В. М. Гольдштейн, С. К. Водопьянов, Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях, *Докл. АН СССР*, 1978, том 238, номер 5, 1040–1042

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 238, № 5

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, С. К. ВОДОПЬЯНОВ

МЕТРИЧЕСКОЕ ПОПОЛНЕНИЕ ОБЛАСТИ ПРИ ПОМОЩИ КОНФОРМНОЙ ЕМКОСТИ, ИНВАРИАНТНОЕ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 3 V 1977)

Введенная в плоском случае для простых концов Каратеодори [1] метрика [2] позволяет построить пополнение плоской односвязной области, инвариантное при конформных и квазиконформных отображениях. Подробное исследование этих вопросов смотри в работах [3, 4] и др.

В пространственном случае аналог теории простых концов был построен В. А. Зоричем [5, 6] для областей, квазиконформно эквивалентных шару.

Мы подходим к задаче построения границы с другой точки зрения. Квазиконформный гомеоморфизм φ: $G\to G'$ индуцирует изоморфизм пространств $L_n^1(G')$ и $L_n^1(G)$ * [7]. С пространством $L_n^1(G)$ связана емкость, используя которую мы строим метрику внутри области. Пополнение области в этой метрике инвариантно при квазиконформных отображениях. Исследуются условия совпадения емкостной метрики с эвклидовой на границе.

В исследованных случаях — в плоских областях и в пространственных областях, квазиконформно эквивалентных шару,— построенные с использованием емкостей метрики «граничные элементы» совпадают с простыми концами.

В ходе изложения $\bar{R}^n$, $n\geqslant 2$, означает n-мерное эвклидово пространство, компактифицированное одной точкой, $d(x, y)$ — эвклидово расстояние между точками x и y.

1. Для области $G\subset\bar{R}^n$ и пары (F_0, F_1) замкнутых относительно области G множеств величина

$$C(G; F_0, F_1)=\inf(\|u\|_{1,n})$$

называется конформной емкостью пары (F_0,F_1) относительно области G. В определении емкости инфимум берется по всем вещественным непрерывным функциям $u\in L_n^1(G)$, не превосходящим нуля на F_0 и не меньшим единицы на F_1. Если таких функций не существует, полагаем $C(G; F_0$ $F_1)=\infty$. Для пары множеств (F_0, F_1), находящихся на положительном расстоянии одно от другого, емкость $C(G; F_0, F_1)$ конечна.

При $0<C(G; F_0, F_1)<\infty$ существует единственная функция u_0 [8] (экстремальная функция), реализующая емкость, т. е. $(\|u_0\|_{1,n})^n=$ $=C(G; F_0, F_1)$. Экстремальная функция непрерывна в области G, монотонна в области $G\setminus(F_0\cup F_1)$, равна нулю на F_0 и единице на F_1 [9].

Выберем в области G компактную подобласть V.

---

* $L_n^1(G)$ — пространство локально суммируемых в области $G\subset R^n$ функций, имеющих суммируемые в степени n обобщенные производные; $L_n^1(G)$ рассматривается с полунормой

$$\|u\|_{1,n}=\left(\int_G|\nabla u|^n\,dx\right)^{1/n}.$$

Емкостным расстоянием между точками x_1, $x_2 \in G \setminus \overline{V}$ назовем величину

$$\rho_V(x_1, x_i) = \inf_{F_1} \sqrt{C(G; \overline{V}, F_1)},$$

где F_1 — континуум, содержащий точки x_1, x_2.

Предложение 1. *Величина $\rho_V(x_1, x_2)$ является метрикой.*

Доказательство. Симметричность метрики очевидна. Неравенство треугольника следует из неравенства треугольника для полунормы в $L_n^1(G)$. Если $x_1 = x_2$, то $\rho(x_1, x_2) = 0$. Пусть $\rho(x_1, x_2) = 0$. Значит, существует последовательность континуумов $\{F_{1,n}\}$, содержащих точки x_1, x_2, для которых $C(G; \overline{V}, F_{1,n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность экстремальных функций $\{u_n\}$, реализующих емкости $C(G; \overline{V}, F_{1,n})$, сходится к нулю в метрике $L_n^1(G)$. Это означает сходимость последовательности $\{u_n\}$ к нулю всюду, исключая, может быть, множество емкости ноль ([10]). Для окончания доказательства достаточно заметить, что никакой континуум не имеет нулевой емкости.

Предложение 2. *Топология, индуцируемая емкостной метрикой в области $G \setminus \overline{V}$, совпадает с эвклидовой.*

Доказательство использует непрерывность емкости относительно сходимости континуумов ([9]) и рассуждение, аналогичное доказательству предложения 1.

Теорема 1. *Пусть φ — квазиконформный гомеоморфизм области G на область G'. Фиксируем в области G компактную подобласть V. Тогда*

$$K^{-1/n} \rho_V(x_1, x_2) \leqslant \rho'_{\varphi(V)}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant K^{1/n} \rho_V(x_1, x_2)$$

для любых точек, x_1, $x_2 \in G \setminus \overline{V}$.

Здесь K — емкостной коэффициент искажения отображения φ, $\rho'_{\varphi(V)}$ — емкостная метрика в области $G' \setminus \varphi(V)$.

Доказательство. Из определения квазиконформного гомеоморфизма для любого континуума F_1 имеем

$$K^{-1} C(G; \overline{V}, F_1) \leqslant C(G'; \varphi(\overline{V}), \varphi(F_1)) \leqslant K C(G; \overline{V}, F_1),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

2. Введение граничных элементов. Пополним стандартным образом метрическое пространство $G_V = (G \setminus \overline{V}, \rho_V)$. В пополнении $\widetilde{G}_V$ выделим множество $H_V = \widetilde{G}_V \setminus G_V$ «граничных элементов». В $\widetilde{G}_V$ метрику будем обозначать тем же символом. Для любых компактных областей V, W ($\overline{V}$, $\overline{W} \subset G$) множества H_V и H_W совпадают. Метрические пространства (H_V, ρ_V) и (H_W, ρ_W) гомеоморфны при тождественном отображении.

