Автоматика и телемеханика, № 3, 1998

УДК 517.977

© 1998 г. **А.И. ПРОПОЙ, д-р техн. наук**
(Институт системного анализа РАН, Москва)

ЗАДАЧА ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА В ВОЛНОВЫХ СРЕДАХ. III

Сформулирован принцип эквивалентности в нелокальном поиске. Рассмотрены некоторые его следствия и способы реализации. Изучено движение волнового пакета.

1. Введение

В [1, 2] были рассмотрены основные структурные составляющие нелокального поиска экстремума в волновой среде. Показано, что метрика волновой среды определяет векторное поле, интегральные кривые которого являются траекториями наикратчайшего спуска в этой метрике, т.е. метрика порождает движение. В [2] было показано, что движение в течение конечного промежутка времени, в свою очередь, модифицирует метрику.

Для того, чтобы изменение метрики осуществлялось в нужном направлении, необходимо, чтобы это движение было с обратной связью, определяемой измерениями значений минимизируемой функции; т.е. расстояние, пропорциональное времени распространения возбуждения из текущей движущейся точки, должно равняться расстоянию, задаваемому поверхностями уровня оптимизируемой функции. Это составляет основу принципа эквивалентности в нелокальном поиске. Для того, чтобы реализовать этот принцип, необходимо осуществить перенос времени (метрики) в направлении движения, что приводит к необходимости рассмотрения движения в обратном направлении (отраженного процесса). Анализу этих вопросов и посвящена настоящая работа.

2. Волновой пакет. Групповая скорость

Из рассмотрения свойств волновой среды [3] видно, что характеристики распространения волны зависят от частоты ω. Зависимость между частотой ω и волновым ковектором k определяет распространение монохроматической волны в неоднородной среде и называется дисперсионным уравнением [4]:

$$F(x, \omega, k) = 0.$$

Предполагая, что для функции F выполнены условия теоремы о неявных функциях, получим

$$\omega = \omega(x, k). \tag{1}$$

Отметим, что на практике дисперсионное уравнение получается непосредственно в результате измерений и служит основной характеристикой волновой среды.

В [3] было показано, что фаза волны φ и дисперсионная характеристика $\omega = \omega(x, k)$ (1) сопряжены, по крайней мере, локально (чтобы функции φ и ω были сопряжены на всем поисковом пространстве M, необходимо, чтобы M было линейным топологическим пространством, а функция φ – выпукла на M).

Для гладких функций φ и ω связь между ними определяется преобразованием Лежандра

$$k = \frac{\partial\varphi(x + dt\,u)}{\partial x}, \tag{2}$$

$$u = \frac{\partial\omega(x,k)}{\partial k}, \tag{3}$$

где $u = dx/dt$.

Если для всех k и x известна зависимость $u = u(k,x)$, то дисперсионная характеристика (1) находится из условия [1]:

$$k \cdot u(x,k) = \omega(x,k).$$

Таким образом, переход к двойственному описанию волновой среды позволяет декомпозировать задачу: для определения функции расстояния необходимо задать характеристики плоской волны и определить время прохождения этой волны (разность фаз) между двумя близкими точками траектории.

Замечание 1. Отметим связь этой декомпозиции с принципом максимума Понтрягина для задачи оптимального уравнения на быстродействие [5].

Пусть теперь в волновой среде в начальный момент времени $t = 0$ в точке $x \in M$ было задано некоторое возмущение. Используя спектральное разложение, представим это возмущение в виде [4]:

$$\psi(t,y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{T_x^*M} a(k) e^{i[k\cdot y - \omega(x,k)t]}\, dk, \tag{4}$$

$$\psi_0(y) = \psi(t,y)\big|_{t=0} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{T_x^*M} a(k) e^{ik\cdot y}\, dk. \tag{5}$$

Здесь $\psi_0(y)$ – обратное преобразование Фурье амплитуды $a(k)$. Будем рассматривать достаточно длинный волновой пакет с узким спектром: $||\Delta k||^* \ll ||k||^*$. В этом случае можно использовать линейную аппроксимацию дисперсионной характеристики

$$\omega(x,k) = \omega_0 + (k - k_0)\cdot u_0, \tag{6}$$

где

$$\omega_0 = \omega(x,k)\big|_{k=k_0}, \quad u_0 = \frac{\partial\omega(x,k)}{\partial k}\bigg|_{k=k_0}. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (4), получим, что

$$\psi(t,x) = \psi_0(y - tu_0)\exp[-i(\omega_0 - k_0\cdot u_0)t], \tag{8}$$

где функция ψ_0 определена в (5).

