А. Н. Андрианов, А. А. Панчишкин, Сингулярные операторы Фробениуса на зигелевых модулярных формах с характерами и дзета-функции, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 2, 64–99

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 2

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФРОБЕНИУСА НА ЗИГЕЛЕВЫХ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМАХ С ХАРАКТЕРАМИ И ДЗЕТА-ФУНКЦИИ

© А. Н. Андрианов, А. А. Панчишкин

Техника сингулярных операторов Гекке для групп $\Gamma_0^2(q)$ распространена на сингулярные операторы Фробениуса, действующие на зигелевых модулярных формах с характерами Дирихле для таких групп простой ступени q. Рассмотрен вопрос о совместной диагонализации этих операторов с регулярными операторами Гекке. Результаты прилагаются к выводу эйлеровых разложений лучевых рядов Дирихле, отвечающих собственным функциям указанных операторов.

Введение

0.1. Модулярные формы с характерами. Пусть k, q — натуральные числа, χ — характер Дирихле по модулю q. Комплекснозначная функция F на *верхней полуплоскости* (*Зигеля*) *рода* n

$$\mathbb{H}_n = \{Z = X + iY \in \mathbb{C}_n^n \,;\, {}^tZ = Z,\, Y > 0\},$$

называется (*зигелевой*) *модулярной формой веса* k *и характера* χ *для группы*

$$\Gamma_0^n(q) = \left\{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{2n}^{2n} \,;\, {}^tMJ_nM = J_n,\, C \equiv 0 \pmod{q}\right\},$$

где $J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ с нулевой матрицей $0 = 0_n$ и единичной матрицей $E = E_n$ порядка n, если она голоморфна на $\mathbb{H}_n$, включая в случае $n = 1$ все параболические вершины рассматриваемой группы, и удовлетворяет функциональному уравнению

$$F\left((AZ + B)(CZ + D)^{-1}\right) = \chi(\det D)\det(CZ + D)^k F(Z) \tag{0.1}$$

Ключевые слова: дзета-функции модулярных форм, зигелевы модулярные формы, кольца Гекке–Шимуры, операторы Гекке, операторы Фробениуса.

Исследование частично поддержано РФФИ, грант РФФИ 99-01-00099.

для каждой матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ из группы $\Gamma_0^n(q)$. Мы будем обозначать через $\mathfrak{M}_k^n(q, \chi)$ $\mathbb{C}$-линейное пространство всех таких функций. Каждая функция F из этого пространства имеет *разложение Фурье* вида

$$F(Z) = \sum_{A \in \mathbb{E}_n,\, A \geq 0} f(A) \exp(\pi i Tr(AZ)), \tag{0.2}$$

где $\mathbb{E}_n$ обозначает множество всех целочисленных симметрических матриц порядка n с четными элементами на главной диагонали (*четные матрицы*), с постоянными *коэффициентами Фурье* $f(A)$, удовлетворяющими соотношениям

$$f({}^tUAU) = \chi(\det U)(\det U)^k f(A) \quad (A \in \mathbb{E}_n,\ U \in GL_n(\mathbb{Z})).$$

Модулярные формы F, коэффициенты Фурье которых вместе с коэффициентами Фурье функций $\det(CZ + D)^{-k} F((AZ + B)(CZ + D)^{-1})$ для всех матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ из *модулярной группы (Зигеля) рода* n,

$$\Gamma^n = \Gamma_0^n(1),$$

равны нулю на всех вырожденных матрицах, называются *касп-формами веса* k *и характера* χ для группы $\Gamma_0^n(q)$. Подпространство всех касп-форм из $\mathfrak{M}_k^n(q, \chi)$ будет обозначаться через $\mathfrak{N}_k^n(q, \chi)$.

Пространства $\mathfrak{M}_k^n(q, \chi)$ (соответственно $\mathfrak{N}_k^n(q, \chi)$) для всех характеров Дирихле χ по модулю q можно объединить вместе в *пространство*

$$\mathfrak{M}_k^n(q, q) = \sum_{\chi \bmod q} \mathfrak{M}_k^n(q, \chi) \tag{0.3}$$

(соответственно

$$\mathfrak{N}_k^n(q, q) = \sum_{\chi \bmod q} \mathfrak{N}_k^n(q, \chi)) \tag{0.4}$$

модулярных форм (соответственно касп-форм) веса k *для группы*

$$\Gamma^n(q, q) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0^n(q)\ ;\ \det A \equiv 1 \pmod q \right\}. \tag{0.5}$$

Пространство $\mathfrak{M}_k^n(q, q)$ может быть охарактеризовано как множество всех голоморфных функций на $\mathbb{H}_n$, включая все параболические вершины группы $\Gamma^n(q, q)$, если $n = 1$, которые удовлетворяют функциональным уравнениям

$$F((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k F(Z) \quad \left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^n(q, q)\right). \tag{0.6}$$

Коэффициенты Фурье $f(A)$ функций из пространства $\mathfrak{M}_k^n(q, q)$ удовлетворяют соотношениям

$$f({}^tUAU) = f(A) \quad (A \in \mathbb{E}_n,\ U \in SL_n(\mathbb{Z})). \tag{0.7}$$

Пространство $\mathfrak{M}_k^n(q, q)$ конечномерно над полем $\mathbb{C}$. Подпространство $\mathfrak{N}_k^n(q, q)$ касп-форм имеет структуру гильбертова пространства относительно *скалярного произведения Петерссона*, определяемого инвариантным интегрированием по фундаментальной области группы $\Gamma^n(q, q)$ на $\mathbb{H}_n$. Разложение (0.4) является ортогональным относительно скалярного произведения.

По поводу деталей о модулярных формах см. [2, гл. 2] или [3, гл. 2].

0.2. Кольца Гекке–Шимуры. Коэффициенты Фурье модулярных форм имеют важные мультипликативные свойства, которые отражают мультипликативные соотношения в подходящих кольцах, определения и основные свойства которых мы сейчас напомним.

Пусть Δ — мультипликативная полугруппа и G — подгруппа полугруппы Δ такая, что каждый двойной класс смежности GMG полугруппы Δ по подгруппе G является конечным объединением левых классов смежности GM'. Рассмотрим линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, состоящее из всех формальных конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ символов (GM) с $M \in \Delta$, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с левыми классами GM множества Δ по группе G. Группа G естественно действует на этом пространстве правыми умножениями, определяемыми на символах (GM) по правилу

$$(GM)\gamma = (GM\gamma) \quad (M \in \Delta,\ \gamma \in G).$$

Обозначим через

$$\mathcal{H}(G, \Delta) = HS_{\mathbb{Q}}(G, \Delta)$$

подпространство всех G-инвариантных элементов. Умножение элементов из $\mathcal{H}(G, \Delta)$, задаваемое формулой

$$\left(\sum_i a_i(GM_i)\right)\left(\sum_j b_j(GN_j)\right) = \sum_{i,j} a_i b_j (GM_i N_j),$$

не зависит от выбора представителей $M_i \in GM_i$ и $N_j \in GN_j$ и превращает пространство $\mathcal{H}(G, \Delta)$ в ассоциативную алгебру над $\mathbb{Q}$ с единицей $(G1_G)$, называемую *кольцом Гекке–Шимуры* (*HS-кольцом*) *полугруппы Δ относительно группы G* (*над* $\mathbb{Q}$). Элементы вида

$$(M) = (M)_G = \sum_{M_i \in G \backslash GMG} (GM_i) \quad (M \in \Delta), \tag{0.8}$$

находящиеся во взаимно-однозначном соответствии с двусторонними классами смежности полугруппы Δ по группе G, содержатся в кольце $\mathcal{H}(G, \Delta)$ и образуют его базис над $\mathbb{Q}$. Для кратности мы будем называть символы (GM) и (M) *левыми* и *двойными классами* (*полугруппы Δ по модулю G*) соответственно.

В ситуации зигелевых модулярных форм требуются в основном HS-кольца полугрупп Δ, содержащихся в полугруппе

$$\Sigma^n = \{M \in \mathbb{Z}_{2n}^{2n} \,;\, {}^tMJ_nM = \mu(M)J_n,\ \mu(M) > 0\} \tag{0.9}$$

всех целочисленных симплектических матриц порядка $2n$ с положительными *мультипликаторами* $\mu(M)$ относительно подгрупп модулярной группы Γ^n.

Важную роль в теории симплектических HS-колец играет двойственность, определяемая при помощи антиавтоморфизма второго порядка

$$M \mapsto M^* = \mu(M)M^{-1}$$

полугруппы Σ^n. Если Σ_1 некоторая подполугруппа, инвариантная относительно этого антиавтоморфизма, то линейное отображение произвольного HS-кольца полугруппы Σ_1, задаваемое на двойных классах условием

$$(M) \mapsto (M)^* = (M^*) \quad (M \in \Sigma_1), \tag{0.10}$$

является антиизоморфизмом второго порядка рассматриваемого кольца, которое мы будем называть *отображением звездочка*. Элементы T и T^* называются *двойственными* (*относительно отображения звездочка*).

