В. И. Лотов, Асимптотика распределения супремума последовательных сумм,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 668–678

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

АСИМПТОТИКА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СУПРЕМУМА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ СУММ

В. И. Лотов

1. Введение. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $-\infty < \mathsf{M}\xi_1 < 0$. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $S = \sup_{n\geqslant 0} S_n$, $p = \mathsf{P}(S > 0)$, $\eta = \inf\{n\colon \ S_n > 0\}$, $\chi = S_\eta$, $W(x) = \mathsf{P}(S \geqslant x)$, $\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mathsf{P}(\xi_1 \in dy)$, $\lambda_+ = \sup\{\lambda\colon \ \varphi(\lambda) < \infty\}$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $\lambda_+ > 0$, $\varphi(\lambda_+) \geqslant 1$. Если $\varphi(\lambda_+) = 1$, то дополнительно будем требовать $\varphi'(\lambda_+) < \infty$. В этих условиях определен единственный корень $q > 0$ уравнения $\varphi(q) = 1$ и при $x \to \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa} e^{-qx}(1 + o(1)), \tag{1}$$

$a = \int_0^{\infty} x e^{qx} \mathsf{P}(\chi \in dx, \ \eta < \infty)$. Если $\varphi(\lambda_+) > 1$ и распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту, то $o(1)$ в (1) можно заменить на $o(e^{-\varepsilon x})$ при некотором $\varepsilon > 0$. Эти факты приведены в [1, с. 168]. Доказательство (1) в [1] использует теорему восстановления, и там же указывается на возможность уточнения (1), если воспользоваться оценками остаточного члена в теореме восстановления при тех или иных дополнительных ограничениях. Этому направлению и посвящена настоящая работа. В п. 2 приведены уточнения теоремы из [2] об асимптотических разложениях для функции восстановления в той степени общности, которая необходима для дальнейшего. Формулировка основного результата работы об асимптотике $W(x)$ при $\varphi(\lambda_+) > 1$ требует введения большого количества обозначений и потому вынесена в конец п. 3. Случай $\varphi(\lambda_+) = 1$, $\varphi'(\lambda_+) < \infty$ рассмотрен в п. 4.

К исследованию предельного поведения функции $W(x)$, когда $\lambda_+ > 0$, $\varphi(\lambda_+) \geqslant 1$, приводит, например, рассмотрение асимптотики вероятностей ошибок в последовательном критерии отношения правдоподобия, где, как известно, главные члены определяются распределением супремума последовательных сумм.

2. Асимптотические разложения для функции восстановления. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, $P(\tau_1 \geqslant 0) = 1$, $f(\lambda) = \mathsf{M}e^{\lambda\tau_1}$, $F_n(y) = \mathsf{P}(\tau_1 + \ldots + \tau_n < y)$, $H(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y)$ и пусть $f(\beta) < \infty$ при некотором $\beta > 0$. Из представления

$$\int_0^\infty e^{\lambda y}\, dH(y) = (1 - f(\lambda))^{-1}, \qquad \operatorname{Re}\lambda < 0$$

ясно, что поведение $H(x)$ при $x \to \infty$ существенно зависит от наличия в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$ нулей функции $u(\lambda) = 1 - f(\lambda)$. Вещественных нулей у функции $u(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ нет, но в ряде случаев (например, для $f(\lambda) = (e^{\lambda a} - 1)/\lambda a$) в полосе $0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$ могут находиться нули с ненулевой мнимой частью. Если λ_j — нуль функции $u(\lambda)$ кратности m_j, то комплексно сопряженное число $\bar\lambda_j$ также будет нулем $u(\lambda)$ той же кратности. $F_n^{(0)}(y)$ будет означать сумму дискретной и сингулярной компонент $F_n(y)$, $a_k = \mathsf{M}\tau_1^k$, $R(x) = H(x) - \dfrac{x}{a_1} - \dfrac{a_2}{2a_1^2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть при некотором $n \geqslant 1$*

$$\int_0^\infty e^{\beta y}\, dF_n^{(0)}(y) < 1 \tag{2}$$

и функция $u(\lambda)$ в полосе $0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$ отлична от нуля всюду, кроме точек λ_j, $\bar\lambda_j$, $0 < \operatorname{Re}\lambda_j = \beta_j < \beta$, $\operatorname{Im}\lambda_j = \gamma_j > 0$, m_j — кратность нуля λ_j, $j = 1, \ldots, r$. Тогда

$$R(x) = \sum_{j=1}^{r} e^{-\beta_j x} \sum_{s=0}^{m_j-1} x^s (P_{js}\cos(\gamma_j x) - R_{js}\sin(\gamma_j x)) + \Delta(x),$$

