С. З. Джамалов, О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева,
Журнал СВМО, 2019, том 21, номер 1, 24–33

DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.24-33

УДК 517.956.6

О гладкости решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева

© **С. З. Джамалов**[1]

Аннотация. В статье доказана однозначная разрешимость и гладкость решения одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве Соболева $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$ – целое число). Изучена однозначная разрешимость задач в пространстве $W_2^2(Q)$. Единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа второго рода доказана методом априорных оценок. Далее для доказательства существования решения рассматриваемых задач в пространстве $W_2^2(Q)$ использован метод Фурье. Другими словами рассматриваемая задача сводится к изучению однозначной разрешимости решения нелокальной краевой задачи для бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка. Для однозначной разрешимости полученных задач был использован метод «ε-регуляризации», т. е. сначала изучена методами функционального анализа однозначная разрешимость решения нелокальной краевой задачи для бесконечного числа систем уравнений составного типа с малым параметром, затем получены необходимые априорные оценки для рассматриваемых задач. Используя полученные оценки для бесконечного числа систем уравнений составного типа с малым параметром, с помощью теоремы о слабой компактности предельным переходом получено решение для бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка. Далее с помощью равенства Стеклова-Парсеваля для решения бесконечного числа систем уравнений смешанного типа второго рода второго порядка была получена однозначная разрешимость первоначальной задачи. В конце статьи изучен вопрос гладкости решения поставленной задачи.

Ключевые слова: многомерное уравнение смешанного типа второго рода второго порядка, пространство Соболева, гладкость решения краевой задачи, нелокальная краевая задача.

1. Введение и постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Обозначим через

$$Q = \Omega \times (0,T) \times (0,\ell) = Q_1 \times (0,\ell) = \{(x,t,y); x \in \Omega, 0 < y < \ell, 0 < t < T < +\infty\}$$

область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \partial Q_1 \times (0,\ell)$, $S = \partial Q_1 = \partial\Omega \times (0,T)$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$Lu \equiv K(x,t)\,u_{tt} - \left(a_{ij}(x)\,u_{x_i}\right)_{x_j} - a(x,t)u_{yy} + \alpha\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,y), \tag{1.1}$$

где $K\,(x,0) \leq 0 \leq K\,(x,T\,)$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Всюду ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n, и будем предполагать, что все функции, встречающиеся в статье, вещественнозначные и достаточно гладкие. Так как на знак функции

[1]**Джамалов Сирожиддин Зухриддинович**, доцент, старший научный сотрудник отдела «Дифференциальные уравнения» Института математики Академии наук Республики Узбекистан (100170, Узбекистан, г. Ташкент, Академгородок, ул. Мирзо Улугбек, д. 81), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129, siroj63@mail.ru

$K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений, то уравнение (1.1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода [1]–[2].

Предположим:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Кроме того, пусть выполнено одно из условий для любых $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned} &a) \quad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq a_0|\xi|^2, \quad \text{где } a_0 > 0, \\ &b) \quad a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_1|\xi|^2, \quad \text{где } a_1 < 0, \end{aligned}$$

здесь a_0, a_1 – некоторые константы.

Через $W_2^l(Q)$ ($2 \leq l$ – натуральное число) обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(\ ,\ )_l$ и нормой $\|\cdot\|_{W_2^l(Q)}$, $W_2^0(Q) = L_2(Q)$ – пространство квадратично суммируемых функций.