Мультипликативные свойства двойных классов $(M)_G$ для конгруэнц-подгрупп G ступени q группы Γ^n таких, как $\Gamma_0^n(q)$ или $\Gamma^n(q, q)$, существенно зависят от того, являются ли мультипликаторы $\mu(M)$ матриц M взаимно-простыми со ступенью q или, напротив, делят некоторые степени ступени q (мы пишем тогда, что $\mu(M)|q^\infty$). Мы будем называть такие матрицы вместе с их левыми и двойными классами по модулю G *регулярными* (или *q-регулярными*) и *сингулярными* (или *q-сингулярными*) соответственно и обозначать через

$$\Sigma^n_{(q)} = \{M \in \Sigma^n \; ; \gcd(\mu(M), q) = 1\} \quad \text{и} \quad \Sigma^n_q = \{M \in \Sigma^n \; ; \mu(M)|q^\infty\} \qquad (0.11)$$

подполугруппы q-регулярных и q-сингулярных матриц из Σ^n. Эти подполугруппы можно использовать для построения соответствующих HS-колец группы G, состоящих соответственно из линейных комбинаций регулярных и сингулярных двойных классов по модулю группы G. Отображение звездочка (0.10) отображает эти подкольца в себя.

0.3. Операторы Петерссона, Гекке и Фробениуса. Кольца Гекке–Шимуры действуют на модулярных формах посредством линейных представлений, задаваемых операторами Гекке. Прежде всего, матрицы $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ из $\Sigma = \Sigma^n$ действуют на функциях F на $\mathbb{H} = \mathbb{H}_n$ (*нормированными*) *операторами Петерссона веса* k, задаваемыми формулой

$$F \mapsto F|_k M = \mu(M)^{nk - \frac{n(n+1)}{2}} \det(CZ + D)^{-k} F(M\langle Z\rangle), \qquad (0.12)$$

где $M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$. Эти операторы отображают голоморфные функции в голоморфные и удовлетворяют соотношениям

$$|_k MM_1 = |_k M|_k M_1 \quad (M, M_1 \in \Sigma). \qquad (0.13)$$

С помощью операторов Петерссона функциональные уравнения (0.6) можно переписать в виде

$$F|_k M = F \quad (F \in \mathfrak{M}^n_k(q, q), \; M \in \Gamma^n(q, q)). \qquad (0.14)$$

Операторы Петерссона, как правило, не отображают модулярные формы в модулярные формы для той же группы, однако их линейные комбинации, отвечающие элементам соответствующих колец Гекке–Шимуры, отображают пространства модулярных форм в себя. Например, если $G = \Gamma^n(q, q)$,

$$F \in \mathfrak{M}(G) = \mathfrak{M}_k^n(q, q) \quad \text{и} \quad T = \sum_i a_i(GM_i) \in \mathcal{H}(G, \Sigma),$$

то из соотношений (0.13), (0.14) и определения HS-колец следует, что функция

$$F|T = F|_kT = \sum_i a_i F|_k M_i \tag{0.15}$$

не зависит от выбора представителей $M_i \in GM_i$ и принадлежит пространству $\mathfrak{M}(G)$. Операторы (0.15) называются *операторами Гекке* (*веса* k *для группы* G). Из определения умножения в HS-кольцах следует, что отображение $T \to |T$ является линейным представлением кольца $\mathcal{H}(G, \Sigma)$ на пространстве $\mathfrak{M}(G)$. Подпространство касп-форм $\mathfrak{N}(G) = \mathfrak{N}_k^n(q, q)$ инвариантно относительно всех операторов Гекке.

Особый интерес для нас будут представлять линейные комбинации операторов Петерссона вида

$$F \Rightarrow F|\Pi(m) = F|_k\Pi(m) = \sum_{B \in \mathbb{S}_n/m\mathbb{S}_n} F|_k \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE \end{pmatrix}, \tag{0.16}$$

где $E = E_n$ и $\mathbb{S}_n$ обозначает множество всех целочисленных симметрических матриц порядка n, действующих на рядах Фурье вида (0.2). Причина заключается в том, что эти операторы очень просто действуют на коэффициенты Фурье рассматриваемых рядов:

$$\begin{aligned} F|\Pi(m) &= \sum_{A \in \mathbb{E}_n} f(A) m^{nk - \frac{n(n+1)}{2} - nk} \exp(\pi i Tr(A(Z+B)/m)) \\ &= \sum_{A \in \mathbb{E}_n} f(A) \exp(\pi i Tr(AZ/m)) m^{-\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{B \in \mathbb{S}_n/m\mathbb{S}_n} \exp(\pi i Tr(AB/m)) \\ &= \sum_{A \in \mathbb{E}_n} f(mA) \exp(\pi i Tr(AZ)). \end{aligned} \tag{0.17}$$

Операторы (0.16) будут называться *операторами Фробениуса*. Мы увидим в §3, что операторы Фробениуса с номерами m, делящими некоторые степени ступени q, являются на самом деле операторами Гекке веса k для групп $\Gamma_0^n(q)$ и $\Gamma^n(q, q)$ и поэтому отображают соответствующие пространства модулярных форм в себя.

0.4. Собственные функции операторов Гекке и дзета-функции. Хорошо известно, что пространства $\mathfrak{N}_k^n(q, q)$ состоят из линейных комбинаций собственных функций достаточно больших колец регулярных операторов Гекке. Вопросы одновременной диагонализации сингулярных операторов Гекке для групп $\Gamma_0^2(q)$ были недавно рассмотрены в [4]. В §4 настоящей работы мы покажем, что сингулярные операторы Фробениуса для групп $\Gamma^2(q, q)$ простых ступеней q могут быть одновременно диагонализированы вместе с регулярными операторами Гекке на определенных подпространствах пространства $\mathfrak{N}_k^2(q, q)$. Ограничение рассмотрением простых ступеней значительно упрощает вычисления, хотя вряд ли является принципиальным.

Точные соотношения между коэффициентами Фурье собственных функций операторов Гекке и соответствующими собственными числами вскрывают определенные мультипликативные свойства коэффициентов Фурье. Например, коэффициенты Фурье $f(A)$ собственной функции оператора Фробениуса $|\Pi(m)$ с собственным числом $\lambda(m)$ удовлетворяют, согласно (0.17), соотношениям

$$f(mA) = \lambda(m)f(A) \quad (A \in \mathbb{E}_n). \tag{0.18}$$

В общем случае соотношения между коэффициентами Фурье и собственными числами естественно формулируются в виде тождеств между рядами Дирихле, построенными при помощи коэффициентов Фурье, с одной стороны, и эйлеровыми произведениями (дзета-функциями) определенными посредством соответствующих собственных чисел — с другой. В §5 мы выведем соотношения между рядами Дирихле вида

$$R_F(s, A) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(mA)}{m^s} \quad (A \in \mathbb{E}_2,\ A > 0)$$

для собственных функций $F \in \mathfrak{M}_k^2(q, q)$ с коэффициентами Фурье $f(A)$ и спинорными эйлеровыми произведениями. Такие соотношения открывают возможности подхода к аналитическим и функциональным свойствам таких эйлеровых произведений, но это находится за пределами настоящей работы.

Основной результат настоящей работы можно интерпретировать как теорему о полупростоте подходящих алгебр Гекке–Шимуры (ср. с [6, с. 218]). Мы надеемся также доказать Λ-адическую версию этого результата, что важно для лучшего понимания Λ-адических спинорных L-функций для GSp_4. Отметим также, что определение локальных множителей и аналитические свойства L-функций были рассмотрены с точки зрения теории представлений в [9].

0.5. Почему с характерами? Почему оправдано рассмотрение модулярных форм для групп $\Gamma_0^n(q)$ с характерами, тогда как случай единичного характера уже был рассмотрен? Первая причина тривиальна: модулярные формы с характерами вполне естественно возникают во многих арифметических вопросах, например, как тета-ряды целочисленных квадратичных форм. Вторая причина, скорее, мистического свойства и основывается на вере в то, что естественные математические вопросы должны допускать простые ответы по крайней мере в некоторых случаях. Исследования дзета-функций модулярных форм для конгруэнц-подгрупп показывают, что индивидуальные функциональные уравнения можно ожидать только для дзета-функций модулярных форм с определенными характерами Дирихле [7], тогда как в общем случае дзета-функции удовлетворяют только матричным функциональным уравнениям. Будущее покажет, оправдана ли эта вера.

Источники. Все опущенные детали и доказательства, касающиеся зигелевых модулярных форм, регулярных колец Гекке–Шимуры и операторов Гекке, можно найти в книгах [2] или [3]; сингулярные кольца и операторы были рассмотрены в [4].

