Д. А. Попов, Д. В. Сушко, О сходимости алгоритмов численного решения уравнения свертки, *Докл. АН СССР*, 1990, том 315, номер 2, 309–313

© Д.А. ПОПОВ, Д.В. СУШКО

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

(Представлено академиком В.С. Владимировым 14 XII 1989)

Пусть задано одномерное уравнение свертки

$$u(t) = \int K(t - t')\, z(t')\, dt'. \tag{1}$$

Ниже рассматривается следующая задача: известны отсчеты $u_n \equiv u(n\Delta t)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, левой части (1); требуется построить приближенное решение (1) по данным $\{u_n\}$. Мы воспользуемся методом регуляризации [1, 2], который позволяет получить широкий класс алгоритмов решения поставленной задачи. В работе исследуется вопрос о сходимости таких алгоритмов, т.е. вопрос о стремлении приближенного решения к точному; характер предельного перехода при этом может быть различным (он диктуется практической постановкой задачи).

Через $\hat{f}(\omega)$ будем обозначать преобразование Фурье функции $f(t)$: $\hat{f}(\omega) = \int \exp(i\omega t) f(t)\, dt$. Если пределы интегрирования или суммирования опущены, то всегда предполагается, что оно ведется от $-\infty$ до $+\infty$. В настоящей работе рассматривается случай, когда $L(\omega) = \hat{K}^{-1}(\omega)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_\rho$. Это означает, что $L(\omega)$ локально интегрируема и имеют место оценки

$$|L(\omega)| \leqslant \begin{cases} L_1 |\omega|^\rho, & |\omega| \geqslant 2\Omega(1-a), \quad \rho, \gamma \geqslant 0, \\ L_2 \Omega^\gamma, & |\omega| < 2\Omega(1-a), \end{cases} \tag{2}$$

при некотором a, $0 < a \leqslant 1$. Здесь и в дальнейшем $\Omega = \pi/\Delta t$ — частота Найквиста. Все вводимые константы (типа L_1, L_2 в (2)) предполагаются независимыми от Ω и параметра регуляризации α (см. ниже). Класс $\mathcal{L}_\rho$ является обобщением класса $\mathcal{L}$ из [3]. Заметим, что условия на $\mathcal{L}_\rho$ не исключают возможности для $L(\omega) \in \mathcal{L}_\rho$ зависеть от Ω; это важно для некоторых практических применений. В настоящей работе мы интересуемся условиями сходимости алгоритмов для гладких $u(t)$. В соответствии с этим будем предполагать, что $u(t) \in \mathcal{S}$ (пространство Шварца (см., например, [4])).

Регуляризованное решение $z_R(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$z_R(t) = \int H_R(t - t')\, u(t')\, dt', \quad \hat{H}_R(\omega) = L(\omega) R_\alpha(\omega). \tag{3}$$

Здесь $R_\alpha(\omega)$ — регуляризатор, α — параметр регуляризации. Обратим внимание на то, что $R_\alpha(\omega)$ может зависеть и от Ω; при этом Ω^{-1} в $R_\alpha(\omega)$ можно рассматривать как дополнительный параметр регуляризации. Б у д е м п о л а г а т ь, ч т о $R_\alpha(\omega) \in \mathcal{R}$. Это означает, что семейство функций $R_\alpha(\omega)$ ограниченно в совокупности ($|R_\alpha(\omega)| \leqslant R_1$ для всех α (и всех Ω, если R_α зависит и от Ω)), при любом α (и Ω) интегрируемо и $R_\alpha(\omega) = O(\omega^{-\rho-1-\delta})$ при $|\omega| \to \infty$, $R_\alpha(\omega) \to 1$ при $\alpha \to 0$ (и $\Omega \to \infty$). Через δ мы всегда будем обозначать произвольное положительное число.

Величину $g_R(\alpha) = (2\pi)^{-1} \int R_\alpha(\omega)\, d\omega$ естественно назвать р а з р е ш е н и е м р е г у л я р и з а ц и и. Чтобы пояснить это, рассмотрим случай $z(t) = \delta(t)$. Тогда $z_R(0) = g_R(\alpha)$. Поскольку при достаточно малых α и Ω^{-1}, как правило выполняется $R_\alpha(0) \simeq 1$, то $\int z_R(t)\, dt = R_\alpha(0) \simeq 1$. Величина d эффективного носителя $z_R(t)$ определяется из условия $dz_R(0) \simeq 1$, и, следовательно, $d = g_R^{-1}$. Можно показать также, что если точное решение (1) имеет вид скачка ($z(t) = \theta(t)$), то величина, обратная разрешению (т.е. d), определяет ширину переходной зоны регуляризованного решения $z_R(t)$.