При получении различных априорных оценок будем использовать неравенство Коши:

$$u \cdot v \leq \frac{\sigma u^2}{2} + \frac{v^2}{2\sigma}, \quad \forall\, u, v > 0,\ \forall\, \sigma > 0.$$

Для производных порядка p удобно принять обозначение:

$$D_z^p u = \frac{\partial^p u}{\partial z^p}, \quad \text{при этом } D_z^0 u = u.$$

Постановка *нелокальной краевой задачи* заключается в следующем: найти решение $u(x,t,y)$ уравнения (1.1) из пространства Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ ($m = 0, 1, 2, ...$), удовлетворяющее нелокальным краевым условиям

$$u(x, 0, y) = \gamma \cdot u(x, T, y), \tag{1.2}$$

$$u|_S = 0, \tag{1.3}$$

$$u(x,t,0) = u(x,t,\ell) = 0, \tag{1.4}$$

где γ – некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Впервые нелокальные краевые задачи (1.2)–(1.3) для уравнения смешанного типа второго рода (1.1) в случае $a(x,t) = 0$ были исследованы функциональными методами в некоторых весовых и негативных пространствах в работах [3]–[4]. Далее в работах [5]–[6] в случае $K(x,0) = K(x,T) = 0$, $a(x,t) = 0$, γ – постоянное число, отличное от нуля, и при выполнении некоторых сравнительно сильных ограничений на коэффициенты уравнения (1.1) была доказана корректность решения задачи (1.1)–(1.3) в пространствах Соболева. Отметим, что в работах [7]–[9] в случае, когда $K(x,0) \leq 0 \leq K(x,T)$, $a(x,t) = 0$, γ – постоянное число, отличное от нуля, доказаны однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (1.1)–(1.3) в пространствах Соболева.

В настоящей работе с использованием результатов работ [7]–[9], в случае $a(x,t) \neq 0$ и при выполнении условия (1.4) на решение уравнения (1.1), изучаются однозначная разрешимость и гладкость решения задачи (1.1)–(1.4) в многомерных пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$ ($m = 0, 1, 2, ...$).

Сначала рассмотрим случай $m = 0$.

2. Единственность решения нелокальной краевой задачи

Т е о р е м а 2.1 *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (1.1)*; кроме того, пусть* $2\alpha(x,t) - K_t(x,t) + \lambda K(x,t) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\ c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\ a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \dfrac{-2}{T}\ln|\gamma|$, *причем* $|\gamma| < 1$ *в случае a) и* $|\gamma| > 1$ *в случае b)*, $c(x,0) \leq c(x,T)$, $a\ (x,0) \leq a\,(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда, если для любой функции* $f(x,t,y) \in L_2(Q)$ *существует решение задачи* (1.1)–(1.4) *в пространстве* $W_2^2(Q)$, *то оно единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем единственность решения задачи (1.1)–(1.4) с помощью интеграла энергии.

Пусть существует решение задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$. Рассмотрим равенство:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdtdy = 2\int\limits_Q f \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdydt. \tag{2.1}$$

Для любой функции $u \in W_2^2(Q)$ после интегрирования по частям равенства (2.1) нетрудно получить следующее равенство:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot e^{-\lambda t} u_t\, dxdtdy = \int\limits_Q e^{-\lambda t}\left\{(2\alpha - K_t + \lambda K)\ u_t^2 + \lambda\, a_{ij}\ u_{x_i}u_{x_j} + (\lambda a - a_t)u_y^2 + \right.$$
$$\left. + (\lambda c - c_t)u^2\right\} dxdtdy + \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda t}\left\{K u_t^2 e_t - 2a_{ij}u_{x_i}u_t e_{x_i} + a_{ij}\cdot u_{x_i}u_{x_j}e_t + cu^2 e_t + \right.$$
$$\left. + a u_y^2 e_t - 2a u_y u_t e_y\right\} ds, \tag{2.2}$$