Благодарности. Мы хотели бы выразить нашу глубокую признательность коллегам из Института Макса Планка (Бонн, Германия), где настоящая работа была начата во время пребывания там первого из авторов зимой 1998–1999 гг., и Института Фурье (Университет Жозефа Фурье, Гренобль, Франция), где работа была закончена и доложена, за стимулирующие обсуждения и постоянный интерес к нашим исследованиям. Мы особенно благодарны за постоянную поддержку профессору Юрию Манину из Института Макса Планка и профессору Роллану Жиллару из Института Фурье.

Обозначения. Мы фиксируем буквы $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{C}$ для обозначения кольца целых рациональных чисел, поля рациональных чисел и поля комплексных чисел соответственно.

$\mathbb{A}_n^m$ обозначает множество всех матриц размером $m \times n$ с элементами в множестве $\mathbb{A}$. Мы используем обозначения $\mathbb{E}_n$ и $\mathbb{S}_n$, введенные в (0.2) и (0.16) для множеств всех четных матриц и целочисленных симметрических матриц порядка n соответственно.

Если M — матрица, ${}^tM$ всегда обозначает транспонированную матрицу. E_n обозначает единичную матрицу порядка n.

§1. Нейтральные кольца и операторы

Если $G \subset K$ — две конгруэнц-подгруппы ступени q модулярной группы, то *нейтральное HS-кольцо*

$$\mathcal{N}(G\backslash K) = \mathcal{H}(G, K)$$

содержится одновременно в регулярном и сингулярном HS-кольцах группы G, поскольку $\Sigma_{(q)} \cap \Sigma_q = \Gamma$.

Мы начнем с групп

$$G = \Gamma^n(q, q) \quad \text{и} \quad K = \Gamma_0^n(q). \tag{1.1}$$

Группа G является, очевидно, нормальным делителем группы K, и отображение

$$K \ni \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \det A \bmod q$$

определяет изоморфизм фактор-группы $G\backslash K$ с мультипликативной группой $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ обратимых элементов кольца классов вычетов по модулю q. Для целого числа r, взаимно-простого с q, мы обозначим через

$$P(r) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in K, \quad \det A \equiv r \pmod q \tag{1.2}$$

некоторый представитель из прообраза класса вычетов $r \bmod q$ при указанном отображении. Все такие матрицы для данного класса $r \bmod q$ образуют единственный левый и двойной класс смежности $GP(r) = GP(r)G$ по модулю группы G. Следующее предложение является легким следствием определений.

Предложение 1. (1) *Двойные классы по модулю группы G матриц $P(r)$,*

$$\rho(r) = (P(r))_G = (GP(r)), \tag{1.3}$$

зависят только от классов вычетов $r \bmod q$ и линейно порождают кольцо $\mathcal{N}(G\backslash K)$ над $\mathbb{Q}$.

(2) *Классы* (1.3) *удовлетворяют соотношениям*

$$\rho(r)\rho(r') = \rho(rr'), \ \ \rho(r)^* = \rho(r^{-1}) \quad (r, r' \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*),$$

где первая звездочка обозначает отображение (0.10).

(3) *Подпространства* $\mathfrak{M}_k^n(q,\chi) \subset \mathfrak{M}_k^n(q,q)$ *и* $\mathfrak{N}_k^n(q,\chi) \subset \mathfrak{N}_k^n(q,q)$ *модулярных форм и касп-форм веса* k *и характера* χ *для группы* K *могут быть охарактеризованы как подмножества всех функций* F *из соответствующих пространств, удовлетворяющих соотношениям*

$$F|_k\rho(r) = \chi(r)^{-1}F \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*).$$

В §3.2 работы [4] были рассмотрены нейтральные кольца $\mathcal{N}(\Gamma_0^n(q)\backslash\Gamma_0^n(q/p))$ для каждого простого делителя p ступени q, неделящего отношение q/p. Здесь мы только приведем упрощенную версию полученных там результатов в частном случае $n = 2$ и $q = p$.

Предложение 2. *Пусть* q *— простое число и пусть* $n = 2$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Нейтральное кольцо* $\mathcal{N}(K\backslash\Gamma)$ *группы* $\Gamma = \Gamma^2$ *и подгруппы* $K = \Gamma_0^2(q)$ *состоит из линейных комбинаций трех различных двойных классов*

$$\xi_0 = (E)_K, \quad \xi_1 = (I)_K \quad \text{и} \quad \xi_2 = (J)_K \tag{1.4}$$

матриц

$$E = E_4, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -E_2 \\ E_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) *Указанные двойные классы имеют следующие разложения на левые классы по модулю* K

$$\xi_0 = (KE), \quad \xi_1 = \sum_{U \in \mathbf{U}_1} (KIU), \quad \xi_2 = \sum_{U \in \mathbf{U}_2} (KJU), \tag{1.5}$$

где $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_{11} \cup \mathbf{U}_{12}$ *с*

$$\mathbf{U}_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & v & w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -v & 1 \end{pmatrix}; v, w \bmod q \right\}, \quad \mathbf{U}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & w \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; w \bmod q \right\}$$

и где

$$\mathrm{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} E_2 & B \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} ; B \in \mathbb{S}_2/q\mathbb{S}_2 \right\}.$$

(3) *Эти двойные классы инвариантны относительно отображения звездочка; в частности, кольцо* $\mathcal{N}(K\backslash\Gamma)$ *коммутативно.*

(4) *Справедлива следующая формула:*

$$\xi_2^2 = q^3\xi_0 + q^2(q-1)\xi_1 + q^2(q-1)\xi_2.$$

Для дальнейших приложений нам потребуются аналогичные факты для группы $\Gamma^2(q, q)$ вместо группы $\Gamma_0^2(q)$, которые оказываются несколько более сложными даже для простых q.

Предложение 3. *Пусть* q *— нечетное простое число и пусть* $n = 2$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Нейтральное кольцо* $\mathcal{N}(G\backslash\Gamma)$ *группы* $\Gamma = \Gamma^2$ *и подгруппы* $G = \Gamma^2(q, q)$ *состоит из линейных комбинаций* $2q$ *различных двойных классов*

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(r) &= (P(r))_G \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \\ \xi_1^+ &= (I)_G, \\ \xi_1^- &= (P(d)I)_G, \\ \rho(r)\widetilde{\xi}_2 &= (P(r)J)_G \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*) \end{aligned} \right. \tag{1.6}$$

с $\widetilde{\xi}_2 = (J)_G$, *где* $P(r)$ *— матрицы* (1.2), *матрицы* I *и* J *были определены в* (1.4), *и где* d *— некоторый квадратичный невычет по модулю* q.

(2) *Двойные классы* (1.6) *имеют следующие разложения на левые классы по модулю* G:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(r) &= (GP(r)) \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \\ \xi_1^+ &= \sum_{t^2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*,\, U \in \mathrm{U}_1} (GP(t^2)U), \\ \xi_1^- &= \sum_{t^2 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*,\, U \in \mathrm{U}_1} (GP(dt^2)U), \\ \rho(r)\widetilde{\xi}_2 &= \sum_{U \in \mathrm{U}_2} (GP(r)JU) \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \end{aligned} \right. \tag{1.7}$$

где множества U_1 *и* U_2 *были определены в* (1.5).

(3) *Класс $\widetilde{\xi}_2$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$(\rho(r)\widetilde{\xi}_2)^* = \widetilde{\xi}_2\rho(r^{-1}) = \rho(r)\widetilde{\xi}_2 \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \tag{1.8}$$

где звездочка обозначает отображение (0.10), *и соотношению*

$$(\widetilde{\xi}_2)^2 = q^3\rho(1) + q^2(\xi_1^+ + \xi_1^-) + \sum_{r=1}^{q-1}\left(q^2 + \left(\frac{-r}{q}\right)q\right)\rho(r)\widetilde{\xi}_2, \tag{1.9}$$

где $(\frac{-r}{q})$ — символ Лежандра.

(4) *Ограничение оператора Гекке веса k, соответствующего классу $\widetilde{\xi}_2$, на подпространство $\mathfrak{M}_k^2(q, \chi_1) \subset \mathfrak{M}_k^2(q, q)$, где χ_1 — тривиальный характер, совпадает с оператором, отвечающим классу ξ_2.*

Доказательство. Сначала мы выберем удобную систему представителей из левых классов смежности $G\backslash\Gamma$. Так как, очевидно, можно взять

$$G\backslash\Gamma = \{G\backslash K\} \times \{K\backslash\Gamma\},$$

где $K = \Gamma_0^2(q)$, и согласно предложениям 1 и 2 соответственно, можно взять

$$G\backslash K = \{P(1), \dots, P(q-1)\} \quad \text{и} \quad K\backslash\Gamma = \{E \cup I\mathrm{U}_1 \cup J\mathrm{U}_2\},$$

то искомую систему представителей можно взять в виде

$$\begin{aligned} K\backslash\Gamma = \{P(1), \dots, P(q-1)\} \cup \{P(1)I\mathrm{U}_1 \cup \dots \cup P(q-1)I\mathrm{U}_1\} \\ \cup \{P(1)J\mathrm{U}_2 \cup \dots \cup P(q-1)J\mathrm{U}_2\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для продолжения доказательства мы докажем следующие три леммы.

