A. Y. Plushkevichene, On a specialization of processing of axions in proof procedures for axiomatic theories with equality, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 175–185

А.Ю.Плюшкевичене

О СПЕЦИАЛИЗАЦИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АКСИОМ ПРИ ПОИСКЕ ВЫВОДА В АКСИОМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ С РАВЕНСТВОМ *)

В настоящей заметке предлагаются способы устранения широкого класса правил типа сечения для произвольных аксиоматических теорий с равенством. При этом усиливаются и обобщаются результаты, опубликованные в заметке [I] , терминология и обозначения которой предполагаются известными.

Не ограничивая общности считаем, что произвольная специфическая аксиома в любой аксиоматически заданной математической теории имеет вид

$$\longrightarrow \forall x_1 \ldots x_m M,$$

причем M является n-членной дизъюнкцией элементарных формул. Пусть R - такая предикатная буква, что в списке аксиом заданной теории имеются и положительные и отрицательные вхождения (см. [2], стр. 323) атомарных формул, начинающихся с этой буквы. Тогда для каждой такой предикатной буквы, встречающейся в аксиоматике, выделим либо только положительные, либо только отрицательные вхождения атомарных формул и назовем их м и н у с — ф о р м у л а м и . Все специфические аксиомы рассматриваемой теории разделим на о т р и ц а т е л ь н ы е и п о л о ж и т е л ь н ы е в зависимости от того, содержат ли они хотя бы одно вхождение минус —формулы или не содержат.

Заметим, что вопрос о том, какие вхождения формул назначить

*) Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике I9 мая I970 г.

вхождениями минус-формул может решаться по-разному, однако при этом надо стремиться, чтобы в списке аксиом теории содержалось по возможности меньше минус-формул и отрицательных аксиом (см. описание исчисления T_1 , п.п. 4,5 настоящей заметки).

В [I] на рассматриваемые аксиоматические теории накладывалось некоторое ограничение и для таких теорий предлагался метод устранения правил типа сечения, соответствующих неуравнивающим (см. [I]) положительным аксиомам. В настоящей заметке для произвольных аксиоматических теорий показано, что : I) правила типа сечения, соответствующие неуравнивающим положительным аксиомам, можно заменить схемами логических аксиом; 2) для остальных аксиом теории правила типа сечения можно заменить разветвляющими правилами, вводящими в посылки лишь те подформулы формулы М (где М - матрица рассматриваемой аксиомы), которые имеют вид равенства двух термов или являются минус-формулами.

2. В дальнейшем, из чисто технических соображений, вместо исчисления L^* (см. [I]) будем рассматривать соответствующее антецедентное исчисление , обозначаемое посредством $L^{*\prime}$, которое получается из L^* следующим образом. Аксиомы и логические правила исчисления L^* изменяются таким образом, что все секвенции в исчислении $L^{*\prime}$ имеют пустой сукцедент. Очевидно, что при этом нужно добавить и правила, позволяющие проносить знак $\neg$ через знаки $\supset$, $\&$, $\vee$ и кванторы, а также правило снятия двойного отрицания. Правила, соответствующие специфическим аксиомам, в которых $M \equiv t = \omega$, в исчислении $L^{*\prime}$ имеют вид:

$$\frac{[\Gamma|^{\alpha}_{\tilde{\omega}}]\to}{[\Gamma|^{\alpha}_{\tilde{t}}]\to} \qquad (I)$$

$$\frac{[\Gamma|^{\alpha}_{\tilde{t}}]\to}{[\Gamma|^{\alpha}_{\tilde{\omega}}]\to} \qquad (2)$$

где знак $\sim$ над буквой означает подстановку термов вместо переменных (см.[3]).