где $e_{x_i} = \cos\alpha_i\ (i = 1, ..., n)$, $e_t = \cos\ \beta$, $e_y = \cos\ \gamma$ - координаты внешней по отношению к Q единичной нормали $\overrightarrow{e}$ к границе ∂Q, $\alpha_i\ (i = 1, ..., n)$, β, γ - соответствующие углы, которые образует с осями координат $Ox_i\ (i = 1, ..., n), Ot, Oy$ единичная нормаль $\overrightarrow{e}$, $ds-$ инфинитезимальный элемент площади поверхности ∂Q (см. [11],стр.75). Условия теоремы 2.1 обеспечивают неотрицательность интеграла по области Q. Пусть $u \in W_2^2(Q)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2)–(1.3), тогда выражение $\left[K u_t^{\,2} + a_{ij}u_{\,x_i}u_{\,x_j} + cu^{\,2} + au_y^2\right]\cdot e_t \cdot e^{-\lambda t}$ – положительно на основаниях области Q (см. [2],стр.49), а на боковой границе ∂Q равно нулю. Наконец,a_{ij}, u_{x_i}, u_t, e_{x_i} равны нулю на ∂Q, так как $e_{x_i} = 0$ на основаниях области Q, $u(x,t) = 0$ на S, согласно условия (1.4) $au_{\,y}u_{\,t}e_y = 0$. Отбрасывая положительный граничный интеграл в равенстве (2.2), получим:

$$2\int\limits_Q Lu \cdot \exp(-\lambda\, t)\cdot u_t\, dxdtdy \quad \geq \quad \int\limits_Q \exp(-\lambda\, t)\cdot\left\{(2\,\alpha - K_t + \lambda K)\cdot u_t^2 + \right.$$
$$\left. + \lambda\, a_k \cdot u_{x_i}\cdot u_{x_j} + (\lambda\, a - a_t)u_y^2 + (\lambda\, c - c_t)\, u^2\right\} dxdtdy, \tag{2.3}$$

где $a_k = a_0$ в случае a), $a_k = a_1$ в случае b).

Применяя неравенство Коши к (2.3), получим необходимую первую априорную оценку:

$$\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq c_1\,\|f\|^2_{L_2(Q)}\,. \tag{2.4}$$

Теперь докажем единственность решения задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$. Пусть существуют $u_1(x,t,y)$ и $u_2(x,t,y)$ – два решения задачи (1.1)–(1.4) из $W_2^2(Q)$, тогда для $u = u_1 - u_2$ из неравенства (2.4) получим $\|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq 0$, что возможно лишь в случае $u = 0$ или $u_1 = u_2$, что и доказывает единственность решения задачи (1.1)–(1.4) из $W_2^2(Q)$. Доказательство закончено.

Замечание 2.1 *Через c_i – здесь и далее обозначим положительные, вообще говоря, разные постоянные.*

Для доказательства разрешимости задачи (1.1)–(1.4) сначала применим метод Фурье. Для этого решение задачи (1.1)–(1.4) будем искать в виде:

$$u(x,t,y) = \sum_{s=1}^{\infty} u_s(x,t) Y_s(y), \tag{2.5}$$

где функции $Y_s(y) = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \mu_s y \right\}$, $\mu_s = \left(\frac{\pi s}{\ell}\right)^2$, $s = 1, 2, ...$ являются решениями спектральной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле. Известно, что система собственных функций $\{Y_s(y)\}$ полна в пространстве $L_2(0, \ell)$ и образует в нем ортонормированный базис [10]–[12].

В этом случае задача (1.1)–(1.4) сведется к определению функций $u_s(x,t)$, $s = 1, 2, ...$ в области $Q_1 = \Omega \times (0,T)$ из счетной системы уравнений смешанного типа второго порядка:

$$Lu_s \equiv K(x,t)u_{stt} - (a_{ij}(x)u_{sx_i})_{x_j} + \alpha(x,t)u_{st} + (c(x,t) + a(x,t)\mu_s^2)u_s = f_s(x,t), \ s = 1, 2, ... \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$u_s\,(x, 0) = \gamma \cdot u_s(x,T), \tag{2.7}$$

$$u_s\,|_S = 0, \tag{2.8}$$

где $f_s(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cdot \int\limits_0^{\ell} f(x,t,y) \sin \mu_s y dy$.