Лемма 4. *Две матрицы из множества* (1.10) *могут принадлежать к одному и тому же двойному классу по модулю G, только если они обе содержатся в одном и том же из трех подмножеств в фигурных скобках.*

Доказательство. Все матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ из фиксированного двойного класса смежности по группе G (или группе K) имеют, очевидно, одинаковое значение ранга $r_q(C)$ блока C над полем из q элементов. Поскольку это значение для матриц из множеств в фигурных скобках равно соответственно 0, 1 и 2, лемма доказана. •

Лемма 5. *Две матрицы $P(r)IU$ и $P(r')IU'$ с $1 \leqslant r, r' \leqslant q-1$ и $U, U' \in \mathbf{U}_1$ содержатся в одном двойном классе смежности по группе G в том и только в том случае, если символы Лежандра чисел r и r' по модулю q равны*:

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{r'}{q}\right). \tag{1.11}$$

Доказательство. Если матрицы $P(r)IU$ и $P(r')IU'$ принадлежат к одному двойному классу смежности по группе G, то это верно также и для матриц $P(r)I$ и $P(r')I$, поскольку множество $\mathbf{U}_1$ содержится в G. Тогда существуют матрицы $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{smallmatrix}\right)$ из G такие, что выполняется соотношение

$$P(r)I\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} P(r')I,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = P(r)I\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} I^{-1}P(r')^{-1}.$$

Положим $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, используем аналогичные обозначения для матриц B, C и D, положим $P(r) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ и $P(r') = \left(\begin{smallmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{smallmatrix}\right)$. Тогда мы можем переписать последнее соотношение в виде

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & -c_2 & -c_1 & d_2 \\ -b_3 & a_4 & a_3 & b_4 \\ -b_1 & a_2 & a_1 & b_2 \\ -d_3 & c_4 & c_3 & d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\delta' & -{}^t\beta' \\ -{}^t\gamma' & {}^t\alpha' \end{pmatrix}.$$

Так как $C' \equiv \gamma \equiv \gamma' \equiv 0 \pmod{q}$, то $a_2 \equiv b_1 \equiv d_3 \equiv 0 \pmod{q}$. Так как $\det A' \equiv 1 \pmod{q}$, мы заключаем, что

$$\det\left(\alpha\begin{pmatrix} d_1 & -c_2 \\ b_3 & a_4 \end{pmatrix}{}^t\delta'\right) \equiv (r/r')d_1a_4 \equiv 1 \pmod{q}. \tag{1.12}$$

Далее, из сравнения $A^tD \equiv E_2 \pmod{q}$ следует сравнение $a_1d_1 \equiv 1 \pmod{q}$, а из сравнения $\det A \equiv 1 \pmod{q}$, сравнение $a_1a_4 \equiv 1 \pmod{q}$. Из этих сравнений и сравнений (1.12) мы получаем сравнение

$$r'/r \equiv d_1a_4 \equiv a_4/a_1 \equiv a_4^2/a_1a_4 \equiv a_4^2 \pmod{q},$$

которое доказывает необходимость условия (1.11). Обратно, если условие (1.11) выполняется, то $r' \equiv rt^2 \pmod q$, и мы можем выбрать матрицу $P(r')$ в виде

$$P(r') = P(rt^2) = P(r)P(t^2), \quad \text{где } P(t^2) \equiv \operatorname{diag}(t, t, t^{-1}, t^{-1}) \pmod q.$$

Тогда мы получаем включение

$$GP(rt^2)I = GP(r)II^{-1}P(t^2)I \in GP(r)IG,$$

поскольку

$$I^{-1}P(t^2)I \equiv \operatorname{diag}(t^{-1}, t, t, t^{-1}) \pmod q. \quad \bullet$$

Лемма 6. *Две матрицы $P(r)JU$ и $P(r')JU'$ с $1 \leqslant r, r' \leqslant q-1$ и $U, U' \in \mathrm{U}_2$ принадлежат к одному и тому же двойному классу смежности по группе G в том и только в том случае, если $r = r'$.*

Доказательство. Поскольку множество U_2 содержится в G, то достаточно рассмотреть матрицы $P(r)J$ и $P(r')J$. Аналогично доказательству предыдущей леммы, если эти матрицы содержатся в одном двойном классе смежности по группе G, то найдутся матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, содержащиеся в G и удовлетворяющие соотношению

$$P(r)J\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}P(r')J,$$

откуда

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = P(r)J\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}J^{-1}P(r')^{-1} = P(r)\begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix}P(r')^{-1}.$$

Если $P(r) = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ * & * \end{pmatrix}$ и $P(r') = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \delta' \end{pmatrix}$, то из последнего соотношения следует сравнение

$$1 \equiv \det A' \equiv \det(\alpha D^t \delta') \equiv \det \alpha \det \delta' \equiv r/r' \pmod q. \quad \bullet$$

Теперь мы можем продолжить доказательство предложения 3. Используя систему представителей (1.10), легко видеть, что утверждения (1) и (2) предложения прямо следуют из предложений 1 и 2 и лемм 4–6. Утверждение (4) следует из разложений (1.7) и (1.5).

Обратимся к утверждению (3). Так как $J^{-1} = -J$ и класс смежности $GP(r)^{-1}$ содержит представителя вида $P(r^{-1}) = JP(r)J^{-1}$, то мы получаем соотношения

$$(\rho(r)\widetilde{\xi}_2)^* = (P(r)J)_G^* = (J^{-1}P(r)^{-1})_G = (P(r)J^{-1})_G,$$

которые доказывают формулы (1.8).

Согласно (1.7) и определению умножения в HS-кольцах, мы можем написать равенство

$$(\widetilde{\xi}_2)^2 = \sum_{U,U' \in U_2} (GJUJU') = \sum_{H \in G\backslash\Gamma/G} c(H)(H)_G,$$

где H пробегает систему представителей из двойных классов смежности группы Γ по подгруппе G, и коэффициенты $c(H)$ могут быть вычислены по формуле

$$\begin{aligned} c(H) &= \nu(J)\nu(H)^{-1}\#\{U \in \mathbf{U}_2\ ;\ JUJ \in GHG\} \\ &= q^3\nu(H)^{-1}\#\left\{B \in \mathbb{S}_2/q\mathbb{S}_2\ ;\ \begin{pmatrix} -E_2 & 0 \\ B & -E_2 \end{pmatrix} \in GHG\right\}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\nu(J) = q^3$ и $\nu(H)$ обозначают количества левых смежных классов по группе G, содержащихся соответственно в двойных классах GJG и GHG (см., например, [2, лемма 3.1.5]). Согласно первой части предложения, можно считать, что $H = P(r)$, I, $P(d)I$ или $P(r)J$ с $r = 1, \ldots, q-1$ и квадратичным невычетом d по модулю q. Если $H = P(r)$, то формула (1.13) дает

$$c(P(r)) = q^3\#\left\{B \in \mathbb{S}_2/q\mathbb{S}_2\ ;\ \begin{pmatrix} -E_2 & 0 \\ B & -E_2 \end{pmatrix} \in GP(r)G = GP(r)\right\},$$

что равно q^3, если $r = 1$ и 0, если $r \neq 1$, поскольку матрица B должна удовлетворять сравнению $B \equiv 0 \pmod{q}$. Если $H = I$ или $H = P(d)I$, то соответствующие матрицы B в (1.13) должны иметь ранг 1 над полем из q элементов, т. е. иметь вид

$$B = \begin{pmatrix} c & cb \\ cb & cb^2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где, скажем, $c = 1, \ldots, q-1$ и $b = 0, 1, \ldots, q-1$. Используя разложения (1.7) для классов $\xi_1^{\pm}$, нетрудно проверить, что число матриц B вида (1.14) с фиксированным c, удовлетворяющих включению

$$\begin{pmatrix} -E_2 & 0 \\ B & -E_2 \end{pmatrix} \in GP(r)I\mathrm{U}_1,$$

равно $q+1$, если $r \equiv c^{-1} \pmod q$, и равно нулю в противном случае. Суммируя по квадратичным вычетам (соответственно невычетам) по модулю q, мы заключаем, что число матриц B в формуле (1.13) для коэффициента $c(I)$ (соответственно $c(P(d)I)$) равно $(q+1)(q-1)/2$. Поскольку число левых классов в двойных классах ξ_1^+ и ξ_1^- равно, очевидно, $q(q+1)(q-1)/2$, то соответствующие коэффициенты равны q^2.