где P_{js} и R_{js} — соответственно вещественная и мнимая части величины

$$\frac{2}{\lambda_j^{m_j-s} s!} \sum_{k=0}^{m_j-s-1} \frac{(-1)^{k-m_j-1} \lambda_j^k f_j^{(k)}(\lambda_j)}{k!},$$

$$f_j(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_j)^{m_j}}{u(\lambda)},$$

$$\Delta(x) = o(x^N e^{-\beta x}), \quad \operatorname*{Var}_{[x,\infty)} \Delta(y) = o(x^N e^{-\beta x}),$$

$$N = \max_{1 \leqslant j \leqslant r} m_j - 1.$$

Если $u(\lambda) \neq 0$ *при* $0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$ *и выполнено* (2), *то*

$$|R(x)| = o(e^{-\beta x}), \quad \operatorname*{Var}_{[x,\infty)} R(y) = o(e^{-\beta x}), \quad x \to \infty. \tag{3}$$

Асимптотические разложения типа (3) впервые получены в [2], причем без предположения о неотрицательности τ_i и отдельно для решетчатых распределений и распределений с абсолютно непрерывной компонентой. Однако [2] содержит ряд неточностей (некоторые из них можно отнести к разряду опечаток) как в формулировках, так и в доказательствах, что и послужило причиной появления здесь теоремы 1. В частности, приведенные в [2] разложения справедливы только в том случае, когда все нули λ_j, $\bar\lambda_j$ ($j = 1, \ldots, r$)— простые, хотя в [2] это нигде не оговаривается. Переход к рассмотрению кратных нулей в [2] влечет за собой дополнительные трудности. Как показывает следующий пример (принадлежащий В. А. Топчию), случай кратных нулей возможен. Действительно, функция $u_0(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 2(1-\varepsilon)\lambda + 1 - \varepsilon)^2 / (\lambda - 1)^5$ обладает кратными нулями $1 - \varepsilon \pm i\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ и при малых ε (например, при $\varepsilon = 0.05$) функция $1 - u_0(\lambda)$ является преобразованием Лапласа неотрицательной функции. В теореме 1, новой по сравнению с [2], является также оценка вариации остаточного члена.

Асимптотические разложения в теореме 1 можно получить другим, отличным от [2] методом. Приведем его краткое изложение. Пусть

$$v(\lambda) = \frac{u(\lambda)(\lambda-\beta-1)^m}{\lambda \prod_{j=1}^r (\lambda-\lambda_j)^{m_j} (\lambda-\bar\lambda_j)^{m_j}} = \frac{u(\lambda) Q(\lambda)}{\lambda},$$

$$m = 1 + 2\sum_{j=1}^r m_j. \tag{4}$$

Используя теорему 6 [1, с. 335] и условие (2), нетрудно установить, что при $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$ справедливо представление

$$v^{-1}(\lambda) = \int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)y}\, dV(y), \tag{5}$$

где $V(y)$ — функция ограниченной вариации. Пусть

$$\frac{Q(\lambda)}{\lambda} - 1 = \frac{A_0}{\lambda} + \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{jk}}{(\lambda-\mu_j)^k} \tag{6}$$

— разложение на простые дроби, $\mu_1, \ldots, \mu_{2r}$ — переобозначенная одной последовательностью совокупность $\{\lambda_j, \bar{\lambda}_j, j = 1, \ldots, r\}$, n_j — кратность μ_j. Тогда при $\operatorname{Re}\lambda < 0$

$$\frac{1}{u(\lambda)} = \int_0^\infty e^{\lambda y}\, dH(y) = v^{-1}(\lambda) + v^{-1}(\lambda)\left(\frac{Q(\lambda)}{\lambda} - 1\right), \tag{7}$$