Отметим, что в работах [7]–[9] при выполнении условий теоремы 2.1 исследована однозначная разрешимость задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W_2^{m+2}(Q_1)$, $(m = 0, 1, ...)$ при фиксированном s для случая, когда $a(x,t) = 0$.

3. Семейство уравнений составного типа с малым параметром

Разрешимость задачи (2.6)–(2.8) докажем методом «ε-регуляризации», а именно в области $Q_1 = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим краевую задачу для счетного семейства уравнений составного типа с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_{s,\varepsilon} \equiv -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{s,\varepsilon} + Lu_{s,\varepsilon} = f_s(x,t), \tag{3.1}$$

$$D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=0} = \gamma \cdot D_t^q u_{s,\varepsilon}|_{t=T}, \ q = 0, 1, 2; \tag{3.2}$$

$$u_{s,\varepsilon}|_S = 0, \tag{3.3}$$

где $s = 1, 2, ...$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$ – оператор Лапласа, ε – малое положительное число, $D_z^q w = \frac{\partial^q w}{\partial z^q}$, $q = 1, 2$; $D_z^0 w = w$. Ниже используем системы уравнений составного типа с малым параметром (3.1) в качестве «ε-регуляризирующего» уравнения для системы

уравнений смешанного типа второго порядка (2.6) [1], [7]–[9],[13].
Через $W(Q_1)$ ниже будем обозначать пространство вектор-функций $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$, таких как $\{\vartheta_s(x,t)\}_{s=1}^{\infty} \in W_2^2(Q_1)$, $\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vartheta_s\}_{s=1}^{\infty} \in L_2(Q_1)$, и удовлетворяющих соответствующим условиям (3.2)–(3.3).

Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|\vartheta_s\|^2_{W(Q_1)} = \|\vartheta_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} + \varepsilon \left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vartheta_s\right\|^2_{L_2(Q_1)}.$$

Очевидно, что пространство $W(Q_1)$ с заданной нормой является банаховым [11]–[12].

Определение 3.1 *Регулярным решением задачи* (3.1)–(3.3) *будем называть вектор-функцию* $\{u_{s,\varepsilon}(x,t)\} \in W(Q_1)$, *удовлетворяющую уравнению* (3.1).

Теорема 3.1 *Пусть выполнены указанные выше условия для коэффициентов уравнения* (3.1)*; кроме того, пусть* $2\alpha - |K_t| + \lambda K \geq \delta_1 > 0$, $\lambda\; c(x,t) - c_t(x,t) \geq \delta_2 > 0$, $\lambda\; a(x,t) - a_t(x,t) \geq \delta_3 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{-2}{T}\ln|\gamma| > 0$ *и* $|\gamma| > 1$ *в случае a) и* $\lambda = \frac{-2}{T}\ln|\gamma| < 0$ *и* $|\gamma| < 1$ *в случае b),* $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$, $a(x,0) = a(x,T)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любых функций* $f_s(x,t) \in L_2(Q_1)$, *таких, что* $f_{st}(x,t) \in L_2(Q_1)$, $\gamma \cdot f_s(x,0) = f_s(x,T)$, *существует единственное решение задачи* (3.1)–(3.3) *в пространстве* $W(Q_1)$ *и для решения задачи* (3.1)–(3.3) *справедливы следующие оценки:*

$$I) \quad \varepsilon\left(\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial t}\nabla u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2\right) + \|u_{s,\varepsilon}\|_1^2 \leq c_2 \cdot \|f_s\|_0^2,$$

$$II) \quad \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta\; u_{s,\varepsilon}\right\|_0^2 + \|u_{s,\varepsilon}\|_2^2 \leq c_3 \cdot \left(\|f_s\|_0^2 + \|f_{st}\|_0^2\right)$$

Доказательство. Покажем справедливость первой оценки. Для этого рассмотрим равенство:

$$2\int\limits_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\;\cdot u_{s,\varepsilon t}\,dxdt \;=\; 2\int\limits_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot f_s \cdot u_{s,\varepsilon t}\,dxdt, \tag{3.4}$$

Интегрируя по частям равенство (3.4) и учитывая условия теоремы 3.1, нетрудно получить оценку I), аналогичную оценке (2.4), из которой следует единственность решения задачи (3.1)–(3.3) при фиксированном s.