Рассматриваемые алгоритмы оценки $z(t)$ по данным $\{u_n\}$ получаются заменой интеграла в (3) суммой. Таким образом, в качестве приближенного решения берется функция

$$(4)\qquad z_R^T(t) = \sum_n H_R(t - n\Delta t) u_n \Delta t.$$

Так как при $\Delta t \to 0$ $z_R^T(t) \to z_R(t)$, то вопрос о сходимости при последовательном предельном переходе $\Delta t \to 0$, а затем $\alpha \to 0$ сводится к вопросу о сходимости к нулю ошибки регуляризации $\Delta z_R(t) = z_R(t) - z(t)$ при $\alpha \to 0$. При сделанных предположениях относительно L, u, R_α такая сходимость имеет место. Однако указанная последовательность предельных переходов не всегда адекватна практической постановке задачи, так как при этом заведомо предполагается, что Δt много меньше d, т.е. что за счет регуляризации происходит сглаживание на величину, много большую Δt В этой связи определим алгоритмы высокого разрешения.

Регуляризатор $R_\alpha(\omega)$ будем называть *регуляризатором высокого разрешения*, если $R_\alpha(\omega) \in \mathfrak{R}$; уравнение

$$(5)\qquad g_R(\alpha) = k\Omega,$$

где $k > 0$ – некоторая константа, не зависящая от α и Ω, имеет при всех (достаточно больших) Ω единственное решение $\alpha(\Omega)$ и $\alpha(\Omega) \to 0$ при $\Omega \to \infty$. Алгоритмы, заключающиеся в вычислении приближенного решения (1) по (4) с регуляризатором высокого разрешения и параметром регуляризации, который выбирается удовлетворяющим уравнению (5) (т.е. $\alpha = \alpha(\Omega)$), будем называть *алгоритмами высокого разрешения*. Таким образом, для алгоритмов высокого разрешения α задается выбором константы k в (5), т.е. фактически выбором отношения $\Delta t/d$. Везде ниже, если не оговорено противное, имеются в виду алгоритмы высокого разрешения и считается, что $\alpha = \alpha(\Omega)$.

Вопрос о сходимости алгоритмов высокого разрешения есть вопрос о сходимости к нулю ошибки дискретизации $\Delta z_R^T(t) = z_R^T(t) - z_R(t)$ при $\Delta t \to 0$ (или $\Omega \to \infty$). Будем говорить, что Δz_R^T *сходится*, если $\forall u \in \mathfrak{S}$ $\Delta z_R^T(t) \to 0$ при $\Omega \to \infty$ равномерно по t; *сходимость степенная*, если существует $\delta > 0$ такое, что равномерно по t выполняется $|\Delta z_R^T(t)| \leqslant O(\Omega^{-\delta})$; *сходимость быстрая*, если δ любое. При всех предельных переходах мы, естественно, имеем в виду $\alpha = \alpha(\Omega)$.

Исследование ошибки дискретизации основано на следующей формуле [3]:

$$(6)\qquad \Delta z_R^T(t) = \sum_{n \neq 0} (2\pi)^{-1} e^{-i \cdot 2n\Omega t} \int e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega) \hat{H}_R(\omega + 2n\Omega)\, d\omega.$$

Из (6) легко следует [3], что если $R_\alpha \in \mathfrak{R}$ и $R_\alpha(\omega) = 0$ при $|\omega| > 2\Omega(1 - c)$, $0 < c < 2a$, то ошибка дискретизации быстро сходится. Это результат общего характера, т.е. относится не только к алгоритмам высокого разрешения. Для получения других содержательных результатов введем два класса регуляризаторов.

Пусть $S(\xi)$ – вещественная, ограниченная, абсолютно интегрируемая, непрерывная в нуле функция на $\mathbf{R}$; $S(0) = 1$; $S(\xi) = O(\xi^{-1-\rho-\delta})$, $\xi \to \infty$; $\int S(\xi)\, d\xi > 0$. Регуляризаторы, задаваемые формулой $R_\alpha(\omega) = S(\alpha\omega)$, называются *однородными*. Нетрудно видеть, что однородные регуляризаторы являются регуляризаторами высокого разрешения; уравнение (5) принимает вид $\alpha\Omega = k_1 = (2\pi k)^{-1} \int S(\xi)\, d\xi$.

Регуляризатор высокого разрешения $R_\alpha(\omega)$ назовем *квазифинитным*, если существуют $\kappa \geqslant 0, \bar{\Omega} \geqslant 0, R_2$ такие, что $|R_{\alpha(\Omega)}(\omega)| \leqslant R_2 |\omega|^{-1-\rho-\delta}$ при $|\omega| \geqslant \kappa\Omega$, $\Omega \geqslant \bar{\Omega}$.

