$b_{jk} \in C^\infty(G_j)$. Сейчас $H = L_2(G)$, $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. Предполагается, что $\det(b_{jk}(x_j))_{j,k=1}^n > 0$ для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ (задача (1) является правоопределенной). Роль D играет $C_0^\infty(G)$, а H_+ — подходящее весовое соболевское пространство (см. [11]).

Теорема 4. *Справедливо равенство Парсеваля* (2), *где* $\varphi_\alpha(\lambda) = \varphi_\alpha(x, \lambda)$ *— гладкое решение системы*

$$(\mathcal{L}_j\varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k b_{jk}(x_j)\varphi(x) \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in G,\ j = 1, \ldots, n).$$

Отметим, что приведенный результат не вытекает непосредственно из теоремы 3 (B_{jk} не ограничены в H_j), но его доказательство ведется по близкой схеме, основанной на теореме 2. Гладкость φ_α следует из общих теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений [11]. Аналогичный результат справедлив и для обыкновенных формально самосопряженных дифференциальных выражений $\mathcal{L}_j$ с комплексными коэффициентами (ср. с [7]). Условия бесконечной дифференцируемости коэффициентов выражения $\mathcal{L}_j$ и функций b_{jk} могут быть, конечно, ослаблены [5].

Литература

1. *Volkmer H.* J. Math. Anal. Appl., **86**, 44–53 (1982). **2.** *Browne P. J.* J. Math. Anal. Appl., **60**, 259–273 (1977). **3.** *Kallstrom A., Sleeman B. D.* J. Math. Anal. Appl., **55**, 785–793 (1976). **4.** *Березанский Ю. М., Константинов А. Ю.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 81–83 (1992). **5.** *Berezansky Yu. M., Konstantinov A. Yu.* Укр. матем. журнал, **44**, №7, 901–913 (1992). **6.** *Browne P. J.* J. Differential Equations, **12**, 81–94 (1972). **7.** *Исаев Г. А.* Матем. сб., **131**, №1, 52–72 (1986). **8.** *Гусейнов Г. Ш.* Изв. АН СССР. Сер. матем., **51**, №4, 785–811 (1987). **9.** *Binding P. A.* J. Math. Anal. Appl., **102**, 233–243 (1984). **10.** *Volkmer H.* Multiparameter eigenvalue problems and expansion theorems. Lecture Notes in Math., Vol. 1356, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1988). **11.** *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев (1965).

Киевский университет

Поступило в редакцию
5 января 1993 г.

УДК 517.98

О собственных значениях возмущенного оператора Шрёдингера с иррациональным магнитным потоком

© 1994. В. М. Мануйлов

В настоящей работе описывается подход к нахождению собственных функций возмущенного оператора Шрёдингера с иррациональным магнитным потоком

$$\left(i\,\frac{\partial}{\partial x} + 2\pi\theta y\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + V(x, y) \tag{1}$$

с двоякопериодическим возмущением $V(x,y)=V(x+1,y)=V(x,y+1)$, основанный на представлении этого оператора как оператора в гильбертовом модуле [1] над C^*-алгеброй A_θ [2].

После преобразования Фурье по x $(x\to\xi)$ и замены переменных по формулам $t=-\xi/2\pi+\theta y$, $s=\xi/2\pi$ оператор (1) примет вид

$$D=\Delta+\widetilde{V}=\theta^2\left(\left(\frac{2\pi t}{\theta}\right)^2-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+\sum_{k,l}v_{kl}T_t^kT_s^{-k}e^{2\pi ilt/\theta}e^{2\pi ils/\theta},$$

где T_t (T_s) — оператор сдвига на единицу по переменной t (соответственно s), а v_{kl} — коэффициенты разложения функции $V(x,y)$ в ряд Фурье по обеим переменным.

Пусть A есть C^*-алгебра A_θ, порожденная двумя некоммутирующими образующими U и V, такими, что $UV=e^{2\pi i\theta}VU$, и $A^\infty\subset A$ — ее «бесконечно гладкая» подалгебра элементов вида $\sum_{k,l}a_{kl}U^kV^l$ с быстро убывающими коэффициентами a_{kl}. Как показано в [2], пространство Шварца $S(\mathbb{R})$ функций на $\mathbb{R}$ является однопорожденным проективным правым A^∞-модулем (обозначим его M^∞), действие на котором задается формулами

$$(\varphi U)(t)=\varphi(t+\theta),\quad (\varphi V)(t)=e^{2\pi it}\varphi(t),\qquad \varphi(t)\in M^\infty.$$