Теперь докажем справедливость второй оценки. Для этого рассмотрим равенство:

$$-2\int\limits_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot L_\varepsilon u_{s,\varepsilon}\;\cdot \ell u_{s,\varepsilon}\,d\,x\,d\,t \;=\; -2\int\limits_{Q_1} e^{-\lambda t}\cdot f_s\cdot \ell u_{s,\varepsilon}\,d\,x\,d\,t, \tag{3.5}$$

где $\ell u_{s,\varepsilon} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{s,\varepsilon} - \lambda\, u_{s,\varepsilon tt} + \frac{\lambda}{2}\,u_{s,\varepsilon xx} - \lambda u_{s,\varepsilon t}\right)$.

Интегрируя по частям (3.5), с учетом условий теоремы 3.1 и краевых условий (3.2)–(3.3), получим следующее неравенство:

$$c_3\;(\|f_{st}\|_0^2 + \|\,f_s\,\|_0^2) \geq \varepsilon\left\|\frac{\partial\,\Delta u_{s,\varepsilon}}{\partial\;t}\right\|_0^2 + \int\limits_Q e^{-\lambda\cdot t}\,\{(\,2\alpha + K_t + \lambda\,K\,)u^2_{s,\varepsilon tt} +$$

$$+(2\alpha - K_t + \lambda\, K\,)u^2_{s,\varepsilon t x_i} + \lambda\, a_k(u^2_{s,\varepsilon x_i t} + u^2_{s,\varepsilon x_i x_j})\,\}dxdt\, +\, b_0\,\|u_{s,\varepsilon}\,\|^2_1 +$$

$$+\int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda\cdot t}\{K(u^2_{s,\varepsilon tt} + u^2_{s,\varepsilon x_i t}) + \alpha\, u_{s,\varepsilon t}u_{s,\varepsilon tt} + (a_{\,ij}u_{s,\varepsilon x_i})_{\,x_j}(u_{s,\varepsilon x_i x_j} + u_{s,\varepsilon tt}) +$$

$$+2\,(c + \mu_s^2 a)\,u_{s,\varepsilon}\,(u_{s,\varepsilon tt} + u_{s,\varepsilon x_i x_j})\,\}e_t\,ds + \int\limits_{\partial Q} e^{-\lambda\cdot t}\{Ku_{s,\varepsilon tt}u_{s,\varepsilon t x_i}\, + 2\alpha\, u_{s,\varepsilon t}u_{s,\varepsilon tt} +$$

$$+(a_{ij}\,u_{s,\varepsilon x_i})_{\,x_j t}u_{s,\varepsilon tt}\,\}\,e_{x_i}ds - \sigma(\|u_{s,\varepsilon tt}\|^2_0 + \|u_{s,\varepsilon x_i x_i}\|^2_0) - c_1(\sigma)\,\|u_{s,\varepsilon}\|^2_1 = \sum_{i=1}^{8} J_i, \qquad (3.6)$$

где J_i $(i = 1,2,3,6,7,8)$ – интегралы по области; J_4, J_5 – интегралы по границе; σ и $c_1(\sigma) = \sigma^{-1}\max\{\|\alpha\|_{C^1(Q_1)},\ \|a_{ij}\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|c\|_{C^1(Q_1)}, \|a\|_{C^1(Q_1)}\}$ – коэффициенты неравенства Коши. Выбирая коэффициенты $b - \sigma \geq b_0 > 0$, $b = \min\{\delta_1,\ \lambda a_k, \delta_2 + \delta_3 \cdot \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2\}$ и учитывая условия теоремы 3.1 и краевые условия (3.2)–(3.3), получим, что граничные интегралы $J_4 = 0$, $J_5 = 0$, а интегралы по области Q $J_i > 0$, $(i = 1,2)$.