Описанные классы имеют непустое пересечение. Для указанных типов регуляризаторов достаточные условия сходимости дает

Теорема 1. *Пусть $L \in \mathcal{L}_\rho$, $u \in \mathcal{S}$ и R_α однородный или квазифинитный. Тогда ошибка дискретизации сходится степенным образом, если выполнено одно из условий:*

1) $\kappa < 2$;

2) $R_\alpha(\omega) = 0, \ \omega \in \bigcup\limits_{0<|n|\leqslant n_0} [(2n-c)\Omega, (2n+c)\Omega]$, *где* $n_0 = [\kappa/2]$ *для квазифинитных и* $n_0 = \infty$ *для однородных регуляризаторов,* $[\kappa/2]$ – *целая часть числа* $\kappa/2$;

3) $\int\limits_{|\omega|>(2-c)\Omega} d\omega\, |\hat{H}_R(\omega)| \leqslant C_1 \Omega^{-\delta}, \quad \delta > 0.$

Здесь и ниже c – произвольная константа, $0 < c \leqslant 2a$. В случаях 1), 2) *при* $n_0 = \infty$ *или* 3), *когда δ любое, сходимость быстрая.*

Однородный регуляризатор называется N-гладким, если

$$S(\xi) \in C^N(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \quad \text{и} \quad |S^{(m)}(\xi)| \leqslant S_m, \quad S^{(m)}(\xi) = O(|\xi|^{-1-\rho-\delta}), \ |\xi| \to \infty$$

для всех m, $0 \leqslant m \leqslant N$. В [3] введен класс ядер $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_\rho$), для которого имеются точные оценки типа (2):

$$|L(\omega)| \leqslant \begin{cases} L_1^+ |\omega|^{\rho_0^+}, & \omega > 2\Omega(1-a); \\ L_1^- |\omega|^{\rho_0^-}, & \omega < -2\Omega(1-a). \end{cases}$$

Прямо из теоремы 1 работы [3], в сущности, следует

Теорема 2. *Пусть $L \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{S}$ и регуляризатор однородный и N-гладкий, $N \geqslant 0, N > \max\{\rho_0^+, \rho_0^-\}$. Тогда для сходимости ошибки дискретизации необходимо и достаточно выполнения условий*

$$(7) \qquad S^{(m)}(\pm 2nk_1) = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, [\rho_0^\pm], \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если эти условия выполнены, то сходимость степенная; если $N = \infty$ и условия (7) *выполнены при всех m, то сходимость быстрая.*

Назовем регуляризатор монотонным, если он не возрастает при $\omega \geqslant 0$ и не убывает при $\omega \leqslant 0$.

Теорема 3. *Пусть $L \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{S}$ и регуляризатор квазифинитный и монотонный. Тогда для сходимости ошибки дискретизации необходимо*

$$\Omega^{\rho_0^\pm} R_{\alpha(\Omega)}(\pm 2\Omega) \to 0, \quad \Omega \to \infty,$$

и достаточно

$$\Omega^{\rho_0^\pm} R_{\alpha(\Omega)}(\pm(2-c)\Omega) \to 0, \quad \Omega \to \infty, \quad \forall c, \quad 0 < c < 2.$$

Теорема 3 иллюстрирует близость необходимых и достаточных условий.

Примером квазифинитного монотонного регуляризатора является регуляризатор

$$V_{\alpha(\omega)} = \left[1 + \alpha |\omega|^h \exp\left(\frac{|\omega|}{\omega_0}\right)^q\right]^{-1},$$

$h \geqslant 0$, $q > 0$, $\omega_0 > 0$ – константы. Нетрудно видеть, что $V_\alpha(\omega)$ – регуляризатор высокого разрешения. Решение (5) для V_α имеет следующее асимптотическое (при достаточно больших Ω) поведение:

$$\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\,\Omega\right)^q [1 - A_1\Omega^{-q}] \leqslant \ln\frac{1}{\omega_0^h\alpha(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{k\pi}{\omega_0}\,\Omega\right)^q [1 + A_2\Omega^{-\frac{1}{2}q} + A_3\Omega^{-q} + A_2A_3\Omega^{-\frac{3}{2}q}];$$

константы

$$A_1 = 8\Gamma(q+1)\,\frac{q+1}{q^2}\left(\frac{2\omega_0}{k\pi}\right)^q,\quad A_2 = \left(1+\frac{h}{q}\right)\left(\frac{2\omega_0}{k\pi}\right)^{-q/2},$$

$$A_3 = 4\Gamma(q+1)\left(\frac{2\omega_0}{k\pi}\right)^q.$$

Из теоремы 3 с учетом последней формулы вытекает

С л е д с т в и е. *Пусть* $L \in \mathcal{L}$, $u \in \mathcal{S}$, $\max\{\rho_0^+, \rho_0^-\} \geqslant 0$ *и* $R_\alpha = V_\alpha$. *Тогда для сходимости ошибки дискретизации необходимо и достаточно, чтобы в уравнении* (5) *было* $k < 2/\pi$, *т.е.* $d > \Delta t/2$. *При этом сходимость* (*если она есть*) *быстрая.*