далее подставляем (6) в (7) и, воспользовавшись представлением (5), переходим к сверткам функций в правой части (7). Получаем таким образом

$$H(x) = \int_0^x e^{-\beta y}\, dV(y) - A_0 \int_0^x \int_0^y e^{-\beta t}\, dV(t)\, dy +$$
$$+ \sum_{j=1}^{2r} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{(-1)^k A_{jk}}{(k-1)!} \int_0^x e^{-\mu_j y} \int_0^y (y-t)^{k-1} e^{(\mu_j-\beta)t}\, dV(t)\, dy. \tag{8}$$

Дальнейшее преобразование этого выражения сводится к распространению интегрирования от 0 до ∞ и оцениванию остатков. Обозначим

$$d_{jk} = [v^{-1}(\lambda)]^{(k)}_{\lambda=\mu_j}, \qquad d_{0k} = [v^{-1}(\lambda)]^{(k)}_{\lambda=0},$$
$$\Delta_k(x) = \int_x^\infty y^k e^{-\beta y}\, dV(y),$$
$$\Delta_{jk}(x) = \int_x^\infty y^k e^{(\mu_j-\beta)y}\, dV(y).$$

Тогда из (8) после соответствующих выкладок имеем

$$H(x) = d_{00} - A_0(x d_{00} - d_{01}) + K + \sum_{j=1}^{2r} e^{-\mu_j x} \sum_{s=0}^{n_j-1} x^s Q_{js} +$$
$$+ B(x) + C(x) - \Delta_0(x) + A_0 x \Delta_0(x) - A_0 \Delta_1(x), \tag{9}$$

где

$$|\Delta_0(x)| \leqslant L(x) e^{-\beta x}, \qquad L(x) = \operatorname*{Var}_{[x,\,\infty)} V(y),$$

$$|x\Delta_0(x)-\Delta_1(x)|\leqslant\frac{1}{\beta e}L(x)\,e^{-\beta x},$$

$$-A_0d_{00}=a_1^{-1},\qquad A_0d_{01}=a_2/2a_1^2-Q'(0)\,d_{00},$$

$$K=\sum_{j=1}^{2r}\sum_{k=1}^{n_j}A_{jk}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k+l}}{l!}\sum_{s=0}^{k-1-l}\frac{\mu_j^{s+l-k}d_{0,\,l+s}}{s!}=$$
$$=d_{00}(Q'(0)-1),$$

$$Q_{js}=\frac{\mu_j^s}{s!}\sum_{k=s+1}^{n_j}\frac{A_{jk}}{\mu_j^k}\sum_{l=0}^{k-1-s}\frac{(-1)^{k+l+1}\mu_j^ld_{jl}}{l!}=$$
$$=\frac{1}{\mu_j^{n_j-s}s!}\sum_{k=0}^{n_j-s-1}\frac{(-1)^{k-n_j-1}\mu_j^kg_j^{(k)}(\mu_j)}{k!},$$

$$g_j(\lambda)=\frac{(\lambda-\mu_j)^{n_j}}{u(\lambda)},$$

$$B(x)=\sum_{j=1}^{2r}\sum_{k=1}^{n_j}A_{jk}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^{k+l+1}}{l!}\cdot$$
$$\cdot\sum_{s=0}^{k-1-l}\frac{\mu_j^{s+l-k}\Delta_{l+s}(x)}{s!}=(1-Q'(0))\,\Delta_0(x),$$

$$|C(x)|=\Bigl|\sum_{j=1}^{2r}\sum_{k=1}^{n_j}A_{jk}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(-1)^{l+k}}{l!}\cdot$$
$$\cdot\sum_{s=0}^{k-1-l}\frac{\mu_j^{s+l-k}x^se^{-\mu_jx}}{s!}\Delta_{jl}(x)\Bigr|\leqslant$$
$$\leqslant L(x)\,e^{-\beta x}\sum_{j=1}^{2r}\sum_{i=0}^{n_j-1}\frac{|2\mu_jx|^i}{i!}\sum_{k=i+1}^{n_j}\frac{|A_{jk}|}{|\mu_j|^k}\equiv$$
$$\equiv L(x)\,e^{-\beta x}\sum_{k=0}^{N}c_kx^k=o(x^Ne^{-\beta x}).$$