A^∞-модуль M^∞ выделяется некоторым проектором $p\in A^\infty$: $M^\infty\cong pA^\infty$. При этом на M^∞ появляется норма, наследуемая с алгебры A. Пополнение $M=M^\infty\otimes_{A^\infty}A$ пространства M^∞ по этой норме является гильбертовым A-модулем с A-значным скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle_A$. Отметим, что в $S(\mathbb{R})\subset L^2(\mathbb{R})$ существует ортонормированный базис $\{\varphi_i(t), i\in\mathbb{N}\}$, состоящий из собственных функций оператора $\Delta=(2\pi t)^2-\theta^2d^2/dt^2$, и функции из $S(\mathbb{R}^2)\cong M^\infty\mathbin{\widehat{\otimes}}M^\infty$ могут быть представлены в виде $\sum_i\varphi_i(t)m_i(s)$, где $m_i(s)\in S(\mathbb{R})$. Определим A-значное скалярное произведение на $S(\mathbb{R}^2)$ формулой $\langle\sum_i\varphi_i(t)m_i(s),\sum_j\varphi_j(t)n_j(s)\rangle_A=\sum_i\langle m_i(s),n_i(s)\rangle_A$, где $n_j(s)\in M^\infty$. Обозначим через $S(\mathbb{R};\,M)$ (соответственно $L^2(\mathbb{R};\,M)$) пространство функций Шварца (соответственно квадратично интегрируемых функций) со значениями в банаховом пространстве M. Вложение

$$S(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\hookrightarrow S(\mathbb{R};\,M)\hookrightarrow L^2(\mathbb{R};\,M)\cong\ell_2(M)$$

позволяет считать $S(\mathbb{R}^2)$ плотным подпространством в гильбертовом модуле $\ell_2(M)=\{(m_i):i\in\mathbb{N},\ \sum_i\langle m_i,m_i\rangle_A \text{ сходится в } A\}$.

Теорема 1. *Оператор D является самосопряженным неограниченным оператором с плотной областью определения в гильбертовом A-модуле $\ell_2(M)$.*

Теорема 2. *Если возмущение $\widetilde{V}$ достаточно мало, то оператор D может быть приведен в $\ell_2(M)$ к диагональному виду, т.е. в $\ell_2(M)$ существуют базис $\{\xi_i\}$ и эндоморфизмы $\lambda_i\in\operatorname{End}M$, такие, что $D\xi_i=\lambda_i\xi_i$.*

Набросок доказательства. Пусть P_i^0 — ортопроектор в $\ell_2(M)$ на подмодуль $\{\varphi_im, m\in M\}$. Собственные векторы ξ_i оператора $\Delta+\widetilde{V}$ ищутся стандартными методами теории возмущений в виде $P_i^0\xi_i=\xi_i^0$, где ξ_i^0 — собственные векторы оператора Δ (т.е. стандартный базис в $\ell_2(M)$). Существование ξ_i обеспечивается теоремой о неявной функции. Доказательство того, что $\{\xi_i\}$ — базис, опирается на следующий технический результат.

Лемма 1. *Пусть* $\|\xi_i a_i\| = 1$, $a_i \in A$, $\varepsilon > 0$. *Если норма возмущения* $\|\widetilde{V}\|$ *достаточно мала, то* $1-\varepsilon \leqslant \|pa_i\| \leqslant 1$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что вектор ξ_i может быть представлен в виде $\xi_i = W\xi_i^0$, где $W = (\Delta + \widetilde{V} - \lambda_i + P_i^0)^{-1}$ — ограниченный оператор, $\|W\| < C$. Следовательно, $\xi_i a_i = W\xi_i^0 a_i$. Разложим a_i в сумму двух проекций: $a_i = pa_i + (1-p)\,a_i$. Тогда

$$\xi_i a_i = W\xi_i^0 a_i = W\xi_i^0 pa_i + W\xi_i^0 (1-p)\,a_i = W\xi_i^0 pa_i = \xi_i pa_i\,;$$

поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_i \in M$. Разложим вектор ξ_i по базису $\{\xi_i^0\}$:

$$\xi_i = \sum_j \xi_j^0\,\langle \xi_j^0, \xi_i\rangle_A\,, \qquad \xi_i a_i = \sum_i \xi_j^0\,\langle \xi_j^0, \xi_i\rangle_A a_i\,. \tag{2}$$

Пусть λ_i^0 — собственные значения оператора Δ, $\lambda_i^0 = 2\pi\theta(2i-1)$. Обозначим $\langle \xi_j^0, \xi_i\rangle_A$ через x_{ij}; $px_{ij} = x_{ij}$. Непосредственно проверяется, что для любого $\delta > 0$ при достаточно малом значении $\|\widetilde{V}\|$

$$\|x_{ij}\| < \delta/|i-j|, \qquad i \neq j\,. \tag{3}$$

При $i = j$ имеем $x_{ii} = p$. С учетом суммируемости ряда $\sum_{j\,,j\neq i}(i-j)^{-2} = \pi^2/3$ из (2) и (3) следует неравенство

$$1 = \|\xi_i a_i\|^2 \leqslant \sum_{j\,,j\neq i} \|x_{ij} a_i\|^2 + \|pa_i\|^2 \leqslant \left(\frac{\pi^2}{3}\,\delta^2 + 1\right)\|pa_i\|^2.$$

Выбирая δ достаточно малым, получаем, что $\|pa_i\| > 1-\varepsilon$. Неравенство $\|pa_i\| \leqslant 1$ следует из неравенства Бесселя, примененного к (2).