Учитывая условия теоремы 3.1 и используя неравенство Коши, из неравенства (3.6) получим необходимую вторую оценку.

Из полученных оценок получим однозначную разрешимость задачи (3.1)–(3.3) из пространства $W(Q_1)$.

Доказательство закончено.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (2.6)–(2.8).

4. Существование решения нелокальной краевой задачи

Теорема 4.1 *Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. Тогда решение задачи* (2.6)–(2.8) *существует и единственно в* $W^2_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство теоремы 4.1 проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 в работах [8]–[9]. Единственность решения задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W^2_2(Q)$ доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование решения задачи (2.6)–(2.8) в $W^2_2(Q)$. Для этого рассмотрим в области Q_1 уравнение (3.1) и краевые условия (3.2)–(3.3) при $\varepsilon > 0$. Поскольку выполнены все условия теоремы 3.1, то существует единственное решение задачи (3.1)–(3.3) из $W(Q_1)$ при $\varepsilon > 0$, и для него справедливы первая и вторая оценки. Отсюда следует, что из множества вектор-функций $\{\,u_{s,\varepsilon}(x,t)\}$ $,\varepsilon > 0$ при фиксированной s можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функций, такую, что $\{u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\,\} \to u_s\,(x,t)$ при $\varepsilon_i \to 0$ в $W(Q_1)$.

Покажем, что предельная функция $u_s(x,t)$ удовлетворяет уравнению $Lu_s = f_s$ (уравнению (2.6)) почти всюду. В самом деле, так как последовательность $\{\,u_{s,\varepsilon_i}(x,t)\}$ слабо сходится в $W^2_2(Q)$, а последовательность $\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_{\,s,\varepsilon\,i}(x,t)\right\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q_1)$ и оператор L – линейный, то

$$Lu_s - f_s = Lu_s - Lu_{\,s,\varepsilon_i} + \varepsilon_i\frac{\partial}{\partial\,t}\Delta u_{\,\varepsilon_i} = L\,(u_s - u_{\,s,\varepsilon_i}) + \varepsilon_i\frac{\partial}{\partial\,t}\Delta u_{\,\varepsilon_i}. \qquad (4.1)$$

Из равенства (4.1), переходя к пределу при $\varepsilon_i \to 0$ и при фиксированном s, получим единственное решение задачи (2.6)–(2.8).

Доказательство закончено.

Докажем разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Т е о р е м а 4.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1. Тогда решение задачи* (1.1)–(1.4) *существует и единственно в* $W_2^2(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность решения задачи (1.1)–(1.4) в пространстве $W_2^2(Q)$ доказана в теореме 2.1. Теперь докажем существование решения задачи (1.1)–(1.4) в $W_2^2(Q)$. Мы доказали однозначную разрешимость задачи (2.6)–(2.8) в пространстве $W_2^2(Q_1)$ и для решения задачи (2.6)–(2.8) доказана соответствующая оценка:

$$\|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} \leq c_3 \cdot \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)}.$$

Поскольку система собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\sin\mu_s y\right\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и в нем образует ортонормированный базис, используя равенство Парсеваля-Стеклова [11]–[12] для решения задачи (1.1)–(1.4), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^2(Q_1)} < c_3 \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^1(Q_1)} = c_3 \cdot \|f\|_1^2. \tag{4.2}$$

Отсюда получим существование единственного решения задачи (1.1)–(1.4) из пространства $W_2^2(Q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Гладкость решения нелокальной краевой задачи

Теперь обратимся к исследованию гладкости решения задачи (1.1)–(1.4), когда $m \geq 1$. Ниже для простоты предположим, что коэффициенты уравнения (1.1) необходимое число раз дифференцируемы в замкнутой области $\overline{Q}$.

