Доклады Академии наук СССР
1986. Том 290, № 1

УДК 539.3:517.946

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А.Б. МОВЧАН, С.А. НАЗАРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВБЛИЗИ ОСТРЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

(Представлено академиком В.В. Новожиловым 5 V 1985)

Рассматривается плоская задача теории упругости для области с включением, имеющим форму пика (рис. 1). В п. 1° статьи изучается асимптотика напряженно-деформированного состояния вблизи вершины пикообразного включения. Найденные асимптотические формулы показывают, что компоненты тензора напряжений не имеют сингулярности в особой точке. Более того, распределение по угловой переменной напряжений в матрице такое же, как и при отсутствии включения вне зависимости от его упругих характеристик. Вместе с тем хорошо известна возможность предельного перехода по энергии при стремлении отношения E°/E модулей Юнга включения и матрицы к нулю (или к бесконечности) к решению задачи со свободной (или жестко защемленной) границей, которое имеет корневую особенность в напряжениях. Однако сходимость по энергии, естественно, не гарантирует сходимости показателя сингулярности напряжений, что и устраняет парадоксальное, на первый взгляд, несоответствие.

В первом разделе указывается лишь формальная процедура построения асимптотики. Необходимые для обоснования математические утверждения приведены в п. 2° на примере задачи о включении–полуполосе. (Отметим, что математическое исследование обеих задач проводится по общей схеме, поскольку заменой r на r^{-1} область второго типа сводится к первому.)

1°. Пикообразное включение. Пусть Ω – двусвязная область на плоскости с границей $\partial\Omega$, гладкой всюду, кроме точки 0, расположенной на внутреннем контуре Γ (рис. 1). Обозначим область, охватываемую Γ, через ω и предположим, что она задается в окрестности O неравенствами $-A(r) < \theta < A(r)$, где (r, θ) – полярные координаты с центром O; $A(r) = ar^\gamma + O(r^{\gamma+\delta})$, a, γ, δ – некоторые положительные постоянные.

Допустим, что область Ω заполнена материалом с константами Ламе λ и μ, а ω – материалом с константами λ° и μ°; массовые силы отсутствуют, деформация происходит за счет нагрузки $\mathbf{P}$, приложенной к внешнему обводу области Ω, а на Γ заданы условия неразрывности векторов смещений и напряжений. Соответствующая краевая задача имеет вид

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \ \Omega; \tag{1}$$

$$\mu^\circ\Delta\mathbf{u}^\circ + (\lambda^\circ + \mu^\circ)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^\circ = 0 \quad \text{в} \ \omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ, \quad \sigma^{(n)}(\mathbf{u}) = \sigma^{\circ(n)}(\mathbf{u}^\circ) \quad \text{на} \ \Gamma, \tag{3}$$

$$\sigma^{(n)} = \mathbf{P} \quad \text{на} \ \partial\Omega\setminus\Gamma, \tag{4}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор смещений, $\sigma^{(n)}$ – вектор напряжений; функции и операторы в области ω снабжены символом "°".

Приведем формальную процедуру построения асимптотики решения зада-

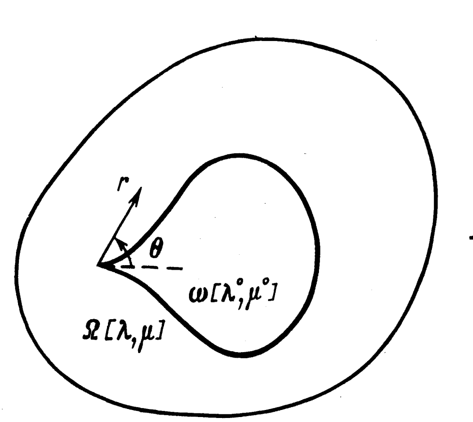

Рис. 1

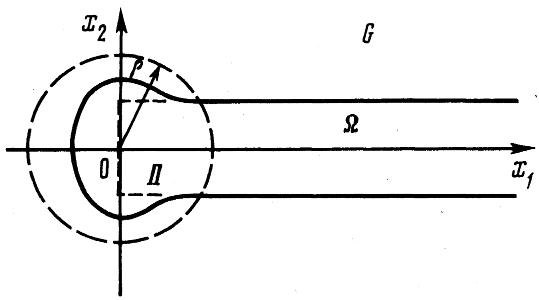

Рис. 2

чи (1) – (4). Предположим, что в уравнениях (1), (3)