Подставляя все в (9), получим

$$H(x)=\frac{x}{a_1}+\frac{a_2}{2a_1^2}+\sum_{j=1}^{2r}e^{-\mu_jx}\sum_{s=0}^{n_j-1}Q_{js}x^s+\Delta(x),$$

где

$$|\Delta(x)|\leqslant L(x)\,e^{-\beta x}\left(\textstyle\sum_{k=0}^{N}c_kx^k+|v(0)|/a_1\beta e+|Q'(0)|\right).$$

Ясно, что такая же оценка справедлива и для $\operatorname*{Var}_{[x,\,\infty)}\Delta(y)$.

Если $u(\lambda) \neq 0$ при $0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$, то

$$|R(x)| \leqslant K(x) \equiv L_1(x)\, e^{-\beta x}\left(1 + \frac{\beta+1}{\beta e}\right),$$

$$\operatorname*{Var}_{[x,\infty)} R(y) \leqslant K(x).$$

Здесь

$$L_1(x) = \operatorname*{Var}_{[x,\infty)} V_1(y), \lambda u^{-1}(\lambda)(\lambda - \beta - 1)^{-1} =$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\beta)y}\, dV_1(y),\ \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta.$$

3. Асимптотика функции $W(x)$ при $\varphi(\lambda_+) > 1$. В этом и последующих пунктах предполагается, что распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту. Пусть число $\beta > 0$ таково, что $\varphi(q + \beta) < \infty$ (здесь $q > 0$, $\varphi(q) = 1$) и в полосе $q < \operatorname{Re}\lambda \leqslant q + \beta$ $r(\lambda) \equiv \equiv 1 - \varphi(\lambda) \neq 0$ всюду, кроме точек $q + \lambda_j$, $q + \overline{\lambda}_j$, $0 < \beta_j = \operatorname{Re}\lambda_j < \beta$, $\gamma_j = \operatorname{Im}\lambda_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$. Обозначим m_j кратность нуля λ_j, $w(\lambda) = r(\lambda)(\lambda + 1)\cdot \cdot(\lambda - q - \beta - 1)\lambda^{-1}(\lambda - q)^{-1}$. Из теоремы 8 [1, с. 337] следует, что функция $w(\lambda)$ допускает каноническую V-факторизацию $w(\lambda) = w_+(\lambda)\, w_-(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и при $\operatorname{Re}\lambda = q$, а следовательно, и при $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant q$. Пусть

$$r_+(\lambda) = \frac{w_+(\lambda)(\lambda - q)}{\lambda - q - \beta - 1}, \quad r_-(\lambda) = \frac{\lambda w_-(\lambda)}{\lambda + 1}. \tag{10}$$

Эти функции обеспечивают V-факторизацию $r(\lambda) = = r_+(\lambda)\, r_-(\lambda)$ при $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant q$, т. е. имеют место представления вида

$$r_+(\lambda) = \int_0^\infty e^{(\lambda-q)y}\, dW_+(y),$$

$$r_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y}\, dW_-(y), \qquad \operatorname{Var} W_\pm < \infty.$$

Покажем, что $\int_0^\infty e^{\beta y}\, dW_+(y) < \infty$. Действительно,

$$r_+(\lambda) = \frac{r(\lambda)}{r_-(\lambda)} = \left(1 - \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y} \mathsf{P}(\xi_1 \in dy)\right) w_-^{-1}(\lambda)\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

Правая часть этого равенства представима при $0 \leqslant \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant q + \beta$ в виде $\int_{-\infty}^\infty e^{(\lambda-q-\beta)y}\, dG(y)$, $\operatorname{Var} G < \infty$, что совпадает при $0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant q$ с $\int_0^\infty e^{(\lambda-q)y}\, dW_+(y)$, откуда и следует наше утверждение. Функция $r_-(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$ обращается в нуль только при $\lambda = 0$ — это следует из (10), поэтому все числа $q + \lambda_j$, $q + \bar{\lambda}_j$ будут нулями кратности m_j функции $r_+(\lambda)$. Пусть $f(\lambda) = 1 - r_+(\lambda + q)$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta$. Как известно [1, с. 169], факторизация (10) может быть выбрана такой, что $f(\lambda)$ является производящей функцией моментов некоторой случайной величины $\tau > 0$ такой, что $\mathsf{P}(\tau \in dy) = e^{qy}\mathsf{P}(\chi \in dy, \eta < \infty)$ и, кроме того, $\mathsf{M}e^{(q+\lambda)S} = (1-p)(1 - f(\lambda))^{-1}$, откуда