Лемма 2. *Пусть* $\sum_i \xi_i a_i = 0$ *для некоторых* $a_i \in A$. *Тогда* $\xi_i a_i = 0$ *при всех* i.

Лемма 3. *Векторы* $\{\xi_i\}$ *образуют базис* A*-модуля* $\ell_2(M)$.

Рассмотрим теперь случай $\theta = 1$. При этом $A_1 = C(\mathbb{T}^2)$ — алгебра функций на торе, $\operatorname{End} A_1 = A_1$ и $M = \Gamma(\eta)$, где η — одномерное расслоение над $\mathbb{T}^2$, $c_1(\eta) = 1$. В [3, 4] описаны собственные функции ψ оператора D при $\theta \in \mathbb{N}$ как «магнитно-блоховские» функции. В переменных (t, s) они удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}\psi(t,s)U &= \psi(t,s+1) &&= e^{2\pi i p_1}\psi(t,s),\\ \psi(t,s)V &= \psi(t,s)\,e^{2\pi i s} &&= e^{2\pi i p_2}\psi(t,s)\,.\end{aligned}$$

При фиксированном $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2$ такие функции имеют вид $\psi_p(t,s) = \varphi(t)\,\alpha_p(s)$, где $\alpha_p(s) = \sum_n e^{2\pi i n p_1}\delta(s-p_2-n)$ — обобщенная функция, $\alpha_p(s) \in S'(\mathbb{R})$. Определим гильбертово пространство таких функций $H_p = \{\psi_p(t,s) : \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})\}$ и обозначим через D_p ограничение оператора D на пространство H_p. Этот оператор для каждого значения p имеет простой спектр $\{\varepsilon_i(p)\}$ и собственные функции $\psi_{p,i}(t,s) = \varphi_{p,i}(t)\,\alpha_p(s)$.

Теорема 3. *Функции $\psi_{p,i}$ являются собственными функциями операторов λ_i. При отождествлении* $\operatorname{End} A_1 = A_1 = C(\mathbb{T}^2)$ *операторы λ_i совпадают с функциями ε_i.*

Замечание. При рациональных значениях θ наш подход также эквивалентен подходу [3]. При иррациональных значениях θ по теореме 2 каждому A-собственному значению $\lambda_i \in \operatorname{End} M \cong A_{1/\theta}$ оператора D соответствует собственный подмодуль гильбертова модуля $\ell_2(M)$, порожденный вектором ξ_i и изоморфный модулю M с классом Чженя $c_1(M) = \theta$. Задача описания спектра и собственных функций оператора D сводится к соответствующей задаче для счетного набора разностных операторов $\lambda_i = \sum_k f_k(s) T_s^k$, где функции $f_k(s)$ периодичны с периодом θ.

В заключение автор выражает благодарность А. С. Мищенко за внимание к работе.

Литература

1. *Paschke W. L.* Trans. Amer. Math. Soc., **182**, No. 3, 443–468 (1973). **2.** *Connes A.* C. R. Acad. Sci. Paris Sèr. A, **290**, No. 13, 599–604 (1980). **3.** *Новиков С. П.* В кн.: Современные проблемы математики, т. 23, ВИНИТИ, М. (1983), 3–32. **4.** *Лыскова А. С.* УМН, **36**, вып. 2, 189–190 (1981).

Московский государственный
открытый университет

Поступило в редакцию
17 апреля 1992 г.

УДК 514.7

Гамильтоновы пары, порождаемые кососимметричными тензорами Киллинга на пространствах постоянной кривизны

 О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов[1]

На фазовом пространстве вектор-функций $u = \{u^1(x), \dots , u^n(x)\}$ скобку Пуассона двух функционалов

$$F = \int f(u, u_x, \dots)\, dx \quad \text{и} \quad G = \int g(u, u_x, \dots)\, dx$$

зададим формулой

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)}\, A^{ij}\, \frac{\delta G}{\delta u^j(x)}\, dx\,, \tag{1}$$

где в качестве оператора A^{ij} рассмотрим нелокальное выражение

$$A^{ij} = g^{ij}(u)\, d - g^{is}(u)\,\Gamma^j_{sk}(u)\, u^k_x + c\, u^i_x\, d^{-1} u^j_x\,. \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при частичной поддержке одного из авторов (О.М.) Международным фондом Дж. Сороса «Культурная инициатива» и Российским фондом Фундаментальных исследований, грант 94–01–01478.