Т е о р е м а 5.1 *Пусть выполнены условия теоремы 4.2; кроме того, пусть* $2(\alpha + mK_t) - |K_t| + \lambda K \geq \delta > 0$, $D_t^q K|_{t=0} = D_t^q K|_{t=T}$, $D_t^q \alpha|_{t=0} = D_t^q \alpha|_{t=T}$, $D_t^q c|_{t=0} = D_t^q c|_{t=T}$, $D_t^q a|_{t=0} = D_t^q a|_{t=T}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t,y)$, *такой, что* $f \in W_2^m(Q)$, $D_t^{m+1} f \in L_2(Q)$, $D_t^m f|_{t=0} = \gamma \cdot D_t^m f|_{t=T}$ $(q = 0,1,2,3,...,m)$ *существует, причем единственное, решение задачи* (1.1)–(1.4) *в пространствах Соболева* $W_2^{m+2}(Q)$, *где* $m \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим также, что в работах [7]–[9] при фиксированном s, в более общем случае, когда $a(x,t) = 0$, и при ослабленных условиях на коэффициенты уравнения смешанного типа второго рода второго порядка (2.6) исследована гладкость решения нелокальной краевой задачи (2.6)–(2.8) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q_1)$, $m \in \mathbb{N}$ и доказаны соответствующие оценки:

$$\|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} \leq c_{m+3} \cdot \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)},\ m \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Путем аналогичных рассуждений при фиксированном s в случае $a(x,t) \neq 0$ для решения нелокальной краевой задачи (2.6)–(2.8) можно доказать априорные оценки (5.1).

Поскольку система собственных функций $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\ell}}\sin\mu_s y\right\}$ полна в пространстве $L_2(0,\ell)$ и образует в нем ортонормированный базис, используя равенство Парсеваля-Стеклова [11]–[12] для решения задачи (2.6)–(2.8), получим следующие оценки:

$$\|u\|^2_{W_2^{m+2}(Q)} = \sum_{s=1}^{\infty} \|u_s\|^2_{W_2^{m+2}(Q_1)} < c_{m+3} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \|f_s\|^2_{W_2^{m+1}(Q_1)} = c_{m+3} \cdot \|f\|^2_{W_2^{m+1}(Q)}. \tag{5.2}$$

Отсюда получим существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.4) из пространства $W_2^{m+2}(Q)$, $m \in \mathbb{N}$.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. В. Н. Врагов, *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, НГУ, Новосибирск, 1983, 84 с.

2. А. Г. Кузьмин, *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике*, ЛГУ, Ленинград, 1990, 204 с.

3. С. Н. Глазатов, "Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике", *Сиб. мат. журн.*, **25**:6 (1985), 162–164.

4. А. Н. Терехов, *Нелокальные краевые задачи для уравнений переменного типа. В сб. Неклассические уравнения математической физики*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 158 с.

5. С. З. Джамалов, *О корректности нелокальных краевых задач для многомерного уравнения смешанного типа. // В сб. Применение методов функционального анализа к неклассическим уравнениям математической физики*, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1989, 70 с.

6. М. Г. Каратопраклиева, "Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа", *Дифференциальные уравнения*, **27**:1 (1991), 68–79.

7. С. З. Джамалов, "Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка в прямоугольнике.", *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:4 (2017), 12–21.

8. S. Z. Djamalov, "On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle", *IIUM Journal*, **17**:2 (2016), 95–104.

9. С. З. Джамалов, "О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве", *Мат. заметки СВФУ*, **24**:4 (2017), 17–28.

10. Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965, 798 с.

11. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва, 1973, 407 с.

12. В. А. Треногин, *Фунциональный анализ*, Наука, Москва, 1980, 495 с.

13. А. И. Кожанов, *Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка*, НГУ, Новосибирск, 1990, 130 с.