$$W(x) = (1-p)\int_x^\infty e^{-qy}\,dH(y), \tag{11}$$

$H(y)$ — функция восстановления, соответствующая случайной величине τ. Чтобы воспользоваться далее результатом теоремы 1, достаточно потребовать

$$\int_0^\infty e^{(q+\beta)y}\Phi^{(0)}(dy) < 1, \tag{12}$$

где $\Phi^{(0)}$ — сумма дискретной и сингулярной компонент меры $\Phi(A) = \mathsf{P}(\chi \in A, \eta < \infty)$. Проверка условия (12) затруднительна, поэтому укажем для него некоторые достаточные условия. Имеем для любого борелевского $A \subset (0, \infty)$ $\Phi^{(0)}(A) \leqslant \sum_{n=1}^\infty P_n^{(0)}(A)$, где $P_n^{(0)}(A)$ — сумма дискретной и сингулярной компонент распределения $\mathsf{P}(S_n \in A)$. Обозначим

$$\varphi_0(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y}P_1^{(0)}(dy),$$

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda y}\,dG(y)\right]^A = \int_A e^{\lambda y}\,dG(y),$$

тогда

$$\int_0^\infty e^{(q+\beta)y}\Phi^{(0)}(dy) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \int_{0+}^\infty e^{(q+\beta)y}P_n^{(0)}(dy) =$$

$$= \left[\sum_{n=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{(q+\beta)y}P_n^{(0)}(dy)\right]^{(0,\infty)} \leqslant \left[\sum_{n=1}^\infty \varphi_0^n(q+\beta)\right]^{(0,\infty)}.$$

Поэтому условие

$$\sum_{n=1}^\infty [\varphi_0^n(q+\beta)]^{(0,\infty)} < 1 \tag{13}$$

влечет за собой (12). Если $\varphi_0(q+\beta) < 1$, то (13) превращается в условие

$$[\varphi_0(q+\beta)(1-\varphi_0(q+\beta))^{-1}]^{(0,\infty)} < 1,$$

для выполнения которого в свою очередь достаточно потребовать $\varphi_0(q+\beta)<1/2$. Итак, пусть выполнено (12). Тогда в силу (11) и (3)

$$W(x)=\frac{1-p}{qa_1}\,e^{-qx}+(1-p)\sum\nolimits_{j=1}^{r}\sum\nolimits_{s=0}^{m_j-1}\left(P_{js}I_{js}^{(1)}(x)-\right.$$
$$\left.-R_{js}I_{js}^{(2)}(x)\right)+o\left(x^N e^{-(q+\beta)x}\right),\qquad (14)$$

величины P_{js}, R_{js} и N определены в теореме 1,

$$a_k=\mathsf{M}\tau^k,\quad I_{js}^{(1)}(x)=\int_x^\infty e^{-qy}\mathrm{d}\left(y^s\cos(\gamma_j y)\,e^{-\beta_j y}\right),$$
$$I_{js}^{(2)}(x)=\int_x^\infty e^{-qy}\mathrm{d}\left(y^s\sin(\gamma_j y)\,e^{-\beta_j y}\right).$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_{js}^{(1)}(x)=-x^s\cos(\gamma_j x)\,e^{-(q+\beta_j)x}+\frac{q}{\gamma_j^{s+1}}\int_{z_j}^\infty y^s\cos y e^{-\alpha_j y}\,\mathrm{d}y,$$
$$I_{js}^{(2)}(x)=-x^s\sin(\gamma_j x)\,e^{-(q+\beta_j)x}+\frac{q}{\gamma_j^{s+1}}\int_{z_j}^\infty y^s\sin y e^{-\alpha_j y}\,\mathrm{d}y,$$
$$z_j=\gamma_j x,\qquad \alpha_j=\frac{q+\beta_j}{\gamma_j}.$$