Наконец, если $H = P(r)J$, то соответствующие матрицы B в (1.13) должны иметь ранг 2 над полем из q элементов. Легко видеть, что число матриц $B \in \mathbb{S}_2/q\mathbb{S}_2$ с фиксированным по модулю q значением $\det B \equiv b \not\equiv 0 \pmod q$, удовлетворяющих условию

$$\begin{pmatrix} -E_2 & 0 \\ B & -E_2 \end{pmatrix} \in GP(r)J\mathrm{U}_2,$$

равно

$$\#\{B \in \mathbb{S}_2/q\mathbb{S}_2 \,;\, \det B \equiv b \pmod q\}, \tag{1.15}$$

если $r \equiv b^{-1} \pmod q$, и равно нулю в противном случае. Нетрудно проверить, что число (1.15), т. е. число решений сравнения $xy - z^2 \equiv b \pmod q$ зависит только от того, является ли число $-b$ квадратичным вычетом или невычетом по модулю q и равно $q^2 + (\frac{-b}{q})q$. Тогда на основании (1.13) мы получаем

$$c(P(r)J) = q^2 + \left(\frac{-r^{-1}}{q}\right) q = q^2 + \left(\frac{-r}{q}\right) q. \quad \bullet$$

§2. Регулярные кольца и операторы

Мы определим *регулярные HS-кольца групп G* и K как кольца Гекке–Шимуры

$$\mathcal{H}_r(G) = \mathcal{H}(G, R(G)) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}_r(K) = \mathcal{H}(K, R(K)) \tag{2.1}$$

полугрупп

$$R(G) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Sigma^n_{(q)} \ ; C \equiv 0, \det A \equiv 1 \pmod q \right\}$$

и

$$R(K) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Sigma^n_{(q)} \ ; C \equiv 0 \pmod q \right\}$$

и соответствующих групп (см. (0.11)). Первое кольцо действует на пространствах

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^n_k(q, q) \quad \text{и} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}^n_k(q, q) \tag{2.2}$$

операторами Гекке (0.15), которые будут называться *регулярными*.

Лемма 7. *Каждый элемент кольца* $\mathcal{H}_r(G)$ *коммутирует с каждым элементом* $\rho(r)$ *вида* (1.3); *в частности, регулярные операторы Гекке отображают в себя каждое из подпространств*

$$\mathfrak{M}(\chi) = \mathfrak{M}^n_k(q, \chi) \subset \mathfrak{M} \quad \textit{и} \quad \mathfrak{N}(\chi) = \mathfrak{N}^n_k(q, \chi) \subset \mathfrak{N}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из теоремы 3.3.3(3) [2] следует, что

$$(P(r)^{-1}MP(r))_G = (M)_G, \quad \text{если } M \in R(G) \text{ и } r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*,$$

откуда

$$(M)_G\rho(r) = (P(r)P(r)^{-1}MP(r))_G = \rho(r)(P(r)^{-1}MP(r))_G = \rho(r)(M)_G. \quad \bullet$$

Действие кольца $\mathcal{H}_r(G)$ на каждом из подпространств $\mathfrak{M}(\chi)$ или $\mathfrak{N}(\chi)$ можно интерпретировать как действие регулярного кольца $\mathcal{H}_r(K)$ группы K, задаваемое *операторами Гекке веса* k *и характера* χ:

$$F|_{k,\chi}T = \sum_i a_i F|_{k,\chi}M_i \quad (F \in \mathfrak{M}(\chi);\ T = \sum_i a_i(KM_i) \in \mathcal{H}_r(K)), \tag{2.4}$$

где

$$F \mapsto F|_{k,\chi}M = \chi(\det A)F|_k M \quad \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in R(K)\right)$$

является *оператором Петерссона веса* k *и характера* χ и $|_k M$ — оператор (0.12). Общее, имеет место следующая теорема.

Теорема 8. *В приведенных выше обозначениях имеют место следующие утверждения:*

(1) *Если* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in R(K)$, *то* $P(M)^{-1}M \in R(G)$, *где* $P(M) = P(\det A)$ *и* $P(r)$ — *матрицы* (1–2); *из разложения*

$$(M)_K = \sum_i (KM_i)$$

следует разложение

$$(P(M)^{-1}M)_G = \sum_i (GP(M_i)^{-1}M_i),$$

и наоборот.

(2) *Линейные отображения*

$$\mathbf{i}\colon \mathcal{H}_r(K) \to \mathcal{H}_r(G), \quad \mathbf{j}\colon \mathcal{H}_r(G) \to \mathcal{H}_r(K), \tag{2.5}$$

определяемые на двойных классах $(M)_K$ *и* $(M')_G$ *матриц* $M \in R(K)$ *и* $M' \in R(G)$ *формулами*

$$\mathbf{i}(M)_K = (P(M)^{-1}M)_G, \quad \mathbf{j}(M')_G = (M')_K,$$

являются взаимно-обратными изоморфизмами $\mathbb{Q}$*-алгебр.*

(3) *Отображения* (2.5) *совместимы с действием соответствующих операторов Гекке на каждом из пространств* $\mathfrak{M}(\chi)$, *где кольцо* $\mathcal{H}_r(K)$ *действует операторами* (2.4) *веса* k *и характера* χ.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) следуют из определений и теоремы 3.3.3 [2]. Что же касается утверждения (3), то по предложению 1(3) мы получаем

$$\begin{aligned} F|_k\mathbf{i}(M)_K &= \sum_{M_i \in K\backslash KMK} F|_k P(M_i)^{-1}M_i \\ &= \sum_{M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \in K\backslash KMK} \chi(\det A_i) F|_k M_i \\ &= F|_{k,\chi}(M)_K, \end{aligned}$$

если $F \in \mathfrak{M}(\chi)$ и $M \in R(K)$. •

Регулярные кольца (2.1) являются коммутативными областями целостности, порождаемыми *локальными подкольцами* $\mathcal{H}_p(G)$ и $\mathcal{H}_p(K)$, состоящими из линейных комбинаций двойных классов матриц, содержащихся соответственно в $R(G)$ и $R(K)$, мультипликаторы которых являются степенями простого числа p, где p пробегает все простые числа, неделящие ступень q. Каждое из локальных колец является кольцом многочленов над $\mathbb{Q}$ от $n+1$ алгебраически независимых образующих. Например, кольцо $\mathcal{H}_p(\Gamma_0^2(q))$ порождено двойными классами

$$\begin{cases} T(p) = T^2(p) = (\mathrm{diag}(1,1,p,p))_K, \\ T_1(p^2) = T_1^2(p^2) = (\mathrm{diag}(1,p,p^2,p))_K, \\ [p] = T_2^2(p^2) = (pE_4)_K, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $K = \Gamma_0^2(q)$.

§3. Сингулярные элементы Фробениуса

Мы начнем с общих определений для групп G и K вида (1.1) с произвольными n и q, но позднее снова перейдем к частному случаю $n = 2$ и простого q. Элементы

$$\Pi(m) = \left(\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & mE_n \end{pmatrix}\right)_K \quad \text{и} \quad \widetilde{\Pi}(m) = \left(\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & mE_n \end{pmatrix}\right)_G \quad \text{с } m|q^\infty \tag{3.1}$$

подколец сингулярных элементов соответствующих HS-колец называются (*сингулярными*) *элементами Фробениуса для групп* K *и* G.

Предложение 9. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Двойные классы* (3.1) *имеют следующие разложения на левые классы*:

$$\Pi(m) = \sum_{B\in\mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(K\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE \end{pmatrix}\right), \quad \widetilde{\Pi}(m) = \sum_{B\in\mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(G\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE \end{pmatrix}\right), \tag{3.2}$$

где $E = E_n$ *и* $\mathbb{S} = \mathbb{S}_n$.

(2) *Элементы Фробениуса удовлетворяют соотношениям*

$$\Pi(mm') = \Pi(m)\Pi(m'), \quad \widetilde{\Pi}(mm') = \widetilde{\Pi}(m)\widetilde{\Pi}(m') \quad (m, m'|q^\infty) \tag{3.3}$$

и соотношениям

$$\rho(r)\widetilde{\Pi}(m) = \widetilde{\Pi}(m)\rho(r) \quad (m|q^\infty,\ r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \tag{3.4}$$

где $\rho(r)$ *— классы вида* (1.3).

(3) *Элементы Фробениуса коммутируют с каждым элементом соответствующих регулярных* HS*-колец* (2.1).