Волновая функция (8) является бегущей волной, модулированной по амплитуде.

Из (8) видно, что огибающая волны $\psi_0(y - tu_0)$ распространяется со скоростью u_0, определенной в (7) (см. также (3)). Эта скорость, определяющая движение волнового пакета (8), называется групповой скоростью.

Разность фаз модулирующей волны – синусоидального колебания с несущей частотой ω_0 – может быть представлена в виде

$$\Delta\varphi = ||k_0||^* \left(v - \frac{k_0\cdot u_0}{||k_0||^*}\right) t, \tag{9}$$

где $v = \omega_0/||k_0||^*$ – фазовая скорость.

Таким образом, на небольших отрезках времени волновой пакет (8) в целом движется с групповой скоростью u_0 (7); составляющие пакет горы и впадины синусоидального колебания с частотой ω_0 перемещаются с фазовой скоростью v. Если $\|u_0\| < v$, то из (9) следует, что в пакете возникают (сзади) новые горбы и впадины, которые перемещаясь вперед в направлении касательного вектора u_0 вдоль пакета, исчезают в его начале.

Если $\|u_0\| > v$, то новые горбы и впадины появляются в пакете спереди, проходя в его конец и там исчезая. Наконец, если $\|u_0\| = v$, то новых горбов и впадин не образуется и $\Delta\varphi = 0$.

В предыдущих построениях основной характеристикой для определения групповой скорости было дисперсионное уравнение $\omega = \omega(x, k)$.

Поскольку фаза φ сопряжена функции $\omega(x, k)$ [3], получим теперь характеристики групповой скорости, представляя волновой пакет в виде [6]:

$$(10) \qquad \psi(t,x) = \int\limits_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} a(\omega)\exp[i(\omega t - \varphi(x,\omega))]\,d\omega.$$

Здесь $\omega t - \varphi(x,\omega)$ – фаза монохроматической волны; функция $\varphi(x,\omega)$ удовлетворяет уравнению эйконала для волновой среды с переменным показателем преломления [6, 3, 7].

Полагая $\omega = \omega_0 + \eta$, $|\eta| \leqslant \Delta\omega$ и используя линейную аппроксимацию фазы волны (сравни с (6)):

$$(11) \qquad \varphi(x,\omega) = \varphi(x,\omega)\big|_{\omega=\omega_0} + \eta\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0} + \cdots,$$

получим из (10), что

$$(12) \qquad \psi(t,x) \cong a\left(t - \frac{\partial\varphi(x,\omega_0)}{\partial\omega}\right)\exp[i(\omega_0 t - \varphi(x,\omega_0))],$$

где обозначено

$$(13) \qquad a\left(t - \frac{\partial\varphi(x,\omega_0)}{\partial\omega}\right) = \int\limits_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} a(\omega_0+\eta)\exp\left[i\eta\left(t - \frac{\partial\varphi(x,\omega_0)}{\partial\omega}\right)\right]d\eta,$$

$$\frac{\partial\varphi(x,\omega_0)}{\partial\omega} = \frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial\omega}\bigg|_{\omega=\omega_0}.$$

Из (12), (13) видно, что если при движении по траектории возбуждения (ортогональной фронту волны) выполняется соотношение

$$(14) \qquad dt = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega\partial s}\,ds,$$

где $ds = \|dx\|$, то $a(t - \partial\varphi/\partial\omega) = \text{const}$.

Таким образом, волновой пакет (10) (за не очень большие промежутки времени) перемещается с групповой скоростью

$$(15) \qquad \|u\| = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega\partial s}\right]^{-1}.$$

Эквивалентность определений групповой скорости (7) и (15) следует из сопряженности функций φ и ω. Действительно, из

$$\frac{\partial\varphi(x,\omega)}{\partial x} = k,$$

получим, что

$$\frac{\partial^2\varphi(x,\omega)}{\partial s\partial\omega} = \frac{\partial||k||^*}{\partial\omega}.$$

Учитывая (7), последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{||u||} = \frac{\partial||k||^*}{\partial\omega} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial\omega}, \tag{16}$$

что эквивалентно (15).

3. Задача обучения

Анализ этапа обучения в нелокальном поиске и связанные с ним определения идеальной пары [2, 8] позволяют сформулировать

Принцип эквивалентности в нелокальном поиске. Движение в нелокальном поиске должно быть таково, что пройденное расстояние должно равняться разности значений оптимизируемой функции в начале и конце движения.