Пусть

$$E_s(z)=\int_z^\infty y^s\cos y e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y,\quad G_s(z)=\int_z^\infty y^s\sin y e^{-\alpha y}\,\mathrm{d}y,\quad s\geqslant 0.$$

Тогда

$$E_0(z)=\frac{e^{-\alpha z}(\alpha\cos z-\sin z)}{\alpha^2+1},\quad G_0(z)=\frac{e^{-\alpha z}(\cos z+\alpha\sin z)}{\alpha^2+1},$$

для $s\geqslant 0$

$$E_{s+1}(z)=\frac{z^{s+1}e^{-\alpha z}(\alpha\cos z-\sin z)}{\alpha^2+1}+\frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2+1}E_s(z)-$$
$$-\frac{s+1}{\alpha^2+1}G_s(z),$$
$$G_{s+1}(z)=\frac{z^{s+1}e^{-\alpha z}(\cos z+\alpha\sin z)}{\alpha^2+1}+\frac{s+1}{\alpha^2+1}E_s(z)+$$
$$+\frac{\alpha(s+1)}{\alpha^2+1}G_s(z),$$

откуда получаем

$$E_s(z)=e^{-\alpha z}\sum\nolimits_{k=0}^{s}z^k\left(a_{sk}\cos z+b_{sk}\sin z\right),$$
$$G_s(z)=e^{-\alpha z}\sum\nolimits_{k=0}^{s}z^k\left(c_{sk}\cos z+d_{sk}\sin z\right),$$

где при всех $s \geqslant 0$

$$a_{ss} = d_{ss} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}, \qquad c_{ss} = -b_{ss} = \frac{1}{\alpha^2+1}, \tag{15}$$

для $0 \leqslant k \leqslant s-1$

$$\begin{aligned}
a_{sk} &= \frac{\alpha s}{\alpha^2+1} a_{s-1,\,k} - \frac{s}{\alpha^2+1} c_{s-1,\,k},\\
b_{sk} &= \frac{\alpha s}{\alpha^2+1} b_{s-1,\,k} - \frac{s}{\alpha^2+1} d_{s-1,\,k},\\
c_{sk} &= \frac{s}{\alpha^2+1} a_{s-1,\,k} + \frac{\alpha s}{\alpha^2+1} c_{s-1,\,k},\\
d_{sk} &= \frac{s}{\alpha^2+1} b_{s-1,\,k} + \frac{\alpha s}{\alpha^2+1} d_{s-1,\,k}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя полученные выражения в (14), можем сформулировать окончательный результат. Обозначим

$$p_{ss}^{(j)} = -1 + q\gamma_j^{-1} a_{ss}^{(j)}, \quad t_{ss}^{(j)} = -1 + q\gamma_j^{-1} d_{ss}^{(j)}, \qquad s \geqslant 0,$$

при $0 \leqslant k \leqslant s$

$$q_{sk}^{(j)} = q\gamma_j^{k-s-1} b_{sk}^{(j)}, \qquad r_{sk}^{(j)} = q\gamma_j^{k-s-1} c_{sk}^{(j)},$$

при $0 \leqslant k \leqslant s-1$

$$p_{sk}^{(j)} = q\gamma_j^{k-s-1} a_{sk}^{(j)}, \qquad t_{sk}^{(j)} = q\gamma_j^{k-s-1} d_{sk}^{(j)},$$

величины $a_{sk}^{(j)}, b_{sk}^{(j)}, c_{sk}^{(j)}, d_{sk}^{(j)}$ $(0 \leqslant k \leqslant s)$ определены в (15), (16), где для простоты индекс j всюду опущен.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в условиях* п. 3 *выполнено* (12). *Тогда при* $x \to \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} + (1-p) \sum_{j=1}^{r} e^{-(q+\beta_j)x} \sum_{k=0}^{m_j-1} x^k \cdot$$
$$\cdot (C_{jk} \cos(\gamma_j x) + D_{jk} \sin(\gamma_j x)) + \delta(x),$$

где

$$C_{jk} = \sum_{s=k}^{m_j-1} (P_{js} p_{sk}^{(j)} - R_{js} r_{sk}^{(j)}),$$

$$D_{jk} = \sum_{s=k}^{m_j-1} (P_{js} q_{sk}^{(j)} - R_{js} t_{sk}^{(j)}),$$

$$|\delta(x)| \leqslant (1-p) L(x) e^{-(q+\beta)x} \left(\sum_{k=0}^{N} c_k x^k + \right.$$
$$\left. + |v(0)|/a_1\beta e + |Q'(0)|\right),$$

величины $\bar{P}_{js}$, $\bar{R}_{js}$, c_k, N *и функции* $L(x)$, $v(\lambda)$, $Q(\lambda)$ *определены в теореме* 1, $L(x) = o(1)$, $x \to \infty$.