Правила типа сечения, соответствующие специфическим аксиомам, матрица которых отлична от равенства двух термов, имеют вид:

$$\frac{\begin{array}{c}\tilde{P}_1=\tilde{q}_1,\Gamma\to;\ldots;\tilde{P}_k=\tilde{q}_k,\Gamma\to;\tilde{A}_1,\Gamma\to;\ldots;\tilde{A}_\ell,\Gamma\to;\\ \tilde{r}_1\neq\tilde{s}_1,\Gamma\to;\ldots\tilde{r}_m\neq\tilde{s}_m,\Gamma\to;\tilde{B}^1_1,\Gamma\to;\ldots;\tilde{B}^{v_n}_n,\Gamma\to\end{array}}{\Gamma\to}, \quad (3)$$

так как не ограничивая общности можно считать, что матрица M специфической аксиомы имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k}(p_i=q_i)\vee\bigvee_{i=1}^{\ell}A_i\vee\bigvee_{i=1}^{m}(r_i\neq s_i)\vee\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{v_i}B_i^j\right) \qquad (4)$$

где I) $k\geqslant 0$, $\ell\geqslant 0$, $m\geqslant 0$, $n\geqslant 0$, $v_i\geqslant 1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$;

2) A_i $(1\leqslant i\leqslant \ell)$ – элементарная формула, начинающаяся с предикатной буквы и являющаяся минус-формулой (для положительных аксиом $\ell=0$;

3) B_i^j $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant v_i)$ – элементарная формула, начинающаяся с предикатной буквы и не являющаяся минус-формулой;

$B_i^1, B_i^2, \ldots, B_i^{v_i} (1\leqslant i\leqslant n)$ – элементарные формулы, начинающиеся с одной и той же предикатной буквы*).

Легко видеть, что секвенция $\Gamma\to$, выводимая в исчислении L^{*1} , выводима и в исчислении L^* , а если в исчислении L^* выводима секвенция $\Gamma\to P_1, P_2, \ldots, P_s$, то в исчислении L^{*1} выводима секвенция $\Gamma, \neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_s\to$.

3. Список $S\rightleftharpoons Q(t_1^1,\ldots,t_n^1),\ldots,Q(t_1^r,\ldots,t_n^r)$

(где Q – n-местная предикатная переменная; $r\,(r\geqslant 1)$ – число членов списка S) назовем о д н о р о д н ы м списком. Определим индуктивно понятие о б р а з а о д н о р о д н о г о с п и с к а S . Образ R_S списка S – это список, состоящий

*) Имеется в виду, что среди формул A_i могут быть формулы, начинающиеся одной и той же предикатной буквой, а $B_{i_1}^{j_1}$ и $B_{i_2}^{j_2}$ не начинаются с одной и той же предикатной буквы, если $i_1\neq i_2$.

из непустого подсписка списка S и некоторого списка равенств Σ (называемого у р а в н и в а ю щ е й ч а с т ь ю о б р а з а R_s), определяемый следующими порождающими правилами I и 2; I. Список[*] $\hat{S}, \Lambda$, где Λ – пустой список, является образом списка S; 2. Пусть $Q(t_1^1, \ldots, t_n^1), \ldots, Q(t_1^\mu, \ldots, t_n^\mu), \Sigma$, где $1 \leq \mu \leq \tau$ – образ списка S, тогда при каждом ρ и τ $(1 \leq \rho \leq \mu, 1 \leq \tau \leq \mu, \rho \neq \tau)$ список $Q(t_1^1, \ldots, t_n^1), \ldots,$

$$Q(t_1^{\rho-1}, \ldots, t_n^{\rho-1}), Q(t_1^{\rho+1}, \ldots, t_n^{\rho+1}), \ldots, Q(t_1^\mu, \ldots, t_n^\mu), \Sigma,$$

$(t_1^\rho = t_1^\tau)', \ldots (t_n^\rho = t_n^\tau)$, где $(t_i^\rho = t_i^\tau)'$ $(1 \leq i \leq n)$ – вариант формулы $t_i^\rho = t_i^\tau$ по системе специфических аксиом рассматриваемого прикладного исчисления, является образом списка S[**].

Заметим, что для любого прикладного исчисления L секвенция $\bigvee_{i=1}^{\tau} Q(t_1^i, \ldots, t_n^i), R_s \rightarrow$, где R_s – произвольный образ однородного списка S, равного $Q(t_1^1, \ldots, t_n^1), \ldots, Q(t_1^\tau, \ldots, t_n^\tau)$, выводима в данном исчислении.

Вывод в исчислении $L^{*\prime}$, в котором над применениями правил (3) находятся лишь применения правил (3), правил для равенства и правил (I) и (2), причем между двумя применениями правил (3) нет применений никаких других правил, будем называть р е г у л я р н ы м. Имеют место следующие леммы о перестройке вывода в исчислении $L^{*\prime}$.

---

[*] $\hat{S}$ означает список формул, получаемый из списка S заменой каждого члена списка $Q(t_1^i, \ldots, t_n^i)$ $(1 \leq i \leq \tau)$ формулой $\hat{Q}(t_1^i, \ldots, t_n^i)$, где

$$\hat{Q}(t_1^i, \ldots, t_n^i) \rightleftharpoons \begin{cases} \neg Q(t_1^i, \ldots, t_n^i), & \text{если } Q(t_1^i, \ldots, t_n^i) \text{ атомарная формула}, \\ Q'(t_1^i, \ldots, t_n^i), & \text{если } Q(t_1^i, \ldots, t_n^i) \rightleftharpoons \neg Q'(t_1^i, \ldots, t_n^i). \end{cases}$$

[**] Если $\tau = 1$, то список S имеет лишь один образ, определяемый по первому пункту индуктивного определения.

Лемма I. Произвольный вывод в исчислении $L^{*'}$ можно перестроить в регулярный вывод в том же исчислении с той же последней секвенцией.

Посылки правила (3), боковые формулы которых не есть равенство двух термов или минус-формулы, назовем плюс-посылками.

Лемма 2. Регулярный прополотый (см.[I], стр. I83) вывод в исчислении $L^{*'}$ можно перестроить в вывод той же секвенции в том же исчислении, в котором над плюс-посылками применений правила (3) нет других применений правила (3).

Лемма 2 доказывается индукцией по числу плюс-посылок применений правила (3), над которыми есть применения правил (3) в данном выводе.

Очевидным следствием леммы является то, что над применениями правила (3), которые соответствуют положительным неуравнивающим аксиомам, нет других применений правила (3), т.е. применения правил типа сечения для положительных неуравнивающих аксиом можно поднять выше всех других правил такого типа.

4. Введем исчисление T_1, получаемое из $L^{*'}$ следующими преобразованиями I) и 2).

I) Заменой правила (3) схемой правил

$$\frac{\tilde{p}_1=\tilde{q}_1,\Gamma\to;\ldots;\tilde{p}_k=\tilde{q}_k,\Gamma\to;\ \tilde{A}_1,\Gamma\to;\ldots;\tilde{A}_\ell,\Gamma\to}{\Gamma\to}, \quad (5)$$

где

$$\Gamma \equiv \overline{(\tilde{\tau}_1=\tilde{s}_1)',\ldots(\tilde{\tau}_m=\tilde{s}_m)',\tilde{R}_{S_1},\ldots,\tilde{R}_{S_n},\Gamma_1}^{\text{ж)}},$$

$S_i \equiv B_i^1,\ldots,B_i^{v_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ – однородный список;

$(\tau_i=s_i)'$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ – вариант формулы $\tau_i=s_i$ по системе специфических аксиом рассматриваемого исчисления предикатов (см. [I]); R_{S_i} $(1\leqslant i\leqslant n)$ – образ списка S_i. Заметим, что при удалении

ж) Выражение $\overline{\Sigma}$ (где Σ – формульная цепь) означает любую перестановку формул из Σ.

несобственного равенства $x=t$ (см. [I], стр. I79,I8I), возникающего при определении варианта или уравнивающей части образа, одновременно производится подстановка терма t вместо всех вхождений переменной x во все дизъюнктивные члены матрицы M, имеющей вид (4), той специфической аксиомы, которая заменяется правилом (5), т.е. происходит подстановка и в боковые формулы посылок правила (5).

Как легко видеть, правило (5) станет вырожденным, т.е. не будет иметь посылок, если $k=0$ и $\ell=0$. В этом случае правило(3) типа сечения в исчислении $L^{*'}$ соответствует неуравнивающей положительной аксиоме и заменяется просто схемой аксиом

$$\frac{}{(\tilde{\tau}_1=\tilde{s}_1)',\ldots,(\tilde{\tau}_m=\tilde{s}_m)',\ R_{s_1},\ldots,R_{s_n},\Gamma_1\rightarrow}\ , \qquad (6)$$

где обозначения такие же, как и в схеме правил (5).

2) Преобразования, аналогичные преобразованиям, указанным в [I], п.5 2) и 3).

<u>Замечание I.</u> Избежать сложности определений схемы правил (5) (а также схемы аксиом (6)), возникающей из-за наличия в аксиоме однородного списка с числом членов $\tau\geqslant 2$ [ж)], иногда можно нужным образом проведя выбор минус-формул в аксиомах теории (см. п.5 настоящей заметки). Кроме того, можно вообще не вводить понятия однородного списка и образа однородного списка для $\tau\geqslant 2$, введя дублирование главной формулы в правилах для равенства и правилах (I) и (2). Однако, для построения алгорифмов поиска вывода удобнее иметь исчисление, содержащее по возможности меньше правил с дублированием главной формулы.

<u>Теорема I.</u> И с ч и с л е н и я $L^{*'}$ и T_1 р а в н о о б ъ е м н ы .

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказатель-

---

ж) Как заметил В.П.Оревков, в [I]не учитывалась возможность наличия в специфической аксиоме нескольких атомарных формул, начинающихся с одной и той же предикатной буквы и входящих в аксиому либо только положительно, либо только отрицательно.

ству теоремы I из заметки [I] , причем существенно используются леммы I и 2 предыдущего пункта.

5. При построении исчисления T_1 , равнообъемного исходному прикладному исчислению, важную роль играет выделение минус-формул в аксиомах теории и связанное с этим (см.п.I настоящей заметки) разделение специфических аксиом на положительные и отрицательные. Как легко видеть, процесс этот неоднозначен. Иными словами, выделение минус-формул можно производить по-разному в зависимости от того, какое исчисление хотим получить (можно, например, стремиться к уменьшению числа правил, вводящих подформулы специфических аксиом, или к уменьшению числа посылок, являющихся подформулами специфических аксиом, в каждом отдельном правиле за счет, возможно, увеличения числа правил и т.п.). Какое из таких исчислений будет лучше приспособлено для поиска вывода трудно говорить априорно, т.к. для этого нужно хорошо изучить специфику конкретного исчисления. Однако, представляется целесообразным использование некоторых общих соображений, например, предлагаемых ниже.

Про элементарные формулы А и В, входящие в аксиомы некоторой теории, будем говорить, что они к о н т р а с т и р у ю т , если они содержат одинаковую предикатную переменную и ровно одна из них начинается с отрицания.

Ниже $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - специфические аксиомы теории, А и В - контрастирующие формулы, входящие в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.

I. Пусть $\mathfrak{A}$ - уравнивающая аксиома, а $\mathfrak{B}$ - неуравнивающая, тогда, вообще говоря, выгоднее назначить минус-формулой формулу А.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ уже содержит вхождения минус-формул, а $\mathfrak{B}$ не содержит, тогда, вообще говоря, выгоднее назначить минус-формулой формулу А.

3. Если $A_1,\ldots,A_n$ - вхождения формул в $\mathfrak{A}$, среди которых нет контрастирующих между собой формул, но каждая из них содержит контрастирующую с ней формулу в другой аксиоме теории, то тем выгоднее из всех назначить минус-формулами, чем больше n . Если при этом $A_1,\ldots,A_n$ содержат одну и ту же предикатную пе-

ременную, то их особенно выгодно назначить минус-формулами.

В качестве примера рассмотрим аксиоматику плоской проективной геометрии, заданную следующим списком аксиом[ж)]:

1. $\forall xy\,(\lambda(x, \ell(x,y)) \,\&\, \lambda(y, \ell(x,y)))$;

2. $\forall xy\,\mathcal{X}\mathcal{Y}\,(x=y \vee \neg\lambda(x,\mathcal{X}) \vee \neg\lambda(x,\mathcal{Y}) \vee \neg\lambda(y,\mathcal{X}) \vee$
$\neg\lambda(y,\mathcal{Y}) \vee \mathcal{X}=\mathcal{Y})$;

3. $\forall \mathcal{X}\mathcal{Y}\,(\lambda(k(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\mathcal{X}) \,\&\, \lambda(k(\mathcal{X},\mathcal{Y}),\mathcal{Y}))$;

4. $\forall \mathcal{X}\,(\lambda(f(\mathcal{X}),\mathcal{X}) \,\&\, \lambda(g(\mathcal{X}),\mathcal{X}) \,\&\, \lambda(h(\mathcal{X}),\mathcal{X}) \,\&$
$f(\mathcal{X}) \neq g(\mathcal{X}) \,\&\, f(\mathcal{X}) \neq h(\mathcal{X}) \,\&\, g(\mathcal{X}) \neq h(\mathcal{X}))$;

5. $A \neq B$;

где λ – предикат, выражающий принадлежность точки прямой; x, y – переменные для точек; $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – переменные для прямых; ℓ, k – двухместные функциональные символы; f, g, h – одноместные функциональные символы; A,B – нульместные функциональные символы; A, B, $\ell(x,y)$ – представляют некоторые прямые; $k(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, $\alpha(\mathcal{X})$, где $\alpha \in \{f, g, h\}$, представляют некоторые точки.

Эта аксиоматика содержит положительные и отрицательные вхождения атомарных формул, начинающихся с предикатной буквы λ. Все аксиомы системы, кроме аксиом 2 и 5, содержат только положительные вхождения атомарных формул, начинающихся с предикатной буквы λ. Аксиома 2 содержит только отрицательные вхождения атомарных формул, начинающихся с предикатной буквы λ, причем несколько таких вхождений, и является единственной уравнивающей аксиомой в системе. Поэтому удобнее, по-видимому, в качестве минус-формул выбрать именно эти отрицательные вхождения атомарных формул в уравнивающую аксиому 2. Тогда в рассматриваемой системе специфи-

---

ж) Аксиомы выписаны после применения к ним сколемовского метода элиминации положительных кванторов.

ческих аксиом будет лишь одна отрицательная аксиома. Исчисление T для плоской проективной геометрии будет содержать одно правило вида (5), соответствующее аксиоме 2, причем $m=0$ и $n=0$. Все остальные специфические аксиомы теории будут заменены аксиомами вида (6), имеющими особенно простой вид.

6. Для некоторых конкретных математических теорий схема правил (5) (а также схема аксиом (6)) имеет довольно простой вид, например, для плоской проективной геометрии (в аксиоматике которой не содержится уравнивающих аксиом, имеющих только один дизъюнктный член), для арифметической системы Р.Робинсона (см. [4]). Однако существуют теории, например, арифметическая система Пресбургера, в которых нахождение варианта (см.[I]), являющегося основным звеном для определения схемы правил (5) и схемы аксиом (6), является весьма громоздким и трудно обозримым процессом.

В таких случаях можно либо более глубоко изучать конкретное исчисление (см.[4]) с целью получить вариант исчисления лучше приспособленный для поиска вывода, либо для прикладного исчисления L вместо исчисления T_1 рассматривать исчисление T^*, получаемое ниже описанным образом.

Нам нужно рассматривать лишь случай, когда в списке аксиом прикладного исчисления L содержатся уравнивающие аксиомы, состоящие из одного дизъюнктивного члена, а среди других аксиом теории имеются аксиомы, в матрице М (формула вида (4)) которых $m \neq 0$ (именно в таких случаях нахождение варианта может оказаться затруднительным). При построении исчисления T_1, равнообъемного такому исчислению L в правилах вида (I') и ($2'$) (см. [I]) вводится дублирование в антецеденте главной формулы, если она имеет вид равенства. Эти правила далее будем обозначать через (I^*) и (2^*), соответственно. В исчислении T^* вводится упрощенное определение варианта, а именно, в а р и а н т о м ф о р м у л ы $t=s$ называется сужение непосредственного варианта формулы $t=s$ (см.[I]). Исчисление T^* получается добавлением в исчисление T_1 следующего правила. Если уравнивающая специфическая аксиома состоит только из одного дизъюнктивного члена и имеет вид

$\forall x_1 \ldots x_m \, (t = \omega)$, то применимо правило

$$\frac{\left[\left[t = \omega \left|\begin{smallmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ T_1, \ldots, T_m \end{smallmatrix}\right.\right]\Big|^{\alpha}_{\beta}\right], u = v \;, \Gamma \to \quad \text{термы } T_1, \ldots, T_m \text{ удовлетворяют условию } (*)}{u = v, \Gamma \to}, \qquad (7)$$

где $\alpha \not\equiv \beta$, $\alpha \in \{u, v\}$, $\beta \in \{u, v\}$.

<u>Условие (*) :</u> Термы $T_1, \ldots, T_m$ таковы, что α является подтермом терма $\tilde{t} \leftrightharpoons \left[t \left|\begin{smallmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ T_1, \ldots, T_m \end{smallmatrix}\right.\right]$ или терма $\tilde{\omega} \leftrightharpoons \left[\omega \left|\begin{smallmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ T_1, \ldots, T_m \end{smallmatrix}\right.\right]$ и α не совпадает ни с $\tilde{t}$, ни с $\tilde{\omega}$.

Никаких других изменений в определении исчисления T_1 не делается, однако в схеме правил (5) (а также в схеме аксиом (6)), заменяющих правило типа сечения (3), нужно иметь в виду упрощенное определение варианта, за счет чего схемы упрощаются и число правил (5) (аксиом (6)) становится конечным для любого прикладного исчисления.

<u>Теорема 2.</u> Исчисления $L^{*'}$ и T^* равнообъемны.

Все главные формулы правила (5) (аксиомы (6)), являющиеся (не являющиеся) равенством двух термов будем называть уравнивающими (соответственно, неуравнивающими) главными формулами правила (5) (аксиомы (6)). Имеет место следующая теорема о регламентации вывода в исчислении T^* .

<u>Теорема 3</u>. Вывод $\mathcal{V}$ в исчислении можно перестроить в вывод $\mathcal{V}^*$ в том же исчислении, в котором правило (7) применяется лишь тогда, когда в Γ содержатся все неуравнивающие главные формулы одного из правил вида (5) (или одной из аксиом вида (6)).

При доказательстве теоремы 3 используется тот факт, что правило (7) необходимо применять в выводе в исчислении T^* лишь тогда, когда в выводе в исчислении T_1 применяется правило вида (5) (или аксиома вида (6)), при определении которого используется сложное определение варианта.

Автор весьма признателен С.Ю.Маслову за неоднократное чтение рукописи статьи и ценные замечания, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Плюшкевичене А.Ю. Устранение правил типа сечения в аксиоматических теориях с равенством. "Зап.научн.семинаров Ленингр. отд.Матем.ин-та АН СССР", Л., I969, I6, I75-I84.

2. Минц Г.Е. Теорема Эрбрана. Сб. "Математическая теория логического вывода", М., I967, 3II-350.

3. Рогава М.Г. О секвенциальных вариантах прикладных исчислений предикатов. "Зап.научн.семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР", М., I967, 4, I89-200.

4. Плюшкевичене А.Ю. Об устранении правил типа сечения из аксиоматических систем Робинсона и Пресбургера. Настоящий сборник, I86-I99.