(5) $\quad \mathbf{u}(r,\theta) \sim r^{\Lambda}\mathbf{v}(\theta)$,

где Λ – некоторое число, а $\mathbf{v}$ – гладкая вектор-функция на $[0, 2\pi]$. В "узкой" (при $r \to 0$) области ω переменная θ изменяется в пределах от $-A(r)$ до $A(r)$. Введем новую переменную $t = A(r)^{-1}\theta \in (-1, 1)$ и допустим, что угловая часть вектора $\mathbf{u}^{\circ}$ зависит от t (правомочность указанных предположений обосновывается результатами, приведенными в п. 2°). Тогда из условий (3) выводим, что $\mathbf{u}^{\circ}(r, \theta) \sim$ $\sim r^{\Lambda}\mathbf{v}^{\circ}(A(r)^{-1}\theta)$ и

(6) $\quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^{\circ}(1), \qquad \mathbf{v}(2\pi) = \mathbf{v}^{\circ}(-1)$.

Перейдем в уравнении (2) к полярным координатам и обозначим полученный матричный оператор $r^{-2}\mathbf{L}^{\circ}(r\,\partial/\partial r, \partial/\partial\theta)$. Поскольку

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\Lambda}\mathbf{v}^{\circ}\left(\frac{\theta}{A(r)}\right)\right) = -r^{\Lambda+1}\frac{A'(r)}{A(r)}\,t\,\frac{d\mathbf{v}^{\circ}}{dt}(t) + \Lambda r^{\Lambda}\mathbf{v}^{\circ}(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^{\Lambda}\mathbf{v}^{\circ}\left(\frac{\theta}{A(r)}\right)\right) = \frac{r^{\Lambda}}{A(r)}\,\frac{d\mathbf{v}^{\circ}}{dt}(t),$$

то

$$\mathbf{L}^{\circ}\left(r\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{u}^{\circ}(r,\theta) = \frac{r^{\Lambda}}{A(r)^2}\,\mathbf{Q}\,\frac{d^2\mathbf{v}^{\circ}}{dt^2}(t) + O(r^{\Lambda-\gamma}),$$

где $\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\mu^{\circ}, 2\mu^{\circ} + \lambda^{\circ})$. Следовательно, $d^2\mathbf{v}^{\circ}/dt^2 = 0$ и $\mathbf{v}^{\circ}$ – линейная функция. Кроме того, справедливы соотношения

$$r\sigma^{(n)}(\mathbf{u}; r, \pm A(r)) = r^{\Lambda}\mathbf{B}(\Lambda, \partial/\partial\theta)\,\mathbf{v}(\pi \mp \pi) + O(r^{\Lambda+\gamma}),$$

$$r\sigma^{\circ(n)}(\mathbf{u}^{\circ}; r, \pm A(r)) = r^{\Lambda}A(r)^{-1}\,\mathbf{Q}\,\frac{d\mathbf{v}^{\circ}}{dt}(\pm 1) + O(r^{\Lambda}) = O(r^{\Lambda-\gamma}),$$

где оператор $\mathbf{B}$ (и аналогичный ему $\mathbf{B}^{\circ}$) имеет вид

$$\mathbf{B}(\xi_1, \xi_2) = \left\| \begin{matrix} \mu\xi_2; & \mu(\xi_1 - 1) \\ 2\mu + \lambda(\xi_1 + 1); & (2\mu + \lambda)\,\xi_2 \end{matrix} \right\|.$$

Значит, $\partial\mathbf{v}^{\circ}/\partial t = 0$ и $\mathbf{v}^{\circ} = \mathrm{const}$.

Учтем теперь второй член асимптотики $\mathbf{u}^\circ$, положив

(8) $\mathbf{u}^\circ(r,\theta) \sim r^\Lambda \{\mathbf{v}^\circ + A(r)\,\mathbf{w}^\circ(A(r)^{-1}\theta)\}$.

Как и ранее, находим, что $\mathbf{w}^\circ$ – линейная функция и

(9) $$r\sigma^{(n)}(\mathbf{u}^\circ; r, \pm A(r)) = r^\Lambda \left\{ \mathbf{B}^\circ(\Lambda, 0)\,\mathbf{v}^\circ + \mathbf{Q}\,\frac{d\mathbf{w}^\circ}{dt}(\pm 1) \right\} + O(r^{\Lambda+\gamma}).$$

Таким образом, из (3), (6)–(9) получаем, что угловую часть v в (5) следует подчинить условиям согласования при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$:

$$\mathbf{B}(\Lambda, \partial/\partial\theta)\,\mathbf{v}(0) = \mathbf{B}(\Lambda, \partial/\partial\theta)\,\mathbf{v}(2\pi), \qquad \mathbf{v}(0) = v(2\pi).$$