Очевидным следствием теоремы 1 и (11) является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\varphi(\lambda_+) > 1$, *число* $\beta > 0$ *таково, что* $\varphi(q+\beta) < \infty$, *и* $r(\lambda) \neq 0$ *при* $q < \operatorname{Re}\lambda \leqslant q + \beta$. *Тогда если выполнено* (12), *то*

$$\left| W(x) - \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} \right| \leqslant (1-p) L_1(x) e^{-(q+\beta)x} \left(1 + \frac{\beta+1}{\beta e}\right),$$

функция $L_1(x)$ *определена в теореме* 1.

4. Пусть теперь $\varphi(\lambda_+) = 1$, т. е. $q = \lambda_+$, и при некотором $\alpha \geqslant 1$

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{qx} \mathsf{P}(\xi_1 \in dx) < \infty. \tag{17}$$

По-прежнему имеет место (11), откуда [1, с. 169]

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} + q(1-p) \int_x^\infty (S(t) - S(x)) e^{-qt} dt, \tag{18}$$

$S(t) = H(t) - t/a_1$. Условие (17) влечет за собой $\mathsf{M}\tau^\alpha < \infty$ (см. [3]), откуда вследствие результатов [4]

$$S(t) - S(x) - \frac{1}{a_1^2} \int_x^t \int_z^\infty \mathsf{P}(\tau \geqslant u)\, du\, dz = \begin{cases} o(x^{2(1-\alpha)}), & 1 \leqslant \alpha < 2, \\ o(x^{-\alpha}), & \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и меняя порядок интегрирования, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\varphi(\lambda_+) = 1$ *и при некотором* $\alpha \geqslant 1$ *выполнено* (17). *Тогда при* $x \to \infty$

$$W(x) = \frac{1-p}{qa_1} e^{-qx} \left(1 - \frac{1}{a_1} \int_x^\infty \mathsf{P}(\tau \geqslant y)(1 - e^{x-y})\, dy + \delta_1(x)\right),$$

где

$$\delta_1(x) = \begin{cases} o(x^{2(1-\alpha)}), & 1 \leqslant \alpha < 2, \\ o(x^{-\alpha}), & \alpha \geqslant 2. \end{cases}$$

При оценке функции $\int_x^{\infty} \mathsf{P}(\tau \geqslant y)(1 - e^{x-y})\,dy$ полезными могут быть следующие соотношения [3]:

$$k_1 \mathsf{P}(\tilde{\xi}_1 \geqslant y) \leqslant \mathsf{P}(\tau \geqslant y) \leqslant k_2 \mathsf{P}(\tilde{\xi}_1 \geqslant y),$$

$$k_2 = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathsf{P}(\tilde{S}_n \leqslant 0)\right\}, \quad k_1 = k_2 \mathsf{P}(\inf_{n \geqslant 0} \tilde{S}_n = 0),$$

$$\tilde{S}_0 = 0, \quad \tilde{S}_n = \tilde{\xi}_1 + \ldots + \tilde{\xi}_n, \qquad \mathsf{M}e^{\lambda \tilde{\xi}_i} = \mathsf{M}e^{(\lambda+q)\xi_i},$$

случайные величины $\tilde{\xi}_i$ независимы.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Поступило 21.01.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.: Наука, 1972.

[2] Van der Genugten B. B. Asymptotic expansion in renewal theory.— Compositio Math., 1969, v. 21, p. 331—342.

[3] Рогозин Б. А. О распределении величины первого перескопа.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 3, с. 498—515.

[4] Рогозин Б. А. Асимптотика функции восстановления.— Теория вероятн. и ее применен., 1976, т. 21, № 4, с. 689—706.