Отметим, что принцип эквивалентности в нелокальном поиске по сути релятивистский: в нем сравниваются две метрики – возбудимой среды и оптимизируемой функции. С другой стороны, очевидна его связь с принципом оптимальности Гюйгенса – Беллмана. Однако в принципе оптимальности, наоборот, используется один критерий (“метрика”) для оценки последующих решений [9]. В частности, для задачи на быстродействие [1, 5] из принципа оптимальности следует, что

$$t(z, x_0) - t(x, x_0) = t(z, x),$$

т.е. здесь время на всех частях оптимальной траектории является абсолютным (измеряется одними часами).

Рассмотрим некоторые следствия из этого принципа.

1. Пусть x и z – две близкие точки траектории возбуждения из x_0. Тогда из принципа эквивалентности следует, что

$$\Phi(x) - \Phi(z) = d(x, z), \tag{17}$$

где $z = x + dt\, u = x + dx$.

Метрике d соответствует своя идеальная функция (фаза φ в волновой среде), обозначим ее через V. Равенству (17) соответствует соотношение между 1-формами

$$d\Phi(x) - d\Phi(z) = dV(x). \tag{18}$$

Обозначая

$$k = d\Phi(x) \tag{19}$$

и переходя к пределу, получим

$$\dot{k} = -dV(x). \tag{20}$$

Соотношения (19), (20) соответствуют структуре квазиньютоновских алгоритмов оптимизации для пары (Φ, V).

Действительно, в координатном виде из (19) получим

$$\dot{k}_i = \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^i \partial x^j} \dot{x}^j,$$

что вместе с (20) дает

$$\dot{x}^i = -\widehat{g}_\Phi^{ij}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x^j}, \tag{21}$$

где $\widehat{g}_\Phi^{ij}(x)$ – элементы матрицы, обратной к гессиану $\partial^2\Phi(x)/\partial x^i \partial x^j$ (см. [2]). Очевидно, (21) переходит в алгоритм ньютоновского спуска для идеальной пары, когда $\Phi = V$.

Вместо (18) можно написать

$$dV(z) - dV(x) = d\Phi(x), \tag{22}$$

что в пределе, дает

$$\dot{k} = -d\Phi(x). \tag{23}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, в этом случае получим из (19), (23), что

$$\dot{x}^i = -\widehat{g}_V^{ij}(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^j}$$

– градиентный спуск для функции Φ в "метрике" $\widehat{g}_V^{ij}(x)$, задаваемой функцией V, который опять переходит в ньютонов спуск для идеальной пары. Алгоритм минимизации, определяемый соотношениями (23), (19), получил название зеркального спуска [10].

Воспользовавшись преобразованием Лежандра, получим вместо (19), (20) или (23), (19)

$$\dot{x} = \frac{\partial \omega(x, k)}{\partial k}, \tag{24}$$

где в этом случае $k = -d\Phi(x)$. Этот алгоритм изучался в [11].

Отметим, что во всех этих алгоритмах функция V может рассматриваться как функция Ляпунова (в (24) $\omega(x, k) = V^*(k)$, V^* – сопряженная к V функция).

2. Рассмотрим теперь общую структуру движения в волновой среде. Движение "точки" $x = x(t)$ ассоциируется с движением волнового пакета из плоских волн, который в пределе является сферической волной и движется с групповой скоростью $u(x)$. Эта "элементарная" сферическая волна с центром в точке $x(t)$ является источником возбуждения, так что в результате возникает фазовая волна как огибающая элементарных сферических волн.

В соответствии с принципом эквивалентности существует соответствие между этими двумя процессами (см. также [1]):

$$t(z, x_0) - t(x, x_0) = t(x, z), \tag{25}$$

где $t(x, z)$ – время распространения возбуждения из x в z (определяется решением соответствующей задачи на быстродействие [1]); $(x_0, t = 0)$ – начальное событие, точки x и z принадлежат траектории возбуждения из точки x_0.

Будем предполагать, что точки x и z близки. Тогда

$$(26) \qquad z = x + dt\, u = x + dx.$$

Переходя от (25) к соответствующему соотношению для фаз и учитывая (26), получим, что

$$(27) \qquad \Delta\varphi_{x_0}(x,z) = \omega[t(z,x_0) - t(x,x_0)] = \omega(dt - dt_0) = \omega\left(\frac{ds}{u} - \frac{ds}{v}\right).$$

Здесь $ds = \|dx\|$, $dt = ds/u$ – время, затрачиваемое на движение вдоль dx со скоростью u, $dt_0 = ds/v$ – время распространения волны, v – ее скорость.