(4) *Каждое из подпространств* $\mathfrak{M}(\chi)$ *и* $\mathfrak{N}(\chi)$ *вида* (2.3) *инвариантно относительно всех операторов* $|_k\widetilde{\Pi}(m)$. *Ограничение оператора* $|_k\widetilde{\Pi}(m)$ *на подпространство* $\mathfrak{M}(\chi_1)$ *с тривиальным характером* χ_1 *совпадает с оператором* $|_k\Pi(m)$. *Операторы* $|_k\Pi(m)$ *и* $|_k\widetilde{\Pi}(m)$ *на пространствах соответственно* $\mathfrak{M}(\chi_1)$ *и* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^n_k(q, q)$ *являются операторами Фробениуса в смысле, определенном во Введении.*

Доказательство. (1) Докажем, например, второе из разложений (3.2). Легко видеть, что все левые классы, входящие в это разложение, различны и содержатся в двойном классе $G\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & mE\end{pmatrix}G$. Представитель из каждого левого класса смежности, содержащегося в этом двойном классе, может быть, очевидно, выбран в виде $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & mE\end{pmatrix}M$ с $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in G$. Тогда если B' — матрица из $\mathbb{S}/m\mathbb{S}$, удовлетворяющая сравнению $B' \equiv \alpha^{-1}\beta \pmod m$, то имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & mE\end{pmatrix}M = M'\begin{pmatrix} E & B' \\ 0 & mE\end{pmatrix} \quad \text{с } M' \in G.$$

(2) Мультипликативные соотношения (3.3) прямо следуют из разложений (3.2). Пусть $P(r) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Тогда если B, B' — матрицы из $\mathbb{S}$, удовлетворяющие сравнению $B' \equiv (\alpha + B\gamma)^{-1}(\beta + B\delta) \pmod m$, то матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B' \\ 0 & mE\end{pmatrix}^{-1}$$

содержится в группе K и удовлетворяет сравнению $\det\alpha' \equiv \det\alpha \equiv r \pmod q$. Отсюда следует, что левый класс смежности этой матрицы по группе G равен $GP(r)$, откуда

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}(m)\rho(r) &= \sum_{B \in \mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(G\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right) \\ &= \sum_{B' \in \mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(G\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B' \\ O & mE\end{pmatrix}\right) = \sum_{B' \in \mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(GP(r)\begin{pmatrix} E & B' \\ 0 & mE\end{pmatrix}\right) \\ &= \rho(r)\widetilde{\Pi}(m).\end{aligned}$$

(3) По (3.3) мы можем предположить, что $m = p$ является простым делителем ступени q. Утверждение об элементе $\Pi(p)$ и элементах кольца $\mathcal{H}_r(K)$ следует из предложения 3.4.11(1) и теоремы 3.3.12, доказанных в [2]. Пусть теперь $M \in R(G)$ и

$$(M)_G = \sum_i (GM_i).$$

Тогда по теореме 8(1) мы имеем разложение

$$(M)_K = \sum_i (KM_i).$$

Мы уже знаем, что последний элемент коммутирует с $\Pi(p)$, т. е.

$$\sum_{i,B} \left(KM_i \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & pE \end{pmatrix} \right) = \sum_{j,B'} \left(K \begin{pmatrix} E & B' \\ 0 & pE \end{pmatrix} M_j \right).$$

Это означает, что для каждых i и B существуют B' и j такие, что выполняется соотношение

$$M_i \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & pE \end{pmatrix} = L_i \begin{pmatrix} E & B' \\ 0 & pE \end{pmatrix} M_j \quad \text{с } L_i \in K.$$

Если $M_i = \left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{smallmatrix}\right)$ и $L_i = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{smallmatrix}\right)$, то из последнего соотношения следует сравнение

$$\alpha_i \equiv a_i^t d_j \mu(M)^{-1} \equiv a_i a_j^{-1} \pmod q,$$

откуда $\det \alpha_i \equiv 1 \pmod q$, а потому $L_i \in G$.

Утверждение (4) следует из утверждения (1) и соотношений (0.17). •

Рассмотрим теперь двойные классы

$$\Omega = (\omega)_K \quad \text{и} \quad \widetilde{\Omega} = (\omega)_G \tag{3.5}$$

матрицы $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_n \\ -qE_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$ относительно групп (1.1).

Предложение 10. (1) *Классы* (3.5) *имеют следующие свойства*:

$$\Omega = (K\omega), \qquad \widetilde{\Omega} = (G\omega), \tag{3.6}$$

$$\Omega^2 = [q]_K = (qE_{2n})_K, \quad \widetilde{\Omega}^2 = [-q]_G = (-qE_{2n})_G, \tag{3.7}$$

$$\Omega^* = \Omega, \qquad \widetilde{\Omega}^* = (-\omega)_G = [-1]_G\widetilde{\Omega}, \tag{3.8}$$

где звездочка обозначает отображение (0.10), *и*

$$\rho(r)\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}\rho(r^{-1}) \quad (r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*). \tag{3.9}$$

(2) *Ограничение оператора Гекке* $|_k\widetilde{\Omega}$ *на подпространство* $\mathfrak{M}(\chi_1)$ *с тривиальным характером* χ_1 *совпадает с оператором* $|_k\Omega$.

Доказательство. Из очевидных соотношений

$$\omega^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\omega = \begin{pmatrix} D & -C/q \\ -qB & A \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

следуют соотношения

$$\omega^{-1}K\omega = K, \quad \omega^{-1}G\omega = G, \tag{3.11}$$

откуда следуют разложения (3.6). Соотношения (3.7) следуют из (3.6), поскольку $\omega^2 = -qE_{2n}$. Последнее соотношение показывает, что $q\omega^{-1} = -\omega$, откуда следует (3.8). Используя (1.3), (3.6) и (3.10), мы получаем

$$\rho(r)\widetilde{\Omega} = (GP(r)\omega)_G = (G\omega\omega^{-1}P(r)\omega)_G = \widetilde{\Omega}\rho(r^{-1}).$$

Утверждение (2) следует из (3.6). •

Предложение 11. *Элементы Фробениуса* (3.1) *с* $m = q$ *имеют следующие разложения на множители*:

$$\Pi(q) = \Omega(J)_K, \quad \widetilde{\Pi}(q) = \widetilde{\Omega}(J)_G, \tag{3.12}$$

где $J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Достаточно доказать разложения

$$(J)_K = \sum_{B\in\mathbb{S}/q\mathbb{S}} \left(KJ\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}\right), \quad (J)_G = \sum_{B\in\mathbb{S}/q\mathbb{S}} \left(GJ\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}\right), \tag{3.13}$$

где $\mathbb{S} = \mathbb{S}_n$ и $E = E_n$. Для того чтобы доказать, например, второе разложение, мы отметим, что, очевидно,

$$(J)_G = \sum_{M \in G \cap J^{-1}GJ \backslash G} (GJM).$$

Так как

$$G \cap J^{-1}GJ = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G \,;\, B \equiv 0 \pmod{q} \right\},$$

то искомое разложение следует. •

Чтобы закончить с элементами Фробениуса, мы отметим, что двойственные им элементы относительно отображения звездочка (0.10)

$$\Pi^*(m) = \left(\begin{pmatrix} mE & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)_K, \quad \widetilde{\Pi}^*(m) = \left(\begin{pmatrix} mE & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)_G \quad \text{с } m|q^\infty, \tag{3.14}$$

где $E = E_n$, имеют, в основном аналогичные свойства.

Предложение 12. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Двойные классы* (3.14) *имеют следующие разложения на левые классы*:

$$\Pi^*(m) = \sum_{B \in \mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(K \begin{pmatrix} mE & 0 \\ qB & E \end{pmatrix} \right), \quad \widetilde{\Pi}^*(m) = \sum_{B \in \mathbb{S}/m\mathbb{S}} \left(G \begin{pmatrix} mE & 0 \\ qB & E \end{pmatrix} \right), \tag{3.15}$$

где $\mathbb{S} = \mathbb{S}_n$.

(2) *Элементы* (3.14) *удовлетворяют соотношениям*

$$\Pi^*(mm') = \Pi^*(m)\Pi^*(m'), \quad \widetilde{\Pi}^*(mm') = \widetilde{\Pi}^*(m)\widetilde{\Pi}^*(m') \quad (m, m'|q^\infty) \tag{3.16}$$

и соотношениям

$$\rho(r)\widetilde{\Pi}^*(m) = \widetilde{\Pi}^*(m)\rho(r) \quad (m|q^\infty,\, r \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*), \tag{3.17}$$

где $\rho(r)$ *классы* (1.3).

(3) *Элементы* $\Pi^*(m)$ *коммутируют с каждым из элементов регулярного кольца* $\mathcal{H}_r(K)$ *вида* (2.1).

(4) *Каждое из подпространств* $\mathfrak{M}(\chi)$ *и* $\mathfrak{N}(\chi)$ *вида* (2.3) *инвариантно относительно всех операторов* $|_k\widetilde{\Pi}^*(m)$. *Ограничения операторов* $|_k\widetilde{\Pi}^*(m)$ *на подпространство* $\mathfrak{M}(\chi_1)$ *совпадают с операторами* $|_k\Pi^*(m)$.

(5) *Имеют место следующие разложения на множители*:

$$\Pi^*(q) = (J)_K\Omega, \quad \widetilde{\Pi}^*(q) = (J)_G\widetilde{\Omega}, \tag{3.18}$$

где $J = J_n$.