Поступила 4.06.2018

MSC2010 35M10, 35M20

On the smoothness of the solution of a nonlocal boundary value problem for the multidimensional second-order equation of the mixed type of the second kind in Sobolev space

© **S. Z. Dzamalov**[1]

Abstract. In this paper we prove the unique solvability and smoothness of the solution of a nonlocal boundary-value problem for a multidimensional mixed type second-order equation of the second kind in Sobolev space $W_2^{\ell}(Q)$, ($2 \leq \ell$ is an integer). First, we have studied the unique solvability of the problems in the space $W_2^2(Q)$. Solution uniqueness for a nonlocal boundary-value problem for a mixed-type equation of the second kind is proved by the methods of a priori estimates.Further, to prove the solution existence in the space $W_2^2(Q)$, the Fourier method is used. In other words, the problem under consideration is reduced to the study of unique solvability of a nonlocal boundary value problem for an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind. For the unique solvability of the problems obtained, the "ε-regularization" method is used, i.e, the unique solvability of a nonlocal boundary-value problem for an infinite number of systems of composite-type equations with a small parameter was studied by the methods of functional analysis. The necessary a priori estimates were obtained for the problems under consideration. Basing on these estimates and using the theorem on weak compactness as well as the limit transition, solutions for an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind are obtained. Then, using Steklov-Parseval equality for solving an infinite number of systems of second-order equations of mixed type of the second kind, the unique solvability of original problem was obtained. At the end of the paper, the smoothness of the problem's solution is studied.

Key Words: multidimensional second-order equation of the mixed type of the second kind, Sobolev space, smoothness of the solution of the boundary problem, nonlocal boundary problem.

References

1. V .N. Vragov, *[Boundary problems for non-classical equations of mathematical physics]*, NGU, Novosibirsk, 1983 (In Russ.), 84 p.

2. A. G. Kuzmin, *[Non-classical mixed type equations and their applications to the gas dynamics]*, LGU, Leningrad, 1990 (In Russ.), 204 p.

3. S. N. Glazatov, "[Nonlocal boundary problems for mixed type equations in a rectangle]", *Siberian Math. Journ*, **26**:6 (1985), 162–164 (In Russ.).

4. A. N. Terekhov, "[Nonlocal boundary problems for equations of variable type]", 1985, 148–158 (In Russ.).

5. S. Z. Dzhamalov, *[About a correctness of a nonlocal value problems for the second order mixed type multidimensional equations]. Application of methods of the functional analysis to the nonclassical equations of mathematical physics]*, SO. AN. USSR, Novosibirsk, 1989 (In Russ.), 70 p.

[1]**Sirojiddin Z. Dzamalov**, Associate Professor, Senior Researcher, Department of Differential Equations, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences (81 Mirzo Ulugbek Str., Tashkent, 100170, Uzbekistan), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3925-5129, siroj63@mail.ru

6. M. G. Karatopraklieva, “[A nonlocal boundary-value problem for an equation of mixed type]”, *Differents. uravneniya*, **27**:1 (1991), 68–79 (In Russ.).

7. S. Z. Dzhamalov, “[About one nonlocal value problem with constant coefficients for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:4 (2017), 12–21 (In Russ.).

8. S. Z. Djamalov, “[On the correctness of a nonlocal problem for the second order mixed type equations of the second kind in a rectangle]”, *IIUM Journal*, **17**:2 (2016), 95–104.

9. S. Z. Dzhamalov, “About a correctness of one nonlocal value problem with constant coefficients for the second order mixed type equations of the second kind in space”, *Mat. Notes SVFU*, **24**:4 (2017), 17–28 (In Russ.).

10. Yu. M. Berezansky, *[Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators]*, Naukova dumka, Kyev, 1965 (In Russ.), 798 p.

11. O. A. Ladyjenskaya, *[Boundary problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 407 p.

12. V. A. Trenogin, *The functional analysis*, Nauka Publ., Moscow., 1980 (In Russ.), 495 p.

13. A. I. Kozhanov, *[Boundary problems for equations of mathematical physics of odd order]*, NGU, Novosibirsk, 1990 (In Russ), 130 p.

Submitted 4.06.2018