Покажем, что выражение (9) для разности фаз волнового пакета в точности совпадает с (27). Действительно, в обозначениях этого раздела (9) может быть переписано в виде

$$\Delta\varphi = (v-u)k\, dt.$$

Так как $ds = udt$ и $kv = \omega$, то

$$\Delta\varphi = (v-u)\frac{\omega ds}{uv} = \omega\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) ds.$$

С другой стороны, для элементарной сферической волны (правая часть (25))

$$(28) \qquad d\varphi = \omega_0 dt = \omega_0 \frac{dt}{u}.$$

Условия согласования (25) требуют, чтобы выражения для фаз (27) и (28) были равны, т.е.

$$(29) \qquad \omega\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right) ds = \omega_0 \frac{ds}{u},$$

откуда

$$(30) \qquad \omega_0 = \omega\left(1 - \frac{u}{v}\right).$$

Таким образом, получено

Предложение 1 (Теорема о гармонии фаз [12]). *Периодический процесс с частотой ω_0 и фазой φ_0, связанный с движущейся со скоростью u "точкой", постоянно находится в одной фазе с волной с частотой ω, распространяющейся в том же направлении со скоростью v, т.е. для этого процесса справедливо равенство* (29), *причем между частотами выполняется соотношение* (30).

3. Из предыдущего раздела видно, что согласования фаз (29) можно достичь либо модифицируя частоту при одинаковом масштабе времени, либо модифицируя время при постоянной частоте (см. (28), (29)). Поскольку функция расстояния может определяться и как скорость, умноженная на время, аналогичная связь существует и между скоростью распространения возбуждения и временем. Рассмотрим ее подробнее.

Пусть, по-прежнему, "точка" $x = x(t)$ движется в направлении касательного вектора dx со скоростью u; v – скорость распространения возбуждения. Будем рассматривать две системы отсчета: неподвижную, связанную с началом движения

$(x_0,\, t=0)$, и движущуюся (x, t). По часам неподвижного наблюдателя время распространения возбуждения из x в $z = x + dx$ (в направлении движения) равно

$$dt_f = \frac{ds}{v-u}. \tag{31}$$

Для движения в обратном направлении из z в x (отраженного сигнала)

$$dt_b = \frac{ds}{v+u}, \tag{32}$$

так что общее время $x \to z \to x$ равно

$$dt_f + dt_b = \frac{ds}{v-u} + \frac{ds}{v+u} = 2\frac{v}{v^2-u^2}\, ds. \tag{33}$$

Аналогичное выражение получится, если рассмотреть движение в противоположном направлении

$$dt_f + dt_b = \frac{ds}{v+u} + \frac{ds}{v-u} = 2\frac{v}{v^2-u^2}\, ds.$$

Вообще, рассматривая dx как произвольный касательный вектор T_xM и считая, что движение происходит в направлении dx со скоростью u, всегда будем получать выражение (33).

Из (33) следует, что движение $x \to z \to x$ происходит со средней скоростью

$$\overline{v} = \frac{v}{v^2-u^2},$$

которая является средней гармонической скоростей $v_f = v - u$ и $v_b = v + u$:

$$\frac{1}{\overline{v}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_f} + \frac{1}{v_b}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-u} + \frac{1}{v+u}\right). \tag{34}$$

Внутри волновой среды, без привлечения внешних измерительных средств интервалы (31) и (32) порознь не наблюдаемы, наблюдаема лишь сумма (33), поскольку она оценивается в той же точке x. Для того, чтобы измерить скорость, нужны вторые часы, которые будем связывать с собственным временем движущейся точки $d\tau$ [1].

Чтобы синхронизировать движущиеся и неподвижные часы (т.е. определить связь между переменными t и τ), необходимо перенести значение времени из x в z [13]. Сделать это можно, измерив в точке x время прихода отраженного сигнала, т.е. сумму (33). Поскольку

$$ds = v d\tau, \tag{35}$$

в принципе возможны две формализации этого процесса: либо считать скорость распространения возбуждения переменной, зависящей от движения: $v = v_f$ и $v = v_b$ (тогда в (35) пространственный интервал ds постоянен), либо скорость распространения возбуждения считать постоянной в любой системе отсчета: $v = \overline{v}$, где $\overline{v}$ – средняя гармоническая скоростей v_f и v_b (34) (тогда меняется пространственный интервал). В первом подходе используются ненаблюдаемые величины (внутри возбудимой среды), поэтому в теории относительности принят второй подход.