Доказательство. (1) Докажем, например, второе из разложений (3.15). Используя второе из разложений (3.2), получаем

$$\omega^{-1}G\omega\omega^{-1}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & mE \end{pmatrix}\omega\omega^{-1}G\omega = \bigcup_{B\in\mathbb{S}/m\mathbb{S}} \omega^{-1}G\omega\omega^{-1}\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & mE \end{pmatrix}\omega,$$

где ω определено в (3.5). Искомое разложение следует отсюда на основании соотношений (3.10) и (3.11).

(2) Так как отображение (0.10) является антиизоморфизмом, то соотношения (3.16) и (3.17) следуют из (3.3), (3.4) и предложения 1(2).

По той же причине утверждение (3) следует из предложения 9(3), поскольку каждый элемент кольца $\mathcal{H}_r(K)$ инвариантен относительно отображения звездочка (см., например, [2, формула (3.3.14)]).

Часть (4) следует, очевидно, из части (1) и соотношений (3.17).

Наконец, применяя отображение звездочка к обеим частям разложений (3.12) и используя (3.8), мы получаем разложения (3.18), поскольку $(J)_K^* = (-J)_K = (J)_K$ и $(J)_G^* = [-1]_G(J)_G$. •

§4. Новые формы и собственные формы

На протяжении этого параграфа мы будем предполагать, что род $n = 2$ и ступень q является нечетным простым числом. (Случай $q = 2$ был, фактически, рассмотрен в [4], поскольку $\Gamma^n(2, 2) = \Gamma_0^n(2)$).

Мы используем обозначения

$$\Gamma = \Gamma^2 = \Gamma_0^2(1), \quad K = \Gamma_0^2(q) \quad \text{и} \quad G = \Gamma^2(q, q), \tag{4.1}$$

обозначаем через

$$\mathfrak{N}(\Gamma) = \mathfrak{N}_k(\Gamma) = \mathfrak{N}_k^2(1, 1) \quad \text{и} \quad \mathfrak{N}(K) = \mathfrak{N}_k(K) = \mathfrak{N}_k^2(q, \chi_1) \tag{4.2}$$

пространства всех касп-форм веса k для групп Γ и K соответственно, где χ_1 — тривиальный характер, и полагаем

$$\mathfrak{N}(\chi) = \mathfrak{N}_k^2(q, \chi), \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_k^2(q, q) = \sum_{\chi \bmod q} \mathfrak{N}(\chi), \tag{4.3}$$

где χ пробегает все характеры Дирихле по модулю q. Цель этого параграфа — определить подпространства пространства $\mathfrak{N}$, на которых все регулярные операторы Гекке и операторы Гекке, отвечающие сингулярным элементам Фробениуса $\widetilde{\Pi}(q^\delta)$, могут быть одновременно диагонализированы. Мы следуем ходу идей §4.2 и 4.3 работы [4], используя соответствующие результаты и технику.

Мы определим *подпространство* $\mathbf{O}$ *старых форм* из $\mathfrak{N}$, полагая

$$\mathbf{O} = O_k^2(q) = \sum_{i=0}^{3} \mathfrak{N}(\Gamma)|_k \widetilde{\Pi}^*(q^i). \tag{4.4}$$

По теореме 4.4 [4] это подпространство можно записать в виде

$$\mathbf{O} = \sum_{i=0}^{3} \mathfrak{N}|_k \tau(q) \widetilde{\Pi}^*(q^i), \tag{4.5}$$

где элемент

$$\tau(q) = [\Gamma : G]^{-1} \sum_{M \in G\backslash\Gamma} (GM) \in \mathcal{N}(G\backslash\Gamma) \tag{4.6}$$

является *след-идемпотентом пары* (G, Γ). Отметим, что по предложению 12(4) операторы $|\widetilde{\Pi}^*(q^i)$ в (4.4) можно заменить на операторы $|\Pi^*(q^i)$, откуда следует, что пространство старых форм $\mathbf{O}$ содержится в пространстве $\mathfrak{N}(K)$ касп-форм веса k для группы K:

$$\mathbf{O} = \sum_{i=0}^{3} \mathfrak{N}(\Gamma)|\Pi^*(q^i) \subset \mathfrak{N}(K). \tag{4.7}$$

Напомним, что пространство $\mathfrak{N}$ является конечномерным гильбертовым пространством относительно скалярного произведения Петерссона

$$\mathfrak{N} \ni F, F' \to (F, F'),$$

определяемого посредством инвариантного интегрирования по фундаментальной области группы G (см. [2, §2.5] или [4, §1.4]). Из свойств скалярного произведения мы отметим здесь только, что операторы на $\mathfrak{N}$, отвечающие элементам HS-кольца $\mathcal{H}(G, \Sigma^2)$, двойственным относительно отображения звездочка (0.10), сопряжены относительно скалярного произведения

$$(F|T, F') = (F, F'|T^*) \quad (F, F' \in \mathfrak{N}, T \in \mathcal{H}(G, \Sigma^2)) \tag{4.8}$$

(см. [4, теорема 1.9]).

Определим теперь *подпространство* N *новых форм из* $\mathfrak{N}$ как ортогональное дополнение относительно скалярного произведения Петерссона пространства старых форм:

$$\mathrm{N} = N_k^2(q, q) = \{F \in \mathfrak{N} \,;\, (F, \mathrm{O}) = 0\}. \tag{4.9}$$

По теореме 4.4 [4] и (4.8) подпространство N можно представить в виде

$$\mathrm{N} = \{F \in \mathfrak{N} \,;\, F|\widetilde{\Pi}(q^i)\tau(q) = 0 \ (i = 0, 1, 2, 3)\}. \tag{4.10}$$

Из предложения 1(2) и (4.8) следует, что разложение

$$\mathfrak{N} = \sum_{\chi \bmod q} \mathfrak{N}(\chi) = \mathfrak{N}(K) + \sum_{\chi \neq \chi_1} \mathfrak{N}(\chi)$$

является ортогональным относительно скалярного произведения, откуда на основании (4.7) следует ортогональное разложение

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}(K) + \sum_{\chi \neq \chi_1} \mathfrak{N}(\chi), \tag{4.11}$$

где

$$\mathrm{N}(K) = \{F \in \mathfrak{N}(K) \,;\, (F, \mathrm{O}) = 0\}$$

— подпространство новых форм из $\mathfrak{N}(K)$; в частности, каждая касп-форма веса k и нетривиального характера χ для группы G является новой.

Рассмотрим теперь действие операторов Гекке на пространстве новых форм.

Теорема 13. *Пусть q — нечетное простое число, k — целое число и $n = 2$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Подпространство $\mathrm{N} = N_k^2(q, q)$ новых форм из $\mathfrak{N}$ вместе с каждым из подпространств $\mathrm{N}(K)$ и $\mathfrak{N}(\chi)$, входящих в разложение* (4.11), *инвариантно относительно всех операторов Гекке из регулярного кольца $\mathcal{H}_r(G)$.*

(2) *Регулярные операторы Гекке перестановочны друг с другом и являются нормальными на указанных подпространствах.*

Доказательство. По теореме 8(3) каждое из подпространств $\mathfrak{N}(\chi) \subset \mathfrak{N}$ инвариантно относительно всех операторов Гекке $|T = |_k T$ с $T \in \mathcal{H}_r(G)$, и на каждом из пространств $\mathfrak{N}(\chi)$ эти операторы можно интерпретировать как операторы $|_{k,\chi}\mathbf{j}(T)$ с $\mathbf{j}(T) \in \mathcal{H}_r(K)$, где $\mathbf{j}$ обозначает изоморфизм, определенный в теореме 8(2). Остается только добавить, что подпространство $\mathrm{N}(K) \subset \mathfrak{N}(K)$ инвариантно относительно всех операторов Гекке, отвечающих элементам кольца $\mathcal{H}_r(K)$, по теореме 4.6(1) из [4].

Утверждение (2) следует, поскольку кольцо $\mathcal{H}_r(G)$ коммутативно и соответствующие операторы Гекке на $\mathfrak{N}$ нормальны, по предложению 4.1.7 [2]. •

Теорема 14. *Пусть q — нечетное простое число, k — целое число и $n = 2$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Подпространство $\mathrm{N} = N_k^2(q, q)$ новых форм из $\mathfrak{N}$ вместе с каждым из подпространств $\mathrm{N}(K)$ и $\mathfrak{N}(\chi)$ с $\chi \neq \chi_1$, входящих в разложение* (4.11), *инвариантны относительно операторов Фробениуса $|\widetilde{\Pi}(q^\delta) = |_k\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ и сопряженных с ними операторов $|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta) = |_k\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)$ с $\delta = 0, 1, 2, \ldots$*

(2) *Операторы Фробениуса являются нормальными операторами на подпространстве $\mathrm{N}(K)$ и на каждом из подпространств $\mathfrak{N}(\chi)$ с нетривиальным характером χ, отличным от квадратичного характера $\chi_2(r) = (\frac{r}{q})$. Точнее, эти операторы удовлетворяют соотношениям*

$$F|\widetilde{\Pi}(q^\delta)\widetilde{\Pi}^*(q^\delta) = F|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)\widetilde{\Pi}(q^\delta) = q^{(2k-4)\delta}F, \tag{4.12}$$

если $F \in \mathrm{N}(K)$, и соотношениям

$$F|\widetilde{\Pi}(q^\delta)\widetilde{\Pi}^*(q^\delta) = F|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)\widetilde{\Pi}(q^\delta) = q^{(2k-3)\delta}F, \tag{4.13}$$

если $F \in \mathfrak{N}(\chi)$ с $\chi \neq \chi_1, \chi_2$.