Теорема 2. *Пусть φ: $G \to G'$ — квазиконформный гомеоморфизм областей G и G'. Фиксируем в области G компактную подобласть V.*

Тогда гомеоморфизм φ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{\varphi}$ метрических пространства $\widetilde{G}_V$ и $\widetilde{G}'_{\varphi(V)}$. При этом

$$K^{-1/n} \rho_V(x_1, x_2) \leqslant \rho'_{\varphi(V)}(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leqslant K^{1/n} \rho_V(x_1, x_2)$$

для любых точек x_1, x_2 пространства $\widetilde{G}_V$.

Очевидно, что «граничные элементы» переходят при гомеоморфизме $\tilde{\varphi}$ в «граничные элементы».

Для произвольной точки $h \in H_V$ рассмотрим шары $Q(h, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) в метрике ρ_V. Подмножество $K_h = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{Q(h, \varepsilon) \cap G}$ пространства $\overline{R}^n$ назовем носителем «граничного элемента» h. Для ограниченной области носитель «граничного элемента» h — это объединение всех предельных в эвклидовой метрике точек для всех фундаментальных в метрике ρ_V последовательностей, входящих в класс эквивалентности, определяющий h. Гомеоморфность H_V и H_W при различном выборе подобластей V и W области G влечет независимость определения носителя от выбора подобласти.

Предложение 3. *Носитель K_h любого «граничного элемента» связен.*

Предложение 4. *Пространство $(\tilde{G}_V, \rho_V)$ линейно связно.*

3. Связь между эвклидовой и емкостной топологией.

Предложение 5. *Если носитель K_h «элемента» $h \in H_V$ состоит из одной точки, то для любой последовательности $\{x_m \in G\}$ из $\rho_V(x_m, h) \to 0$ следует $d(x_m, K_h) \to 0$ при $m \to \infty$.*

Доказательство прямо следует из определений метрики и носителя.

Предложение 6. *Если область G локально связна в точке $x \in \partial G$, то для любой последовательности точек $\{x_m \in G\}$ из $d(x_m, x) \to 0$ следует $\rho_V(x_m, h) \to 0$.*

Здесь h — некоторый «граничный элемент», носитель которого $K_h \ni x$.

Доказательство. Локальная связность области G в точке x означает, что любые две точки из последовательности x_m могут быть соединены в области G коротким путем. Отсюда следует, что $\rho_V(x_m, h) \to 0$ при $m \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть область G локально связна в любой граничной точке и носитель любого «граничного элемента» одноточечный.*

Тогда для любой компактной подобласти $V \subset G$ пространства $\tilde{G}_V$, $\overline{G} \setminus \overline{V}$ гомеоморфны при отображении id: $\tilde{G}_V \to \overline{G} \setminus \overline{V}$, $\mathrm{id}(x) = x$ *для всех* $x \in G \setminus \overline{V}$, $\mathrm{id}(h) = K_h$ *для всех* $h \in H_V$.

Доказательство представляет простую модификацию доказательств предложений 5, 6.

Теорема 4. *Если область G локально связна в любой граничной точке, а носители всех «граничных элементов» области G' одноточечны, то любой квазиконформный гомеоморфизм φ области G на G' продолжается до непрерывного отображения $\bar{\varphi}$: $\overline{G} \to \overline{G}'$.*

Теорема следует из теоремы 2 и предложений 5, 6.

4. Функциональный признак совпадения эвклидовой и емкостной топологий. *Пусть область G такова, что для любой функции $f \in L_n^1(G)$ существует функция $g \in L_n^1(R^n)$, совпадающая с f на G. Тогда:*

а) *область G локально связна в любой граничной точке;*

б) *носитель K_h любого граничного элемента состоит из одной точки;*

в) *для области G справедливо утверждение теоремы 3.*

Доказательство основано на изучении особенностей функций класса L_n^1.

В заключение сделаем замечание, иллюстрирующее разницу между двумерным и трехмерным случаем. При $n=2$ для односвязной области из локальной связности области в любой граничной точке следует одноточечность носителя любого «граничного элемента». При $n=3$ это неверно. Примером является область с «гребнем», направленным наружу при большой крутизне гребня ([11]). Ребро «гребня» является носителем некоторого «граничного элемента». Заметим, что все точки ребра достижимы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
5 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. Carathéodory*, Math. Ann., v. 73, 323 (1913). [2] *S. Mazurkiewicz*, Fund. Math., v. 26, 272 (1936). [3] *Г. Д. Суворов*, Семейства плоских топологических отображений, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1965. [4] *Г. Д. Суворов*, Метрические вопросы теории и отображений, в. VI, Киев, «Наукова думка», 1975. [5] *В. А. Зорич*, ДАН, т. 145, № 6, 1209 (1962). [6] *В. А. Зорич*, ДАН, т. 153, № 1, 23 (1963). [7] *С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн*, Сиб. матем. журн., т. 18, № 1, 48 (1977). [8] *О. Л. Ладыженская, Н. Н. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., «Наука», 1973. [9] *Г. Д. Мостов*, Сб. пер., Математика, т. 16, № 5, 105 (1972). [10] *Ю. Г. Решетняк*, Сиб. матем. журн., т. 10, № 6, 1109 (1969). [11] *Ф. У. Геринг, Ю. Вяйсяля*, Сб. пер., Математика, т. 10, № 6, 60 (1966).