В рассматриваемом случае положим

$$ds_f = v d\tau_f,$$
$$ds_b = v d\tau_b,$$

где $v = \overline{v}$ и

$$ds_f = (v - u)\, dt,$$
$$ds_b = (v + u)\, dt.$$

Отсюда, полагая $d\tau^2 = d\tau_f\, d\tau_b$, получим, что

$$v^2 d\tau^2 = (v^2 - u^2)\, dt^2, \tag{36}$$

или

$$d\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v}\right)^2}\, dt \tag{37}$$

– связь между собственным временем $d\tau$ движущейся точки (часов) и временем dt неподвижного наблюдателя.

Замечание 2. В теории относительности синхронизация часов – это установление зависимости между часами, движущимися относительно друг друга. Из приведенных рассуждений видно, что в нелокальном поиске синхронизации часов соответствует процесс обучения, т.е. согласование метрик возбудимой среды и оптимизируемой функции.

Действительно, из принципа оптимальности следует, что в рассматриваемом случае процесс обучения, т.е. согласования метрик, состоит в выполнении равенства $vdt - ds = ds_f$, где $ds = udt$, расстояние ds_f задается процессом активации движущейся в направлении dx "точки": $ds_f = v\, d\tau_f$.

В самой среде этот процесс нереализуем; для его реализации необходимо осуществить перенос метрики ds (задаваемый движением в потенциальном поле Φ) из точки x в конец вектора dx, т.е. в точку $z = x + dx$. Этот процесс реализует отраженное движение, для которого $vdt + ds = ds_b$.

В результате величина $d\tilde{s}^2 = v^2 dt^2 - ds^2$, которую можно считать квадратом расстояния в $(n+1)$-мерном (локально лоренцевом) поисковом пространстве, оказывается (наблюдаемым) инвариантом.

Эти рассуждения отражают принцип эквивалентности А. Эйнштейна, который постулируется в теории относительности.

Замечание 3. Разница в выражениях (30) и (37) возникла из-за того, что в (30) не учитывается отраженный процесс.

Замечание 4. В теории оптимального уравнения движение в обратном направлении реализуется сопряженной системой [2].

6. Заключение

В настоящей работе рассмотрены основные структурные составляющие нелокального экстремального поиска в координатном представлении, когда поверхности уровня оптимизируемой функции (встречные "волновые фронты") зависят от текущей поисковой точки. В этом случае движению соответствует бегущая волна, модулированная по амплитуде (волновой пакет).

Сформулирован принцип эквивалентности в нелокальном поиске. Рассмотрены способы его реализации и структура движения, следующие из этого принципа. Показано, что для его реализации в волновой среде необходимо рассматривать отраженный процесс.

Представляет интерес изучение стационарных состояний, когда в задаче обучения поверхности уровня не зависят от текущей поисковой точки ("энергетическое" представление). Этот случай соответствует стоячей волне, модулированной по амплитуде. Ему будет посвящена отдельная публикация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пропой А.И.* Задача обучения для нелокального поиска в волновых средах. I // АиТ. 1998. № 1. С. 120–126.
2. *Пропой А.И.* Задача обучения для нелокального поиска в волновых средах. II // АиТ. 1998. № 2. С. 84–90.
3. *Пропой А.И.* Модели волновых сред // АиТ. 1997. № 9. С. 35–42.
4. *Мешков И.Н., Чириков Б.В.* Электромагнитное поле. М.: Наука, 1987.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Де Бройль Л.* Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. М.: Мир, 1986.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
8. *Пропой А.И.* Задачи оптимизации и обучения для нелокального поиска в возбудимых средах. II // АиТ. 1997. № 3. С. 68–81.
9. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
10. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
11. *Пропой А.И.* Возбудимые среды и нелокальный поиск // АиТ. 1995. № 7. С. 162–171.
12. *De Broglie L.* Recherches sur la theorie des quanta // Annales de Physique. 1925. V. 3. Dixieme serie. P. 22–128.
13. *Weyl H.* Raum, Zeit, Materie. Berlin: Springer-Verlag, 1923.

Поступила в редакцию 18.02.97