение (29) эквивалентно уравнению

$$F[\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)] \cdot (\Gamma_{hH}^{(m)}(p))^{-1} = 1, \quad p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \quad (31)$$

где $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ определяется формулой (21). Функция $\Gamma_{hH}^{(m)}(p)$ периодическая по p с матрицей периодов $h^{-1}H^{-1*}$, вещественная, аналитическая при всех $p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma$.

Из (31) имеем

$$F[\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)] = \Gamma_{hH}^{(m)}(p). \quad (32)$$

Применяя к обеим частям равенства (32) обратное преобразование Фурье и переходя от боронообразных обобщенных функций к функциям дискретного аргумента, находим (20), что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. Оператор $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ и функция $\exp(2\pi i\sigma^*hH\beta)$ связаны между собой соотношением

$$\begin{aligned} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i\sigma^*hH\beta) &= \\ &= (-1)^m (2\pi)^{2m} \exp(2\pi i\sigma^*hH\beta) \left[\sum_{\gamma \neq hH^*\sigma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\gamma - \sigma|^{2m}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ определяется формулой (20).

Доказательство. Для этого обозначим свертку двух боронообразных функций $\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)$ и $\overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)$ через $\overline{T}(x)$:

$$\overline{T}(x) = \overline{D}_{hH}^{(m)}(x) * \overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x).$$

Пользуясь формулой (32), вычислим преобразование Фурье функции $\overline{T}(x)$:

$$\begin{aligned} F[\overline{T}(x)] &= F[\overline{D}_{hH}^{(m)}(x) * \overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)] = \\ &= F[\overline{D}_{hH}^{(m)}(x)] \cdot F[\overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)] = \Gamma_{hH}^{(m)}(p) \cdot F[\overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)]. \end{aligned}$$

По определению боронообразных функций и преобразования Фурье от $\delta(x - hH\beta)$ имеем

$$\begin{aligned} F[\overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)] &= F\left[\sum_{\beta} h^n \exp(2\pi i\sigma^*hH\beta) \delta(x - hH\beta) \right] = \\ &= \sum_{\beta} h^n \exp(2\pi i\sigma^*hH\beta) \exp(2\pi ip^*hH\beta) = \sum_{\beta} h^n \exp(2\pi i(\sigma^* + p^*)hH\beta). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (25) находим

$$F[\overline{\exp}(2\pi i\sigma^*x)] = \sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta). \quad (33)$$

С помощью формул (21), (33) получим

$$\begin{aligned} F[\overline{T}(x)] &= \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|p - h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}} \right]^{-1} \cdot \sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) = \\ &= \sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\beta - \sigma - h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}} \right]^{-1} = \\ &= \sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}} \right]^{-1}, \quad (34) \end{aligned}$$

$$p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\gamma.$$

Пользуясь формулой (25), вычислим обратное преобразование Фурье функции $\sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)$ и, имея в виду определение борнообразных функций, имеем

$$\begin{aligned} F^{-1} \left[\sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) \right] &= \sum_{\beta} \int e^{-2\pi i x^* p} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) dp = \\ &= e^{2\pi i x^* \sigma} \sum_{\beta} e^{-2\pi i x^* h^{-1}H^{-1*}\beta} = e^{2\pi i x^* \sigma} h^n \sum_{\beta} \delta(x - hH\beta) = e^{2\pi i \sigma^* x} \sum_{\beta} h^n \delta(x - hH\beta) = \\ &= \sum_{\beta} h^n e^{2\pi i \sigma^* hH\beta} \delta(x - hH\beta) = \overline{\text{exр}}(2\pi i \sigma^* x). \end{aligned} \quad (35)$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям формулы (34) и учитывая (35), получим

$$\overline{T}(x) = \overline{\text{exр}}(2\pi i \sigma^* x) \cdot \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}} \right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Перейдя от борнообразных функций к обычным функциям дискретного аргумента, имеем

$$T[\beta] = \text{exр}(2\pi i \sigma^* hH\beta) \cdot \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}} \right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ А

Справедлива следующая

Лемма 4. Пусть $g[\beta]$ дискретная периодическая функция, т.е. $g[\beta] = g(hH\beta) = g(hH\beta + H\gamma)$, тогда справедливо следующее равенство

$$g[\beta] = (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta]. \quad (36)$$

Доказательство. Пользуясь формулами (18), (19), формулой

$$\sum_{\gamma} \chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = 1$$

и периодичностью дискретной функции $g[\beta]$, имеем

$$\begin{aligned} g[\beta] &= g[\beta] \sum_{\gamma} \chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma} g[\beta]\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \\ &= \sum_{\gamma} g(hH\beta + H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma} g(hH\beta - H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta - H\gamma) = \\ &= \sum_{\gamma} g[\beta - h^{-1}\gamma]\chi_{\Omega_0}[\beta - h^{-1}\gamma] = \sum_{\gamma} \sum_k g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] = \\ &= \sum_k g[k]\chi_{\Omega_0}[k] \sum_{\gamma} \delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] = \sum_k g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\Phi[\beta - k] = \\ &= (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Для этого пользуемся следующей известной формулой из [9]:

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] * [\beta]^k = 0 \text{ при } k < 2m. \quad (37)$$

Применяя оператор $h^n D_{hH}^{(m)}[\beta]$ к обеим частям уравнения (15), получаем

$$h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * \left(B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta]; z) \chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda \right) = h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0. \quad (38)$$

Пользуясь формулами (17), (36), (37) из (38), имеем

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) - h^n \sum_{hH\beta \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

В силу (16) находим

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

Отсюда, учитывая, что функция $B_{2m}(z - hH\beta)$ является функцией Бернулли-Соболева, имеем

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) &= h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}(z - hH\beta)\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} = \\ &= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i h\beta^*\gamma) = \\ &= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1}(hH\beta)). \end{aligned} \quad (39)$$

Теперь, пользуясь леммой 6 из (39), получим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) &= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} (-1)^m (2\pi)^{2m} \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1}hH\beta) \times \\ &\quad \times \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}t - H^{-1*}\gamma|^{2m}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, введя обозначение $K(\gamma) = \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t - \gamma)|^{2m}} \right]^{-1}$, получим окончательный вид оптимальных коэффициентов, т.е.

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma) \right).$$

Теорема доказана.

Благодарность. Мы искренне благодарны профессору М.Д. Рамазанову за обсуждение результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *О задаче интерполирования функций n переменных* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, No 4, С. 778–781.
2. J.C. Holladay *Smoothest curve approximation* // Math. Tables Aids Comput. 1957. V. 11. P. 223–243.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*. М.: Мир. 1972. 318 с.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике*. М.: Наука, 1976. 248 с.
5. Лоран П.Ж. *Аппроксимация и оптимизация*. М.: Мир, 1975, 496 с.
6. Василенко В.А. *Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы*. Новосибирск: Наука, 1984.
7. Игнатов М.И., Певный А.Б. *Натуральные сплайны многих переменных*. Ленинград: Наука, 1991.
8. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения*. М. Наука, 1981, 424 с.
9. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул*. М.: Наука, 1974. 808 с.
10. Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение* // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1985, вып. 79, С. 22–35.

Нилуфар Хусеновна Маматова,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан

Абдулло Рахмонович Хаётов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: hayotov@mail.ru

Холматвой Махкамбаевич Шадиметов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан