P. Z. Mkrtychyan, On the solvability of the first boundary value problem for quasilinear elliptic equations of a higher order degenerating with respect to the arguments, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1980, Volume 96, 187–204

П.З.Мкртчян

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПО НЕЗАВИСИМЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Настоящая работа посвящена обобщению результатов работы [I] на случай уравнений высокого порядка и неоднородных граничных условий.

Именно, для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка, допускающих вырождение, характер которого определяется некоторой "матрицей" A, определенной в § I, доказана теорема существования обобщенного решения u задачи Дирихле, такого, что $(u-f)\in \overset{\circ}{H}{}^{m}_{\bar p}(A,\Omega)$, где $f(x)$ - продолжение граничных условий в область Ω, а $\overset{\circ}{H}{}^{m}_{\bar p}(A,\Omega)$ - пространство, определенное в § I.

Приведены условия, при которых решение является единственным.

Доказательство проводится методами теории монотонных операторов, ведущей свое начало от работ Ф.Браудера и Г.Минти (см.например, [5][6]).

В невырожденном случае соответствующие результаты для некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений были получены О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой [7].

Заметим, что в настоящей работе вырождение допускается лишь на множестве меры нуль. Краевая задача для квазилинейных уравнений 2-ого порядка с неотрицательной характеристической формой, допускающих вырождение на множестве произвольной меры изучена в работе А.В.Иванова [8].

В § I введены пространства $\overset{\circ}{H}{}^{m}_{\bar p}(A,\Omega)$ и доказаны некоторые их свойства, используемые в дальнейшем. В § 2 доказана теорема о разрешимости задачи Дирихле. В последующих параграфах приведены достаточные условия выполнимости требований, наложенных на операторы, соответствующие краевой задаче, именно, выписаны условия роста функций, входящих в дифференциальное уравнение, алгебраические критерии выполнимости условий коэрцитивности, дефинитности и полуограниченности вариации, а также приведен пример оператора с дефинитной вариацией.

§ I. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^{m}_{\bar p}(A,\Omega)$

Пусть Ω - ограниченная область в R^n, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ - целочисленные мультииндексы.

Для произвольного "вектора" $\bar{\xi} = \{\xi_\beta : \xi_\beta \in R \ , |\beta| = m\}$ определим отображение $A\bar{\xi}$ равенствами

$$A\bar{\xi} = \{A_\alpha \bar{\xi} : |\alpha| = m\} \ , \quad A_\alpha \bar{\xi} = \sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\, \xi_\beta \ , \tag{I.I}$$

где $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(x)$ - измеримые в Ω функции и

$$a_{\alpha\beta} \in L_{p_\alpha}(\Omega), \ |\beta| = m, \ p_\alpha > 1 \ , \ |\alpha| = m \ . \tag{I.2}$$

Пусть, кроме того, отображение A обратимо для п.в. $x \in \Omega$, и для элементов $b_{\beta\alpha}(x)$, $|\beta| = |\alpha| = m$ "матрицы" $B = A^{-1}$, определяемых из равенств

$$\xi_\beta = \sum_{|\alpha|=m} b_{\beta\alpha} A_\alpha \bar{\xi} \quad , \quad |\beta| = m \tag{I.3}$$

выполнены условия

$$b_{\beta\alpha} \in L_{r_{\beta\alpha}}(\Omega), \ r_{\beta\alpha} \in (1, \infty], |\beta| = |\alpha| = m. \tag{I.4}$$

Обозначим

$$q_\beta = \min_{|\alpha|=m} \left\{ \frac{r_{\beta\alpha} p_\alpha}{r_{\beta\alpha} + p_\alpha} \right\} \ , \ |\beta| = m \ . \tag{I.5}$$

Для всех мультииндексов β , $|\beta| \leqslant m$ определим числа q^*_β следующимобразом:

$$q^*_\beta = q_\beta \qquad \text{при} \quad |\beta| = m \ . \tag{I.6}$$

При $|\beta| < m$ числа q^*_β определим из следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{q^*_\beta} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} - 1\right) \qquad , \text{ если } \sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} > 1 \\ q^*_\beta &= \infty \qquad , \text{ если } \sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{I.7}$$

Справедлива следующая

ЛЕММА I.I. Пусть выполнены условия (I.2)-(I.7). Тогда для любой функции $u \in \overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$ и любого мультииндекса $\beta, |\beta| \leqslant m-1$ справедливы неравенства:

$$\| \mathcal{D}^\beta u \|_{q_\beta,\Omega} \leqslant C_{1\beta} \sum_{|\alpha|=m} \| \mathcal{D}^\alpha u \|_{q_\alpha,\Omega} \leqslant C_{2\beta} \sum_{|\alpha|=m} \| A^\alpha \mathcal{D}^m u \|_{p_\alpha,\Omega}, \tag{I.8}$$

где $q_\beta < q^*_\beta$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} > 1$, $q_\beta < \infty$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} = 1$

$q_\beta = \infty$ при $\sum_{|\gamma|=1} \frac{1}{q^*_{\beta+\gamma}} < 1$, $C_{1\beta}, C_{2\beta}$ - положительные константы

$\mathcal{D}^m u \equiv \{\mathcal{D}^\alpha u : |\alpha| = m\}$ При $q_\beta = \infty$ под нормой $\|\cdot\|_{q_\beta,\Omega}$ подразумевается норма $\|\cdot\|_{C(\Omega)}$.

Из равномерной ограниченности величин $\sum\limits_{|\alpha|=m} \|A^\alpha \mathcal{D}^m u_k\|_{p_\alpha,\Omega}$ для некоторого семейства функций $\{u_k\} \subset \overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$ следует компактность семейства $\{\mathcal{D}^\beta u_k\}$ в пространстве $L_{q_\beta}(\Omega)$ для любого $\beta, |\beta| \leqslant m-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО правого неравенства (I.8) просто. Действительно, пусть $|\alpha| = m$. Тогда в силу (I.3)

$$\mathcal{D}^\alpha u = \sum_{|\gamma|=m} b_{\alpha\gamma} A_\gamma \mathcal{D}^m u \,, \tag{I.9}$$

$$\|\mathcal{D}^\alpha u\|_{q_\alpha,\Omega} \leqslant C \sum_{|\gamma|=m} \Big(\int_\Omega |b_{\alpha\gamma}|^{q_\alpha} |A_\gamma \mathcal{D}^m u|^{q_\alpha} dx \Big)^{\frac{1}{q_\alpha}}, \quad C > 0 \,. \tag{I.10}$$

Применяя к интегралу в правой части (I.10) неравенство Гельдера с показателем p_γ / q_α при $p_\gamma > q_\alpha$ и оценивая функции $b_{\alpha\gamma}$ через максимум их модуля при $p_\gamma = q_\alpha$ (в этом случае $r_{\alpha\gamma} = \infty$), докажем правое неравенство (I.8).

Левое неравенство и остальные утверждения теоремы являются простыми следствиями результатов работы [2] (см. леммы I,2,3, теорему 3 работы [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Если все q_β, $|\beta| = m$ равны между собой, то показатели q_β, $|\beta| \leqslant m-1$ подсчитываются по теореме вложения С.Л.Соболева.

Обозначим через $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ замыкание множества функций $\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$ по норме

$$\|u\| \equiv \sum_{|\alpha|=m} \|A_\alpha \mathcal{D}^m u\|_{p_\alpha,\Omega} \tag{I.II}$$

Выполнение аксиом нормы очевидно. В частности, то, что из следует $u = 0$, вытекает из неравенств (I.8).

Очевидно, что $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ - сепарабельное банахово пространство.

Из леммы I.I и определения пространства $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ вытекает

ЛЕММА I.2. Пусть выполнены условия леммы I. Тогда для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ существуют обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $\mathcal{D}^\beta u$, $|\beta| \leqslant m$, причем справедливы неравенства (I.8).

Из равномерной ограниченности величин $\|u_k\|$ для любого семейства $\{u_k\} \subset \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ следует компактность семейства $\{\mathcal{D}^\beta u_k\}$ в пространстве $L_{q_\beta}(\Omega)$, для любого β, $|\beta| \leqslant m-1$.

ЛЕММА I.3. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ рефлексивно. Всякий линейный функционал $\mathcal{F}$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ можно представить в виде

$$\langle \mathcal{F}, \eta \rangle = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega f_\alpha \mathcal{D}^\alpha \eta \, dx, \quad \eta \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega),$$

где "вектор"-функция $\bar f = \{f_\alpha : |\alpha| = m\}$ такова, что

$$B^* \bar f \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p'_\alpha}(\Omega), \text{ то есть } B^*_\alpha \bar f \equiv \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha} f_\beta \in L_{p'_\alpha}(\Omega),$$

где $\frac{1}{p'_\alpha} + \frac{1}{p_\alpha} = 1$ *), матрица $B = A^{-1}$ определена соотношениями (I.3), B^* - "матрица", сопряженная к B.

Для нормы $\|\mathcal{F}\|_*$ функционала $\mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{F}\|_* \leqslant \sum_{|\alpha|=m} \|B^*_\alpha \bar f\|_{p'_\alpha, \Omega}. \tag{I.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\pi(u) = A\mathcal{D}^m u$ является линейной изометрией пространства $\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ на замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства $\prod_{|\alpha|=m} L_{p_\alpha}(\Omega)$. Но любое замкнутое подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно.

Пусть $\mathcal{F}$ - линейный функционал в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$. Тогда $\mathcal{F} \circ \pi^{-1}$ есть линейный функционал в пространстве $\pi(\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)) \subset \prod_{|\alpha|=m} L_{p_\alpha}(\Omega)$. По теореме Хана-Банаха такой функционал можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $\prod_{|\alpha|=m} L_{p_\alpha}(\Omega)$. Общий же вид линейного функционала в последнем пространстве определяется формулой:

$$\Phi(\bar v) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega h_\alpha v_\alpha \, dx, \quad \bar v = \{v_\alpha : v_\alpha \in L_{p_\alpha}(\Omega), |\alpha| = m\} \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p_\alpha}(\Omega)$$

где $\bar h = \{h_\alpha : h_\alpha \in L_{p'_\alpha}(\Omega), |\alpha| = m\} \in \prod_{|\alpha|=m} L_{p'_\alpha}(\Omega)$.

Пусть $\Phi = \mathcal{F} \circ \pi^{-1}$. Тогда для любого $\eta \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$

$$\langle \mathcal{F}, \eta \rangle = (\mathcal{F} \circ \pi^{-1})(\pi(\eta)) = \Phi(A\mathcal{D}^m \eta) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega h_\alpha A_\alpha \mathcal{D}^m \eta \, dx =$$

$$= \int_\Omega (\bar h, A\mathcal{D}^m \eta) \, dx = \int_\Omega (A^* \bar h, \mathcal{D}^m \eta) \, dx,$$

---

*) Здесь и далее для любого числа $p \geqslant 1$ через p' будем обозначать сопряженное число, определяемое равенством $1/p + 1/p' = 1$. Если $p = \infty$, то $p' = 1$ и наоборот.

где A^* - "матрица", сопряженная к матрице A , $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в конечномерном эвклидовом пространстве. Обозначив $A^*\bar{h}=\bar{f}$, то есть $f_\beta=\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha\beta} h_\alpha$, учитывая, что $B^*=A^{*-1}$, получим требуемое представление функционала $\mathcal{F}$.

Для доказательства оценки (I.I2) заметим, что

$$\langle \mathcal{F},\eta\rangle=\int_\Omega (B^*\bar{f}, A\mathcal{D}^m\eta)\,dx' .$$

Применяя неравенство Гельдера, докажем (I.I2). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Пусть функции $f_\beta\in L_{q'_\beta}(\Omega)$, $|\beta|\leqslant m$, где числа q_β удовлетворяют условиям леммы I.I. Тогда интеграл

$$\int_\Omega f_\beta \mathcal{D}^\beta\eta\,dx , \quad \eta\in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar{p}}(A,\Omega)$$

определяет некоторый линейный функционал $\mathcal{F}$ в $\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar{p}}(A,\Omega)$, причем для нормы $\|\mathcal{F}\|_*$ функционала $\mathcal{F}$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{F}\|_*\leqslant C_{2\beta}\|f\|_{q'_\beta,\Omega} ,$$

где $C_{2\beta}$ - положительная константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство Гельдера и учитывая неравенства (I.8), справедливые для любой функции $\eta\in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar{p}}(A,\Omega)$, докажем утверждение.

§ 2. Теорема о разрешимости задачи Дирихле

Рассмотрим в области Ω краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}\mathcal{D}^\alpha \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma u)=0 \\ &\mathcal{D}^\omega u\big|_{\partial\Omega}=f_\omega(x'),\ x'\in\partial\Omega,\ |\omega|\leqslant m-1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.I)$$

Здесь α,ω,γ - целочисленные мультииндексы, причем γ пробегает всевозможные значения $|\gamma|\leqslant m$, m - целое число, $m\geqslant 1$.

Относительно функций $f_\omega(x')$, заданных на границе $\partial\Omega$ области Ω , будем предполагать выполненным следующее

УСЛОВИЕ I. Существует функция $f(x)$, определенная в области Ω , имеющая обобщенные производные $\mathcal{D}^\gamma f$, $|\gamma|\leqslant m$, причем

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\mathcal{D}^\beta f\in L_{p_\alpha}(\Omega) , && |\alpha|=m \\ &\mathcal{D}^\omega f\in L_{q_\omega}(\Omega) , && |\omega|\leqslant m-1 \\ &\mathcal{D}^\omega f|_{\partial\Omega}=f_\omega , && |\omega|\leqslant m-1 \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

,

где функции $a_{\alpha\beta}$ и числа p_α, q_ω удовлетворяют условиям леммы I.I.

Относительно функций $\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)$, $|\alpha|\leqslant m$ будем предполагать выполненным следующее

УСЛОВИЕ II. Функции $\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)$, $|\alpha|\leqslant m$, определенные для $x\in\Omega$, $\xi_\gamma\in R$, $|\gamma|\leqslant m$, удовлетворяют условию Каратеодори (то есть эти функции измеримы по $x\in\Omega$ при любых $\xi_\gamma\in R$, $|\gamma|\leqslant m$ и непрерывны по $\xi_\gamma\in R, |\gamma|\leqslant m$ при п.в. $x\in\Omega$). Кроме того, при любых $\xi_\gamma(x)$, $|\gamma|\leqslant m$ таких, что $\xi_\gamma\in L_{q_\gamma}(\Omega)$ при $|\gamma|\leqslant m-1$ и $\sum\limits_{|\gamma|=m} a_{\alpha\gamma}\xi_\gamma\in L_{p_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha|=m$, где числа q_γ, p_α удовлетворяют условиям леммы I.I, выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &\sum b_{\beta\alpha}\mathcal{L}_\beta(x,\xi_\gamma(x))\in L_{p'_\alpha}(\Omega), \ |\alpha|=m \\ &\mathcal{L}_\beta(x,\xi_\gamma(x))\in L_{q'_\beta}(\Omega), \ |\beta|\leqslant m-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

При условии II в силу леммы I.3 и замечания I.2 при фиксированном $v\in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ интеграл

$$\langle\mathcal{L}v,\eta\rangle\equiv\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+v))\,\mathcal{D}^\alpha\eta\,dx\ , \tag{2.4}$$

где f удовлетворяет условию I, порождает линейный непрерывный функционал $\mathcal{L}v$ относительно $\eta\in\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$. Таким образом, формула (2.4) определяет нелинейный оператор $\mathcal{L}$, отображающий пространство $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ в сопряженное пространство $(\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega))^*$. Через $\langle\mathcal{L}v,\eta\rangle$ обозначено значение функционала $\mathcal{L}v$ на элементе η.

Обобщенным решением задачи (2.I) назовем функцию $u=f+v$ где функция f удовлетворяет условию I, а функция $v\in\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ и является решением уравнения

$$\mathcal{L}v=0 \tag{2.5}$$

Очевидно, что функция u будет удовлетворять интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m}\mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma u)\,\mathcal{D}^\alpha\eta\,dx=0 \tag{2.6}$$

при любой функции $\eta\in\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$

Докажем, что оператор $\mathcal{L}$ непрерывен. Для этого рассмотрим операторы

$$\mathcal{M}_\alpha:\prod_{|\beta|\leqslant m}L_{q_\beta}(\Omega)\longrightarrow L_{p'_\alpha}(\Omega),\ |\alpha|=m,$$

$$\mathcal{M}_\alpha : \prod_{|\beta|\leqslant m} L_{q_\beta}(\Omega) \longrightarrow L_{q'_\alpha}(\Omega)\ ,\ |\alpha|\leqslant m-1\ ,$$

определенные соотношениями

$$(\mathcal{M}_\alpha \vec{\xi})(x) \equiv \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha} \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\gamma(x)) \qquad \text{при } |\alpha| = m$$

$$(\mathcal{M}_\alpha \vec{\xi})(x) \equiv \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma(x)) \qquad \text{при } |\alpha| \leqslant m-1\ ,$$

где $\vec{\xi} = \{\xi_\gamma : \xi_\gamma \in L_{q_\gamma}(\Omega),\ |\gamma|\leqslant m\}$, то есть $\vec{\xi} \in \prod_{|\beta|\leqslant m} L_{q_\beta}(\Omega)$.

Из условия II следует, что функции

$$(x, \vec{\xi}) \longrightarrow \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha}(x) \mathcal{L}_\beta(x, \xi_\gamma)\ ,\quad |\alpha| = m$$

$$(x, \vec{\xi}) \longrightarrow \mathcal{L}_\alpha(x, \xi_\gamma) \qquad |\alpha| \leqslant m-1$$

удовлетворяют условию Каратеодори. Тогда, перерабатывая соответствующим образом рассуждения, приведенные в [4](стр.29-41) в связи с изучением оператора Немыцкого, можно доказать непрерывность и ограниченность операторов $\mathcal{M}_\alpha$, $|\alpha| \leqslant m$.

Пусть последовательность $v_k \longrightarrow v$ при $k \to \infty$ в $\overset{0}{H}{}^m_p(A,\Omega)$, $u_k = f + v_k$, $u = f + v$. По лемме I.2 $\|\mathcal{D}^\gamma u_k - \mathcal{D}^\gamma u\|_{q_\gamma,\Omega} = \|\mathcal{D}^\gamma v_k - \mathcal{D}^\gamma v\|_{q_\gamma,\Omega} \longrightarrow 0$ для всех $|\gamma| \leqslant m$. Учитывая лемму I.3 и замечание I.2, можно получить

$$\|\mathcal{L} v_k - \mathcal{L} v\|_* \leqslant \sum_{|\alpha|=m} \Big\| \sum_{|\beta|=m} b_{\beta\alpha}(\mathcal{L}_\beta(x, \mathcal{D}^\gamma u_k) - \mathcal{L}_\beta(x, \mathcal{D}^\gamma u))\Big\|_{p'_\alpha,\Omega} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} C_{2\alpha} \|\mathcal{L}_\alpha(x, \mathcal{D}^\gamma u_k) - \mathcal{L}_\alpha(x, \mathcal{D}^\gamma u)\|_{q'_\alpha,\Omega}\ . \tag{2.7}$$

Из (2.7) и непрерывности и ограниченности операторов $\mathcal{M}_\alpha$, $|\alpha| \leqslant m$ следует непрерывность и ограниченность оператора $\mathcal{L}$.

Тогда из теоремы Ф.Браудера вытекает следующая

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть выполнены условия I и II и, кроме того,

УСЛОВИЕ III (коэрцитивность). Существует такое число $\rho_0 > 0$, что для любого $v \in \overset{0}{H}{}^m_p(A,\Omega)$, для которого $\|v\| = \rho_0$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{L} v, v \rangle \geqslant 0 \tag{2.8}$$

УСЛОВИЕ IУ. (полуограниченность вариации) При любом $\rho > 0$ для любых $v, \eta \in \overset{0}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ таких, что $\|v\| \leqslant \rho$, $\|\eta\| \leqslant \rho$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{L} v - \mathcal{L}\eta, v - \eta \rangle \geqslant -\mu(\rho, \|v-\eta\|')\ , \tag{2.9}$$

где функция $\mu(\rho,\sigma)$ неотрицательна, непрерывна и такова, что

$$\lim_{\sigma\to+0}\frac{\mu(\rho,\sigma\tau)}{\sigma}=0 \tag{2.10}$$

при любых $\rho\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0$, а $\|\cdot\|'$ - норма, компактная по сравнению с $\|\cdot\|$.

Тогда уравнение (2.5) имеет хотя бы одно решение v, и, следовательно, функция $u=f+v$ является решением задачи (2.I).

Несколько необычная форма условия коэрцитивности связана с тем, что в данной работе рассматриваются уравнения, приведенные к виду $\mathcal{L}v=0$. В удобном для нас виде теорема Ф.Браудера приведена с доказательством в работе [I] (теорема I.I).

§ 3. Достаточные условия выполнимости условия II

ЛЕММА 3.I. Пусть функции $\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)$, $|\alpha|\leqslant m$ удовлетворяют условию Каратеодори и для п.в. $x\in\Omega$ и произвольных $\xi_\gamma\in R$, $|\gamma|\leqslant m$ выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&|B_\alpha^*\bar{\mathcal{L}}(x,\xi_\gamma)|\leqslant\mu(\xi)\Big(\sum_{|\beta|=m}|A_\beta\bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{p'_\alpha}}+\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant m-1\\ q_\gamma<\infty}}|\xi_\gamma|^{\frac{q_\gamma}{p'_\alpha}}+\varphi_\alpha(x)\Big),|\alpha|=m\\
&|\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)|\leqslant\mu(\xi)\Big(\sum_{|\beta|=m}|A_\beta\bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{q'_\alpha}}+\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant m-1\\ q_\gamma<\infty}}|\xi_\gamma|^{\frac{q_\gamma}{q'_\alpha}}+\varphi_\alpha(x)\Big),|\alpha|\leqslant m-1
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

где $\mu(\xi)$ - непрерывная неотрицательная функция, зависящая от тех ξ_γ, $|\gamma|\leqslant m-1$, для которых $q_\gamma=\infty$, $\varphi_\alpha\in L_{p'_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha|=m$, $\varphi_\alpha\in L_{q'_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha|\leqslant m-1$, $\bar{\mathcal{L}}=\{\mathcal{L}_\alpha:|\alpha|=m\}$, $\bar{\xi}=\{\xi_\gamma:|\gamma|=m\}$.

Тогда будет выполнено условие II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. утверждения очевидно.

Легко показать, что первые из неравенств (3.I) эквивалентны неравенству

$$|(\bar{\mathcal{L}}(x,\xi_\gamma),\bar{\eta})|\leqslant\mu(\xi)\sum_{|\alpha|=m}\Big(\sum_{|\beta|=m}|A_\beta\bar{\xi}|^{\frac{p_\beta}{p'_\alpha}}+\sum_{\substack{|\gamma|\leqslant m-1\\ q_\gamma<\infty}}|\xi_\gamma|^{\frac{q_\gamma}{q'_\alpha}}+\varphi_\alpha\Big)|A_\alpha\bar{\eta}|$$

при произвольном $\bar{\eta}=\{\eta_\beta:|\beta|=m\}$, где

$$(\bar{\mathcal{L}},\bar{\eta})=\sum_{|\beta|=m}\mathcal{L}_\beta\eta_\beta$$

Последним обозначением мы будем пользоваться и ниже.

§ 4. Алгебраические критерии выполнимости условия коэрцитивности

ЛЕММА 4.I. Пусть для любых $\xi_\gamma \in R$, $|\gamma| \leqslant m$ выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} &(\bar{\mathcal{L}}(x,\xi_\gamma),\bar\xi) \geqslant \sum_{|\beta|=m} K_\beta |A_\beta \bar\xi|^{p_\beta} - \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \tilde K_\beta |\xi_\beta|^{l_\beta} - |\Psi(x)| \\ &|B_\alpha^* \bar{\mathcal{L}}(x,\xi_\gamma)| \leqslant K\Big(\sum_{|\beta|=m} |A_\beta \bar\xi|^{\frac{p_\beta}{p'_\alpha}} + \sum_{|\beta|\leqslant m-1} |\xi_\beta|^{\frac{\tilde l_\beta}{p'_\alpha}} + |\Psi_\alpha(x)|\Big) \end{aligned}\right\} \tag{4.I}$$

при $|\alpha| = m$ и

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)\xi_\alpha \geqslant K_\alpha|\xi_\alpha|^{p_\alpha} - \Big(\sum_{|\beta|=m} K_{\beta\alpha}|A_\beta\bar\xi|^{\frac{p_\beta}{l'_\alpha}} + \sum_{|\beta|\leqslant m-1} K_{\beta\alpha}|\xi_\beta|^{\frac{\tilde l_\beta}{l'_\alpha}} + |\Psi_\alpha(x)|\Big)|\xi_\alpha| \\ &|\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)| \leqslant K\Big(|\xi_\alpha|^{q_\alpha-1} + \sum_{|\beta|=m}|A_\beta\bar\xi|^{\frac{p_\beta}{q'_\alpha}} + \sum_{|\beta|\leqslant m-1}|\xi_\beta|^{\frac{\tilde l_\beta}{q'_\alpha}} + |\tilde\Psi_\alpha(x)|\Big) \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

при $|\alpha| \leqslant m-1$, где $K_\alpha > 0$ при $|\alpha| = m$, $K_\alpha \geqslant 0$ при $|\alpha| \leqslant m-1$, $K \geqslant 0$, $\tilde K_\alpha \geqslant 0$, $K_{\beta\alpha} \geqslant 0$; $1 < p_\beta \leqslant q_\beta$ при $|\beta| \leqslant m-1$; показатели l_β таковы, что для каждого β или I) существует такой мультииндекс $\gamma(\beta)$, $|\gamma(\beta)| \leqslant m-|\beta|-1$, что $l_\beta < \tilde l_\beta = p_{\beta+\gamma(\beta)}$, $K_{\beta+\gamma(\beta)} > 0$ или 2) $l_\beta < \tilde l_\beta = p = \min\limits_{|\alpha|=m}\{p_\alpha\}$; $\Psi \in L_1(\Omega)$, $\Psi_\alpha \in L_{p_\alpha}(\Omega)$, если $|\alpha| = m$, $\Psi_\alpha \in L_{q_\alpha}(\Omega)$, если $|\alpha| \leqslant m-1$; $\tilde\Psi_\alpha \in L_{q_\alpha}(\Omega)$ при $|\alpha| \leqslant m-1$, числа $p_\beta, |\beta| = m, q_\beta, |\beta| \leqslant m-1$ удовлетворяют условиям леммы I.I.

Тогда оператор $\mathcal{L}$ коэрцитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ и α, $|\alpha| \leqslant m-1$ введем обозначения

$$\Omega_+^\alpha(u) = \{x : x \in \Omega, \mathcal{D}^\alpha(f+u)\mathcal{D}^\alpha u > 0\}$$

$$\Omega_-^\alpha(u) = \{x : x \in \Omega, \mathcal{D}^\alpha(f+u)\mathcal{D}^\alpha u \leqslant 0\}$$

где функция f удовлетворяет условию I.

Сразу заметим, что

$$|\mathcal{D}^\alpha u| \leqslant |\mathcal{D}^\alpha f| \qquad \text{при} \quad x \in \Omega_-^\alpha(u),\ |\alpha| \leqslant m-1 \tag{4.3}$$

Всюду ниже через ε, возможно, с индексами, будем обозначать произвольно малую положительную константу, а через K_ε также, возможно, с индексами, достаточно большую положительную константу.

Пусть мультииндекс β, $|\beta| \leqslant m-1$ таков, что выполнено условие I) леммы. Тогда, используя нужное число раз известные неравенства

$$\int_\Omega |u|^\ell dx \leqslant C \int_\Omega |u_{x_i}|^\ell dx\ , \ i=1,\ldots,n\ ,\ C>0\ ,$$

справедливые для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_\ell(\Omega)$, неравенства Гельдера и Юнга, нетрудно получить для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{\tilde{\ell}_\beta} dx \leqslant C \int_\Omega |\mathcal{D}^{\beta+\gamma(\beta)} u|^{p_{\beta+\gamma(\beta)}} dx\ ,\ C>0 \\ &\int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{\ell_\beta} dx \leqslant \varepsilon \int_\Omega |\mathcal{D}^{\beta+\gamma(\beta)} u|^{p_{\beta+\gamma(\beta)}} dx + K_\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Если же мультииндекс β таков, что выполнено условие 2) леммы, то для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$, пользуясь неравенствами Гельдера и Юнга и учитывая неравенства (I.8), получаем

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{\tilde{\ell}_\beta} dx \leqslant C\|u\|^p\ ,\ C>0 \\ &\int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{\ell_\beta} dx \leqslant \varepsilon\|u\|^p + K_\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Для произвольной функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u,u\rangle \equiv &\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\,\mathcal{D}^\alpha u\,dx = \\ = &\int_\Omega (\bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u)),\mathcal{D}^m(f+u))\,dx - \int_\Omega (\bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u)),\mathcal{D}^m f)\,dx + \\ + &\sum_{|\alpha|\leqslant m-1}\Big[\int_{\Omega^\alpha_+(u)} \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha u\,dx + \int_{\Omega^\alpha_-(u)} \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha u\,dx\Big]\ . \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Учитывая условия леммы, неравенства

$$\left.\begin{aligned} &|a+b|^q \leqslant 2^{q-1}(|a|^q+|b|^q) \\ &|a+b| \geqslant 2^{1-q}(|a|^q-|b|^q) \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

справедливые при любых a, b для $q \geqslant 1$, неравенства (4.3)-(4.5) и используя неравенства Юнга и Гельдера с соответствующими показателями, оценим интегралы правой части (4.6).

Для первого интеграла получим следующую оценку снизу:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u)),\mathcal{D}^m(f+u))dx \geqslant \int_\Omega \Big(\sum_{|\beta|=m} K_\beta |A_\beta \mathcal{D}^m(f+u)|^{p_\beta} - \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \tilde{K}_\beta |\mathcal{D}^\beta(f+u)|^{\ell_\beta} - \\ &-|\Psi|\Big)dx \geqslant \int_\Omega \Big[\sum_{|\beta|=m} 2^{1-p_\beta} K_\beta (|A_\beta \mathcal{D}^m u|^{p_\beta} - |A_\beta \mathcal{D}^m f|^{p_\beta}) - \sum_{|\beta|\leqslant m-1} 2^{\ell_\beta-1} K_\beta (|\mathcal{D}^\beta u| + \end{aligned}$$

$$+|\mathcal{D}^\beta f|^{\ell_\beta})-|\Psi|]dx \geqslant \sum_{|\beta|=m} 2^{1-p_\beta} K_\beta \int_\Omega |A_\beta \mathcal{D}^m u|^{p_\beta} dx -$$

$$-\varepsilon \|u\|^p - \varepsilon \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m-1 \\ K_\alpha>0}} \int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u|^{p_\alpha} dx - K_\varepsilon \quad . \tag{4.8}$$

Второй интеграл правой части (4.6) оценим сверху:

$$\left|\int_\Omega (\bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u)),\mathcal{D}^m f)dx\right| = \left|\int_\Omega (B^*\bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u)),A\mathcal{D}^m f)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |B^*_\alpha \bar{\mathcal{L}}(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))||A_\alpha \mathcal{D}^m f| dx \leqslant \varepsilon_1 \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |A_\beta \mathcal{D}^m u|^{p_\beta} dx +$$

$$+\varepsilon_1 \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{\tilde{\ell}_\beta} dx + K_{\varepsilon_1} \leqslant \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |A_\beta \mathcal{D}^m u|^{p_\beta} dx + \tag{4.9}$$

$$+\varepsilon \sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-1 \\ K_\beta>0}} \int_\Omega |\mathcal{D}^\beta u|^{p_\beta} dx + \varepsilon \|u\|^p + K_\varepsilon \quad .$$

Для оценки третьего интеграла правой части (4.6) заметим, что если $\xi_\alpha \eta_\alpha > 0$, то умножая обе части первого из неравенств (4.2) на $\frac{\eta_\alpha}{\xi_\alpha} = \frac{|\eta_\alpha|}{|\xi_\alpha|}$, получим для любого α, $|\alpha| \leqslant m-1$

$$\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)\eta_\alpha \geqslant K_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha-1}|\eta_\alpha| - (\sum_{|\beta|=m} K_{\beta\alpha}|A_\beta \xi|^{\frac{p_\beta}{\ell'_\alpha}} + \tag{4.10}$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant m-1} K_{\beta\alpha}|\xi_\beta|^{\frac{\tilde{\ell}_\beta}{\ell'_\alpha}} + |\Psi_\alpha|)|\eta_\alpha| \quad .$$

Учитывая (4.10) и (4.3), для любого α, $|\alpha| \leqslant m-1$ и любой функции $u \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar{p}}(A,\Omega)$ получим

$$\int_{\Omega^\alpha_+(u)} \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha u\, dx \geqslant \int_{\Omega^\alpha_+(u)} [K_\alpha |\mathcal{D}^\alpha(f+u)|^{p_\alpha-1}|\mathcal{D}^\alpha u| -$$

$$-\sum_{|\beta|=m} K_{\beta\alpha}|A_\beta \mathcal{D}^m(f+u)|^{\frac{p_\beta}{\ell'_\alpha}} + \sum_{|\beta|\leqslant m-1} K_{\beta\alpha}|\mathcal{D}^\beta(f+u)|^{\frac{\ell_\beta}{\ell'_\alpha}} + |\Psi_\alpha|)|\mathcal{D}^\alpha u|]dx \geqslant$$

$$\int_{\Omega^\alpha_+(u)} 2^{2-p_\alpha} K_\alpha |\mathcal{D}^\alpha u|^{p_\alpha} dx - \int_\Omega [2^{2-p_\alpha}|\mathcal{D}^\alpha f|^{p_\alpha-1}|\mathcal{D}^\alpha u| + \sum_{|\beta|=m} \varepsilon |A_\beta \mathcal{D}^m u|^{p_\beta} +$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant m-1} \varepsilon |\mathcal{D}^\beta u|^{\tilde{\ell}_\beta} + K_{1\varepsilon}|\mathcal{D}^\alpha u|^{\ell_\alpha}]dx - \left(\int_\Omega |\Psi_\alpha|^{q'_\alpha} dx\right)^{\frac{1}{q'_\alpha}} \left(\int_\Omega |\mathcal{D}^\alpha u|^{q_\alpha} dx\right)^{\frac{1}{q_\alpha}} - \tag{4.11}$$

$$-K_{2\varepsilon}\geqslant 2^{2-p_\alpha}K_\alpha\int_\Omega|D^\alpha u|^{p_\alpha}dx-\varepsilon\|u\|^p-\varepsilon\sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-1\\ K_\beta>0}}\int_\Omega|D^\beta u|^{p_\beta}dx-$$

$$-\varepsilon\sum_{|\beta|=m}\int_\Omega|A_\beta D^m u|^{p_\beta}dx-K_\varepsilon\ .$$

При оценке четвертого интеграла правой части (4.6) опять учитывая (4.3), получаем для всех α, $|\alpha|\leqslant m-1$

$$\Big|\int_{\Omega^\alpha_-(u)}\mathcal{L}_\alpha(x,D^\gamma(f+u))D^\alpha u\,dx\Big|\leqslant\int_{\Omega^\alpha_-(u)}K\Big(|D^\alpha(f+u)|^{q_\alpha-1}+\sum_{|\beta|=m}|A_\beta D^m(f+u)|^{\frac{p_\beta}{q'_\alpha}}+$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant m-1}|D^\beta(f+u)|^{\frac{\tilde{l}_\beta}{q'_\alpha}}+|\tilde{\Psi}_\alpha(x)|\Big)|D^\alpha u|dx\leqslant\varepsilon\sum_{|\beta|=m}|A_\beta D^m u|^{p_\beta}dx+$$

$$+\varepsilon\|u\|^p+\varepsilon\sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-1\\ K_\beta>0}}\int_\Omega|D^\beta u|^{p_\beta}dx+K_\varepsilon \tag{4.12}$$

Из (4.6), (4.8), (4.9), (4.II) и (4.II) следует оценка

$$\langle\mathcal{L}u,u\rangle\geqslant C_1\sum_{|\beta|=m}\int_\Omega|A_\beta D^m u|^{p_\beta}dx+ \tag{4.13}$$

$$+C_2\sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-1\\ K_\beta>0}}\int_\Omega|D^\beta u|^{p_\beta}dx-\varepsilon\|u\|^p-K_\varepsilon$$

где C_1, C_2 – положительные константы, из которой очевидным образом следует коэрцитивность оператора $\mathcal{L}$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.I. Из доказательства леммы 4.I видно, что в условиях (4.I), (4.2) всюду можно l_β заменить на $\tilde{l}_\beta$. Только при этом входящие в них константы должны удовлетворять некоторым условиям, смысл которых заключается в том, что константы K_α , $|\alpha|\leqslant m$ должны быть достаточно большими по отношению к остальным константам, входящим в эти неравенства.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. В условиях леммы 4.I можно опустить требование $p_\beta\leqslant q_\beta$ для тех β, $|\beta|\leqslant m-1$, для которых $K_\beta>0$, если потребовать полуограниченности вариации оператора в пространстве $\tilde{H}$, полученном замыканием $\overset{\circ}{C}{}^m(\Omega)$ по норме $\|u\|_1\equiv$ $\equiv\|u\|+\sum_{\substack{|\beta|\leqslant m-1\\ K_\beta>0,\,p_\beta>q_\beta}}\|D^\beta u\|_{p_\beta,\Omega}$; для тех α , $|\alpha|\leqslant m-1$, для которых

$K_\alpha > 0$, $p_\alpha > q_\alpha$ во втором из неравенств (4.2) q_α заменить на p_α и для тех же α в условии I вместо второго из условий (2.2) потребовать, чтобы $\mathcal{D}^\alpha f \in L_{p_\alpha}(\Omega)$, так как при этом оценка (4.I3) гарантирует разрешимость уравнения $\mathcal{L}u = 0$ в пространстве $\tilde{H}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В случае однородных граничных условий доказательство леммы 4.I значительно упрощается, причем, в этом случае даже нет необходимости пользоваться вторыми из неравенств (4.I) и (4.2), которые, тем самым, могут быть опущены.

Можно привести и другие критерии выполнимости условия коэрцитивности, аналогичные тем, что выписаны в пункте 4 § 2 и пункте 4 § 3 работы [I], однако мы этого не будем делать ввиду аналогичности доказательства с одной стороны и громоздкости записи с другой.

§ 5. Алгебраические критерии дефинитности и полуограниченности вариации. Пример оператора с дефинитной вариацией

Оператор называется оператором с дефинитной вариацией, если для любых $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$

$$\langle \mathcal{L}u - \mathcal{L}v, u - v\rangle \geqslant d \sum_{|\alpha|=m} \| A_\alpha \mathcal{D}^m (u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}, \qquad (5.I)$$

где d – положительная константа.

Очевидно, оператор с дефинитной вариацией тем более является оператором с полуограниченной вариацией. Очевидно также, что при дефинитности вариации оператора $\mathcal{L}$ уравнение $\mathcal{L}u = 0$ имеет единственное решение. Более того, оператор $\mathcal{L}$ осуществляет гомоморфизм между пространствами $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ и $(\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega))^*$. Доказательство этого факта просто и вполне аналогично доказательству соответствующего утверждения для операторов второго порядка (см.теоремы 2.2 и 3.2 работы [I]).

ЛЕММА 5.I. Пусть для всех α, $|\alpha|=m$ $p_\alpha \geqslant 2$ и для всех $\alpha, |\alpha| \leqslant m$ функции $\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)$ дифференцируемы по всем ξ_γ, $|\gamma| \leqslant m$. Пусть, кроме того, для любых $\xi_\alpha, \eta_\alpha, |\alpha| \leqslant m$ и п.в. $x \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma)}{\partial \xi_\beta} \eta_\alpha \eta_\beta \geqslant d \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha \bar{\xi}|^{p_\alpha - 2} |A_\alpha \bar{\eta}|^2, \quad d > 0. \qquad (5.2)$$

Тогда оператор $\mathcal{L}$ имеет дефинитную вариацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам теоремы 2.2. работы [9], предложений 2.2 и 3.2 работы [I].

Для любых $u, v \in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ имеем

$$\langle \mathcal{L}u-\mathcal{L}v, u-v\rangle \equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} [\mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))-\mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+v))]\mathcal{D}^\alpha(u-v)dx=$$

$$=\int_\Omega \sum_{|\alpha|,|\beta|\le m} \int_0^1 \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha(x;\mathcal{D}^\gamma(f+v+\tau(u-v)))}{\partial \xi_\beta} d\tau\, \mathcal{D}^\beta(u-v)\mathcal{D}^\alpha(u-v)dx \geqslant$$

$$\geqslant d\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \int_0^1 |A_\alpha \mathcal{D}^m(f+v+\tau(u-v))|^{p_\alpha-2} d\tau\, |A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)|^2 dx \qquad (5.3)$$

Учитывая элементарное неравенство

$$\int_0^1 |a+\tau(b-a)|^{p-2}d\tau > \kappa|b-a|^{p-2},$$

где $a,b\in R$, $p\geqslant 2$, $\kappa>0$ и не зависит от a и b, получим из (5.3) оценку

$$\langle \mathcal{L}u-\mathcal{L}v, u-v\rangle \geqslant \kappa d\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)|^{p_\alpha}dx = \kappa d\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}$$

Лемма доказана.

Приведем теперь алгебраический критерий полуограниченности вариации.

ЛЕММА 5.2. Пусть оператор $\mathcal{L}$, определенный формулой (2.4), представим в виде $\mathcal{L}=\hat{\mathcal{L}}+\mathcal{L}'$, где операторы $\hat{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}'$ определяются соотношениями

$$\langle \hat{\mathcal{L}}u,\eta\rangle \equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} \hat{\mathcal{L}}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha\eta\, dx, \qquad u,\eta\in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega),$$

$$\langle \mathcal{L}'u,\eta\rangle \equiv \int_\Omega [\sum_{|\alpha|=m} \mathcal{L}'_\alpha(x,\mathcal{D}^\omega(f+u))\mathcal{D}^\alpha\eta +$$

$$+\sum_{|\alpha|\le m-1} \mathcal{L}'_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha\eta]dx, \qquad u,\eta\in \overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega),$$

причем, оператор $\hat{\mathcal{L}}$ имеет дефинитную вариацию, функции

$$\hat{\mathcal{L}}_\alpha(x,\xi_\gamma),\ |\alpha|\le m,\ \mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\omega),\ |\alpha|=m,\ \mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\gamma),\ |\alpha|\le m-1$$

удовлетворяют условию Каратеодори. Мультииндекс γ пробегает всевозможные значения с $|\omega|\leqslant m-1$. Пусть, кроме того, функции $\mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\omega)$, $|\alpha|=m$, $\mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\gamma)$, $|\alpha|\leqslant m-1$ дифференцируемы по ξ_ω, $|\omega|\leqslant m-1$ и ξ_γ, $|\gamma|\leqslant m$ соответственно, и для п.в. $x\in\Omega$ и любых ξ_ω, ξ_γ, $\eta_\alpha\in R$, $|\omega|\leqslant m-1$, $|\gamma|\leqslant m$, $|\alpha|=m$ выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&\Big|\sum_{|\alpha|=m}\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\omega)}{\partial\xi_\beta}\eta_\alpha\Big|\leqslant K\sum_{|\alpha|=m}\Big(\sum_{|\omega|\leqslant m-1}|\xi_\omega|^{\frac{q_\omega(q_\beta-p'_\alpha)}{p'_\alpha q_\beta}}+\varphi_{\alpha\beta}(x)\Big)|A_\alpha\bar{\eta}|,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |\beta|\leqslant m-1\\
&\Big|\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\gamma)}{\partial\xi_\beta}\Big|\leqslant K\Big(\sum_{|\gamma|=m}|A_\gamma\bar{\xi}|^{\frac{p_\gamma(q_\beta-q'_\alpha)}{q'_\alpha q_\beta}}+\sum_{|\gamma|\leqslant m-1}|\xi_\gamma|^{\frac{q_\gamma(q_\beta-q'_\alpha)}{q'_\alpha q_\beta}}+\varphi_{\alpha\beta}(x)\Big),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |\alpha|,|\beta|\leqslant m-1\\
&\Big|\sum_{|\beta|=m}\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\xi_\gamma)}{\partial\xi_\beta}\eta_\beta\Big|\leqslant K\sum_{|\beta|=m}\Big(\sum_{|\gamma|=m}|A_\gamma\bar{\xi}|^{\frac{p_\gamma(q_\alpha-p'_\beta)}{p'_\beta q_\alpha}}+\sum_{|\gamma|\leqslant m-1}|\xi_\gamma|^{\frac{q_\gamma(q_\alpha-p'_\beta)}{p'_\beta q_\alpha}}+\\
&\qquad\qquad+\varphi_{\alpha\beta}(x)\Big)|A_\beta\bar{\eta}|,\qquad |\alpha|\leqslant m-1
\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

где K - положительная константа, числа p_α, $|\alpha|=m$ и q_α, $|\alpha|\leqslant m-1$ удовлетворяют условию леммы I.I, $\varphi_{\alpha\beta}\in L_{\frac{p'_\alpha q_\beta}{q_\beta-p'_\alpha}}(\Omega)$ при $|\alpha|=m$, $|\beta|\leqslant m-1$, $\varphi_{\alpha\beta}\in L_{\frac{q'_\alpha q'_\beta}{q_\beta-q'_\alpha}}(\Omega)$ при $|\alpha|,|\beta|\leqslant m-1$, $\varphi_{\alpha\beta}\in L_{\frac{p'_\beta q_\alpha}{q_\alpha-p'_\beta}}$ при $|\beta|=m$, $|\alpha|\leqslant m-1$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ имеет полуограниченную вариацию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $u,v\in\overset{\circ}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega)$ имеем:

$$\langle\mathcal{L}u-\mathcal{L}v,u-v\rangle=\langle\hat{\mathcal{L}}u-\hat{\mathcal{L}}v,u-v\rangle+\langle\mathcal{L}'u-\mathcal{L}'v,u-v\rangle\geqslant d\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}+$$

$$+\int_\Omega\sum_{|\alpha|=m,|\beta|\leqslant m-1}\int_0^1\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\mathcal{D}^\omega(f+v+\tau(u-v)))}{\partial\xi_\beta}d\tau\,\mathcal{D}^\beta(u-v)\mathcal{D}^\alpha(u-v)dx+$$

$$+\int_\Omega\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m-1}\int_0^1\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+v+\tau(u-v)))}{\partial\xi_\beta}d\tau\,\mathcal{D}^\beta(u-v)\mathcal{D}^\alpha(u-v)dx+$$

$$+\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leqslant m-1,|\beta|=m}\int_0^1\frac{\partial\mathcal{L}'_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+v+\tau(u-v)))}{\partial\xi_\beta}d\tau\,\mathcal{D}^\beta(u-v)\mathcal{D}^\alpha(u-v)dx\equiv\tag{5.5}$$

$$\equiv d\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}+\int_\Omega\int_0^1(\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3)d\tau\,dx\,.$$

Пусть $\|u\|,\|v\|\leqslant\rho$. Тогда, учитывая лемму I.2, пользуясь сначала неравенством Юнга с показателем p_α , затем неравенством Гельдера с показателем $\frac{q_\beta}{p'_\alpha}$, благодаря первому из неравенств (5.4), получаем

$$\Big|\iint\limits_{\Omega}\int\limits_0^1 \mathcal{J}_1\,d\tau\,dx\Big|\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\beta|\leqslant m-1}}C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\|\mathcal{D}^\beta(u-v)\|^{p'_\alpha}_{q_\beta,\Omega}\leqslant \tag{5.6}$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|=m}\|A_\alpha\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,\Omega}+\sum_{\substack{|\alpha|=m,\\|\beta|\leqslant m-1}}K\,C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)(\|u-v\|')^{p'_\alpha},$$

где K - положительная константа, $C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\geqslant 0,\ |\alpha|=m,|\beta|\leqslant m-1$, а норма $\|\cdot\|'$ определяется следующим образом:

$$\|u\|'=\sum_{|\beta|=m-1}\|\mathcal{D}^\beta u\|_{q_\beta,\Omega}\quad,\quad u\in\overset{0}{H}{}^m_{\bar p}(A,\Omega) \tag{5.7}$$

и, в силу леммы I.2, является компактной по отношению к норме $\|\cdot\|$.

Аналогичным образом, пользуясь сначала неравенством Юнга с показателем p_β , затем неравенством Гельдера с показателем $\frac{q_\alpha}{p'_\beta}$, учитывая третье из неравенств (5.4), получим

$$\Big|\iint\limits_{\Omega}\int\limits_0^1 \mathcal{J}_3\,d\tau\,dx\Big|\leqslant\varepsilon\sum_{|\beta|=m}\|A_\beta\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\beta}_{p_\beta,\Omega}+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m-1,\\|\beta|=m}}C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\|\mathcal{D}^\alpha(u-v)\|^{p'_\beta}_{q_\alpha,\Omega}\leqslant \tag{5.8}$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{|\beta|=m}\|A_\beta\mathcal{D}^m(u-v)\|^{p_\beta}_{p_\beta,\Omega}+\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m-1,\\|\beta|=m}}K\,C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)(\|u-v\|')^{p'_\beta},$$

где $C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\geqslant 0,\ |\alpha|\leqslant m-1,\ |\beta|=m$.

Учитывая второе из неравенств (5.4), пользуясь дважды неравенством Гельдера сначала с показателем q_α , затем с показателем $\frac{q_\beta}{q'_\alpha}$, получим оценку

$$\Big|\iint\limits_{\Omega}\int\limits_0^1 \mathcal{J}_2\,d\tau\,dx\Big|\leqslant\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m-1}C_{\alpha\beta}(\rho)\|\mathcal{D}^\beta(u-v)\|_{q_\beta,\Omega}\|\mathcal{D}^\alpha(u-v)\|_{q_\alpha,\Omega}\leqslant \tag{5.9}$$

$$\leqslant\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m-1}K\,C_{\alpha\beta}(\rho)(\|u-v\|')^2,$$

где $C_{\alpha\beta}(\rho)\geqslant 0,\ |\alpha|,|\beta|\leqslant m-1$.

Выбирая в (5.6) и (5.8) $\varepsilon \leqslant \frac{d}{2}$, из (5.5), (5.6) (5.8) и (5.9) заключаем, что оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию полуограниченности вариации (условие IУ теоремы 2.I) с функцией $\mu(\rho,\tau)$ в (2.9), определенной соотношением

$$\mu(\rho,\tau) \equiv K\Big[\sum_{\substack{|\alpha|=m,\\ |\beta|\leqslant m-1}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\tau^{p'_\alpha} + \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant m-1,\\ |\beta|=m}} C_{\alpha\beta}(\varepsilon,\rho)\tau^{p'_\beta} + \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m-1} C_{\alpha\beta}(\rho)\tau^2$$

и нормой $\|\cdot\|'$, определенной равенством (5.7).

Поскольку $p'_\alpha > 1$, $|\alpha| = m$, то функция $\mu(\rho,\tau)$, очевидно, удовлетворяет условию (2.I0).

Лемма доказана.

Из теоремы 2.I и доказанных в работе лемм и замечаний вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть выполнены условия лемм 3.I, 4.I, 5.2, а также условие I § 2. Тогда краевая задача (2.I) имеет хотя бы одно решение $u = v + f$, где $v \in \overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$, f - удовлетворяет условию I § 2.

Если вместо условия леммы 5.2 выполнено условие леммы 5.I, то решение будет единственным, более того, оператор $\mathcal{L}$, определенный соотношением (2.4), осуществляет гомеоморфизм между пространствами $\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$ и $(\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega))^*$.

ПРИМЕР. Пусть для всех α, $|\alpha| = m$

$$\mathcal{L}_\alpha(x,\xi_\gamma) \equiv \sum_{|\beta|=m} a_{\beta\alpha}(x)|A_\beta\xi|^{p_\beta-2}A_\beta\xi .$$

Тогда оператор $\hat{\mathcal{L}}$, определенный формулой

$$\langle\hat{\mathcal{L}}u,\eta\rangle \equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} \mathcal{L}_\alpha(x,\mathcal{D}^\gamma(f+u))\mathcal{D}^\alpha\eta\,dx \equiv$$

$$\equiv \int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\beta\alpha}|A_\beta\mathcal{D}^m(f+u)|^{p_\beta-2}A_\beta\mathcal{D}^m(f+u)\mathcal{D}^\alpha\eta\,dx,\quad u,\eta\in\overset{\circ}{H}{}^m_p(A,\Omega)$$

удовлетворяет условию дефинитности вариации.

Проверка этого утверждения не представляет труда и по существу не отличается от проверки соответствующего утверждения для операторов второго порядка, приведенного в пункте 7 § 3 работы [I].

Автор выражает свою благодарность А.В.Иванову за постоянное внимание к выполняемой работе и неоднократные ее обсуждения.

Литература

I. И в а н о в А.В., М к р т ы ч я н П.З. О разрешимости первой краевой задачи для некоторых классов вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. - Тр.Матем. ин-та АН СССР,I980.

2. Л у В е н ь - Т у а н . К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными степенями. - Вестник ЛГУ,I96I,№7,2,с.23-37.

3. К р у ж к о в С.Н. Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. - Матем.сб.,I969,т.77,№3, с.299-334.

4. К р а с н о с е л ь с к и й М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.,I956.

5. B r o w d e r F.E. Nonlinear elliptic boundary value problems. - Bull.Amer.Math.Soc.,1963,vol.69,№6,p.862-874.

6. M i n t y G. On a monotonicity method for the solutions of nonlinear equations in Banach Spaces. - Proc.Nat.Acad.Sci.USA, 1963,vol.50,№6.

7. Л а д ы ж е н с к а я О.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.,I973, 576 с.

8. И в а н о в А.В. Первая краевая задача для квазилинейных $(A,\bar{B})$ - эллиптических уравнений. - В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. II,I979, с.45-88.

9. Д у б и н с к и й Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.М.,I976,т.9.

I0. Л и о н с Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.М.,I972.