Итак, главный член асимптотики (5) удовлетворяет условиям непрерывности векторов смещений и напряжений на луче $\{\theta = 0\}$, т.е. он "не замечает" включения. Окончательно, асимптотика смещений, нормированных условием $\mathbf{u}(0) = 0$, в окрестности O имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_r(x) &= r\{K_1\cos 2\theta + K_2\sin 2\theta + K_3(1-\kappa)\} + O(r^2),\\
\mathbf{u}_\theta(x) &= r\{-K_1\sin 2\theta + K_2\cos 2\theta + K_4(1+\kappa)\} + O(r^2),\\
\mathbf{u}_r^\circ(x) &= r\{K_1 + K_3(1-\kappa)\} + O(r^2),\\
\mathbf{u}_\theta^\circ(x) &= r\{K_2 + K_4(1+\kappa)\} + O(r^2).
\end{aligned}$$

Соответственно, для напряжений справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(x) &= 2\mu\{K_1\cos 2\theta + K_2\sin 2\theta - 2K_3\} + O(r),\\
\sigma_{r\theta}(x) &= 2\mu\{-K_1\sin 2\theta + K_2\cos 2\theta\} + O(r),\\
\sigma_{\theta\theta}(x) &= 2\mu\{-K_1\cos 2\theta - K_2\sin 2\theta - 2K_3\} + O(r),\\
\sigma_{rr}^\circ(x) &= 2K_1\left(\mu^\circ + \lambda^\circ\,\frac{\mu^\circ - \mu}{2\mu^\circ + \lambda^\circ}\right) - K_3\,\frac{4\mu}{\lambda^\circ + 2\mu^\circ}\left(\lambda^\circ + 2\mu^\circ\,\frac{\mu^\circ + \lambda^\circ}{\mu + \lambda}\right) + O(r),\\
\sigma_{r\theta}^\circ(x) &= -2\mu K_2 + O(r), \qquad \sigma_{\theta\theta}^\circ(x) = -2\mu(K_1 + 2K_3) + O(r).
\end{aligned}$$

Таким образом, угловое распределение напряжений в матрице такое же, как и при отсутствии включения. Влияние последнего сказывается лишь на коэффициентах K_1, K_2 и K_3 при соответствующих угловых частях.

2°. Включение в виде полуполосы. Пусть ω – область на плоскости $\mathbf{R}^2$, имеющая гладкую границу $\partial\omega$ и совпадающая вне круга $\mathcal{D}_\rho$ с центром в начале координат и радиусом ρ с полуполосой $\Pi = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, |x_2| < 1/2\}$ (рис. 2). Обозначим дополнение ω до $\mathbf{R}^2$ через Ω. Вектор смещений удовлетворяет системам уравнений

(10) $\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{f}(x) = 0$ в Ω,

(11) $\mu^\circ\Delta\mathbf{u}^\circ + (\lambda^\circ + \mu^\circ)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^\circ + \mathbf{f}^\circ(x) = 0$ в ω,

а также условиям сопряжения

(12) $\mathbf{u}^\circ - \mathbf{u} = \varphi$ на $\partial\omega$;

(13) $\sigma^{\circ(n)}(\mathbf{u}^\circ) - \sigma^{(n)}(\mathbf{u}) = \psi$ на $\partial\omega$.

Здесь φ и ψ – векторы скачков смещений и напряжений $\sigma^{(n)}$ на $\partial\omega$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}^\circ$ – массовые силы.

Введем функциональные пространства $V_\beta^l(\Xi)$ и $R_\beta^l(\Xi)$ в области $\Xi \subset \mathbf{R}^2$ с нормами

$$\| z; V_\beta^l(\Xi) \| = \left(\sum_{|\alpha| \le l} \int_\Xi (1 + |x|)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D_x^\alpha z(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\| z; R^l_\beta(\Xi)\| = \Bigl(\sum_{|\alpha|\leqslant l}\int_\Xi (1+|x|)^{2(\beta-l+\alpha_1)}|D^\alpha_x z(x)|^2\,dx\Bigr)^{1/2},$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$. Пространство следов на $\partial\Xi$ функций из V^l_β, $l\geqslant 1$, обозначим $V^{l-1/2}_\beta(\partial\Xi)$. Пусть еще $\mathfrak{W}^{l+2}_\beta$ – пространство вектор-функций на плоскости таких, что для их сужений w_Ω и w_ω на области Ω и ω справедливы включения

(14) $w_\Omega\in V^{l+2}_\beta(\Omega),\quad w_\omega\in V^1_{\beta-l-1/2}(\omega),\quad D^\alpha_x w_\omega\in R^l_{\beta-1/2}(\omega)$

при $|\alpha|=2$. Норма в $\mathfrak{W}^l_\beta$ равна сумме норм величин из (14) в указанных пространствах. Пусть

(15) $\mathbf{f}\in V^l_\beta(\Omega),\quad \mathbf{f}^\circ\in R^l_{\beta-1/2}(\omega),\quad \varphi\in V^{l+3/2}_\beta(\partial\Omega),\quad \psi\in V^{l+1/2}_\beta(\partial\Omega).$

Обозначим пространство векторов $\mathbf{F}=(\mathbf{f},\mathbf{f}^\circ,\varphi,\psi)$ правых частей задачи (10)–(13) $\mathfrak{W}^l_\beta$, считая, что норма вектора равна сумме норм компонент (15).