Наряду с описанным выше методом получения приближенного решения $z_R^T(t)$ возможны и другие подходы. Возможен, например, подход, основанный на дискретизации задачи (1) с последующим построением решения полученной дискретной задачи. Такие алгоритмы A дают возможность по $\{u_n\}$ построить последовательность $\tilde{z}_n = A(\{u_n\})$, которая интерпретируется как приближение к $z(t)$ в точках $t_n = n\Delta t$. Предположим, что алгоритм A записывается в виде дискретной свертки

$$\tilde{z}_n = \sum_j G_{n-j}u_j\Delta t. \tag{8}$$

Покажем, как такой алгоритм вкладывается в описанную выше схему.

Будем говорить, что алгоритм A вида (8) допускает эффективный регуляризатор $\tilde{R}$, если существует $\tilde{R}(\omega)$ такой, что $\tilde{z}_n = z_{\tilde{R}}^T(n\Delta t)$ ($z_{\tilde{R}}^T(t)$ определяется (3), (4)). Формально $\tilde{R}$ строится следующим образом. Введем

$$H_{\tilde{R}}(s) = \sum_j G_j\,\frac{\sin(s-j\Delta t)\,\Omega}{(s-j\Delta t)\,\Omega}. \tag{9}$$

Тогда $G_j = H_{\tilde{R}}(j\Delta t)$ и $\tilde{R}(\omega)$ можно определить из уравнения

$$\tilde{R}(\omega) = \hat{K}(\omega)\hat{H}_{\tilde{R}}(\omega).$$

Из (9) следует, что

$$\hat{H}_{\tilde{R}}(\omega) = \left(\sum_j G_j e^{i\omega j\Delta t}\,\Delta t\right)\chi_\Omega(\omega),$$

$\chi_\Omega(\omega)$ – характеристическая функция интервала Найквиста $(-\Omega,\ \Omega)$. Таким образом, эффективный регуляризатор финитный: $\tilde{R}(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$..

В частности, алгоритм, описанный в [2], имеет вид (8), но при этом суммирование по j ведется в конечном интервале, например $|j| \leqslant (N-1)/2$. Эффективный регуляризатор для этого алгоритма зависит от N и при $N \to \infty$ имеет вид

$$\tilde{R}(\omega) = \hat{K}(\omega)\,\frac{\hat{K}^T(\omega)^*}{|\hat{K}^T(\omega)|^2 + \alpha M(\omega)}\,\chi_\Omega(\omega);$$

$M(\omega)$ зависит от выбора регуляризации дискретной задачи. Через $\hat{K}^T$ обозначено дискретное преобразование Фурье

$$\hat{K}^T(\omega) = \sum_n e^{i\omega n\Delta t} K(n\Delta t)\,\Delta t = \sum_n \hat{K}(\omega + 2n\Omega).$$

В частности, при $\alpha \to 0$

$$\tilde{R}(\omega) = \frac{\hat{K}(\omega)}{\hat{K}^T(\omega)}\,\chi_\Omega(\omega).$$

Именно такой регуляризатор отвечает малому шуму, если α определяется по методу невязки [1, 2]. Из этого следует, что если $\hat{K}(\omega)$ не зависит от Δt и достаточно гладкая, то описанный подход при малом шуме эквивалентен использованию регуляризатора вида

$$R(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases}$$

Отметим, что все последние рассуждения носят формальный характер. Строгое их обоснование составит предмет отдельной публикации.

Всесоюзный научно-исследовательский,
проектно-конструкторский и технологический
институт источников тока
Москва

Поступило
13 II 1990

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 2. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 3. *Попов Д.А.* – ДАН, 1984, т. 276, № 1, с. 38–42. 4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

© В.Н. РУСАК

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СВЕРТКИ ЯДРА ВЕЙЛЯ И ФУНКЦИИ ИЗ L_p

(*Представлено академиком А.А. Гончаром 1 II 1990*)

Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\|_{C_{2\pi}} = \sup_x |f(x)|.$$

Пусть $W^{r,\alpha}_{2\pi}L_p$, $p \geqslant 1$, – класс функций из этого пространства, представимых в форме

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D^\alpha_r(x-t)\cdot h(t)\,dt, \qquad r > \frac{1}{p},$$