Теорема. i) *Оператор* $\mathcal{A}:\mathfrak{W}^{l+2}_\beta\to\mathfrak{W}^l_\beta$ *краевой задачи* (10)–(13) *является нётеровым в том и только том случае, если число* β *не целое.*

ii) *Пусть* $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\mathbf{u}^\circ)\in\mathfrak{W}^{l+2}_\gamma$, *выполнены включения* (14), γ,β *не целые и* $\gamma<\beta<\gamma+1$. *Тогда справедливы асимптотические формулы*

(16) $\mathbf{u}(x)=\chi(r)\,r^k[C^{(k)}_1(\cos[(1+k)\theta],\ -\sin[(1+k)\theta]+C^{(k)}_2(\sin[(1+k)\theta],$
$\cos[(1+k)\theta])+C^{(k)}_3((k-\kappa)\cos[(1-k)\theta],\ (k+\kappa)\sin[(1-k)\theta])+$
$+C^{(k)}_4((\kappa-k)\sin[(1-k)\theta],\quad (\kappa+k)\cos[(1-k)\theta])]+\mathbf{v}(x);$

(17) $\mathbf{u}^\circ(x)=r^k\{C^{(k)}_1(1,0)+C^{(k)}_2(0,1)+C^{(k)}_3(k-\kappa,0)+C^{(k)}_4(0,\kappa+k)+$
$+k\sin\theta\,[C^{(k)}_1(0,3\mu(2\mu+\lambda)^{-1})+C^{(k)}_2(1,0)+$
$+C^{(k)}_3(0,3\mu(k-\kappa)-2\lambda(\kappa-1))(2\mu+\lambda)^{-1})+C^{(k)}_4(2(k-2-\kappa),0)]\}+\mathbf{v}^\circ(x).$

Здесь $\kappa=(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)$, $\chi(r)$ – *срезка из* $\mathbf{C}^\infty$, *равная единице при* $r>2\rho$ *и нулю при* $r<\rho$; $(\mathbf{v},\mathbf{v}^\circ)\in\mathfrak{W}^{l+2}_\beta$; $C^{(k)}_j$ – *некоторые постоянные*, k – *число из интервала* $(l+1-\beta,\ l+1-\gamma)$ (*если такого числа нет, то* $C^{(k)}_j=0$); *при* $k=0$ *выделенные в* (16) *слагаемые следует заменить на*

$$(C^{(0)}_1\log r+C^{(0)}_2)(\cos\theta,-\sin\theta)+C^{(0)}_1(0,\kappa^{-1}\sin\theta)+$$
$$+(C^{(0)}_3\log r+C^{(0)}_4)(\sin\theta,\cos\theta)+C^{(0)}_3(0,-\kappa^{-1}\cos\theta);$$

аналогично изменяется и выражение (17).

Справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}|C^{(k)}_j|+\|\mathbf{V};\mathfrak{W}^{l+2}_\beta\|\leqslant \mathrm{const}\,\{\|\mathbf{U};\mathfrak{W}^{l+2}_\gamma\|+\|\mathbf{F};\mathfrak{W}^l_\beta\|\}.$$

Доказательство теоремы опирается на результаты теории общих краевых задач в областях с коническими точками [1, 2] и существенно использует так называемую процедуру расщепления, предложенную в иной ситуации в [3, 4]; для скалярного оператора второго порядка подобные утверждения получены в [5].

Ленинградский государственный университет
им. А.А. Жданова

Поступило
12 V 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев В.А.* Тр. ММО, 1967, т. 16, с. 209–292. 2. *Maz'ja V.G., Plamenevskii B.A.* – Math. Nachr., 1977, Bd. 76, S. 29–60. 3. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1972, т. 36, № 4, с. 980–1033. 4. *Пламеневский Б.А.* – Там же, 1973, т. 37, № 6, с. 1332–1375. 5. *Назаров С.А.* – Изв. вузов. Математика, 1984, № 1, с. 18–25.