Сначала мы докажем три леммы.

Лемма 15. *Подпространство* $\mathrm{N}(K)$ *инвариантно относительно операторов Гекке* $|\widetilde{\xi}_2$ *и* $|\widetilde{\Omega}$, *отвечающих соответственно двойным классам, определенным в предложении* 3 *и в* (3.5).

Доказательство. По предложению 3(4) и предложению 10(2) ограничения операторов $|\widetilde{\xi}_2$ и $|\widetilde{\Omega}$ на пространство $\mathfrak{N}(\chi_1) = \mathfrak{N}(K)$ совпадают соответственно с операторами $|\xi_2$ и $|\Omega$. Поэтому лемма следует из леммы 4.10 [4]. •

Лемма 16. *Каждое из подпространств* $\mathfrak{N}(\chi)$ *отображается операторами* $|\widetilde{\xi}_2$ *и* $|\widetilde{\Omega}$ *в подпространство* $\mathfrak{N}(\chi^{-1})$.

Доказательство. Лемма следует из соотношений (1.8) и (3.9). •

Лемма 17. *Операторы* $|\widetilde{\Omega}^2$ *и* $|\widetilde{\xi}_2^2$ *удовлетворяют соотношениям*

$$F|\widetilde{\Omega}^2 = q^{2k-6}F \quad (F \in \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_k^2(q, q)), \tag{4.14}$$

и

$$F|\widetilde{\xi}_2^2 = \begin{cases} q^2F, & \text{если } F \in \mathrm{N}(K), \\ q^3F, & \text{если } F \in \mathfrak{N}(\chi) \quad (\chi \neq \chi_1, \chi_2), \\ q^2F, & \text{если } F \in \mathfrak{N}'(\chi_2), \\ q^4F, & \text{если } F \in \mathfrak{N}''(\chi_2), \end{cases} \tag{4.15}$$

где

$$\mathfrak{N}'(\chi_2) = \{F = (-1)^{\frac{q-1}{2}}q^2F' - F'|\widetilde{\xi}_2\ ;\ F' \in \mathfrak{N}(\chi_2)\}$$

и

$$\mathfrak{N}''(\chi_2) = \{F = (-1)^{\frac{q-1}{2}}qF' + F'|\widetilde{\xi}_2\ ;\ F' \in \mathfrak{N}(\chi_2)\}.$$

Доказательство. Соотношения (4.14) следуют из (3.7) и (0.12). Для доказательства соотношений (4.15) мы отметим сначала, что по предложению 3(1),(2) след-идемпотент (4.6) может быть записан в виде

$$\tau(q) = [\Gamma : G]^{-1}\left(\sum_{r=1}^{q-1}\rho(r) + \xi_1^+ + \xi_1^- + \sum_{r=1}^{q-1}\rho(r)\widetilde{\xi}_2\right).$$

Из формулы (1.9) следует, что для каждой модулярной формы $F \in \mathfrak{M}_k^2(q, q)$ имеет место соотношение

$$F|\widetilde{\xi}_2^2 = F|\Big\{q^3\rho(1) + q^2(\xi_1^+ + \xi_1^-) + \sum_{r=1}^{q-1}\Big(q^2 + \Big(\frac{-r}{q}\Big)q\Big)\rho(r)\widetilde{\xi}_2\Big\}$$
$$= q^3F|\rho(1) + q^2[\Gamma : G]F|\tau(q) - q^2F\Big|\sum_{r=1}^{q-1}\rho(r) + qF\Big|\sum_{r=1}^{q-1}\Big(\frac{-r}{q}\Big)\rho(r)\widetilde{\xi}_2.$$

По определению мы имеем $F|\rho(1) = F$. На основании (4.10), если F является новой формой, то $F|\tau(q) = 0$. По предложению 1(3) мы получаем для $F \in \mathfrak{M}(\chi)$ соотношения

$$F\Big|\sum_{r=1}^{q-1}\rho(r) = \Big(\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)^{-1}\Big)F = \begin{cases}(q-1)F, & \text{если } \chi = \chi_1,\\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_1,\end{cases}$$

и соотношения

$$F\Big|\sum_{r=1}^{q-1}\Big(\frac{-r}{q}\Big)\rho(r)\widetilde{\xi}_2 = \Big(\frac{-1}{q}\Big)\Big\{\sum_{r=1}^{q-1}\chi(r)^{-1}\Big(\frac{r}{q}\Big)\Big\}F|\widetilde{\xi}_2$$
$$= \begin{cases}(-1)^{\frac{q-1}{2}}(q-1)F|\widetilde{\xi}_2, & \text{если } \chi = \chi_2,\\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_2.\end{cases}$$

Используя полученные формулы, мы заключаем: если $F \in \mathrm{N}(K)$, то

$$F|\widetilde{\xi}_2^2 = q^3F - q^2(q-1)F = q^2F;$$

если $F \in \mathfrak{N}(\chi)$ с $\chi \neq \chi_1, \chi_2$, то $F|\widetilde{\xi}_2^2 = q^3F$; если же $F \in \mathfrak{N}(\chi_2)$, то

$$F|\widetilde{\xi}_2^2 = q^3F + (-1)^{\frac{q-1}{2}}q(q-1)F|\widetilde{\xi}_2.$$

Используя последнее соотношение, мы получаем: если $F \in \mathfrak{N}'(\chi_2)$, то

$$F|\widetilde{\xi}_2 = ((-1)^{\frac{q-1}{2}}q^2F' - F'|\widetilde{\xi}_2)|\widetilde{\xi}_2 = -q^3F' + (-1)^{\frac{q-1}{q}}qF'|\widetilde{\xi}_2$$
$$= -(-1)^{\frac{q-1}{2}}q((-1)^{\frac{q-1}{2}}q^2F' - F'|\widetilde{\xi}_2)$$
$$= (-1)^{\frac{q+1}{2}}qF;$$

если же $F \in \mathfrak{N}''(\chi_2)$, то аналогично

$$F|\widetilde{\xi}_2 = ((-1)^{\frac{q-1}{2}} F' + F'|\widetilde{\xi}_2)|\widetilde{\xi}_2 = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q^2 F. \quad \bullet$$

Доказательство теоремы 14. По предложению 9(4) и предложению 12(4) операторы $|\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ и $|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)$ на подпространстве $\mathfrak{N}(K)$ совпадают соответственно с операторами $|\Pi(q^\delta)$ и $|\Pi^*(q^\delta)$, и, таким образом, по лемме 4.10 [4] они отображают подпространство $\mathrm{N}(K)$ в себя. С другой стороны, по предложению 1(3), формулам (3.4) и (3.17) указанные операторы отображают в себя каждое из подпространств $\mathfrak{N}(\chi)$. Утверждения (1) доказаны. Используя мультипликативные соотношения (3.3) и (3.16) и разложения (3.12) и (3.18), мы получаем соотношение

$$\begin{aligned} F|\widetilde{\Pi}(q^\delta)\widetilde{\Pi}^*(q^\delta) &= F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Pi}(q)\widetilde{\Pi}^*(q)\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1}) \\ &= F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Omega}\widetilde{\xi}_2^2\widetilde{\Omega}\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1}). \end{aligned}$$

Если $F \in \mathrm{N}(K)$ (соответственно $F \in \mathfrak{N}(\chi)$ с $\chi \neq \chi_1, \chi_2$), то функция $F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Omega}$ содержится в $\mathrm{N}(K)$ (соответственно в $\mathfrak{N}(\chi^{-1})$), согласно утверждению (1), лемме 15 и лемме 16, откуда по лемме 17 последнее выражение равно

$$q^2 F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Omega}^2\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta 1}) = q^2 q^{2k-6} F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1}),$$

если $F \in \mathrm{N}(K)$, и равно $q^3 q^{2k-6} F|\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1})\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1})$, если $F \in \mathfrak{N}(\chi)$, причем $\chi \neq \chi_1, \chi_2$. Аналогично мы получаем

$$\begin{aligned} F|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)\widetilde{\Pi}(q^\delta) &= F|\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1})\widetilde{\xi}_2\widetilde{\Omega}^2\widetilde{\xi}_2\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1}) \\ &= q^{2k-6} F|\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1})\widetilde{\xi}_2^2\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1}), \end{aligned}$$

что равно

$$q^{2k-4} F|\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1})\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1}),$$

если $F \in \mathrm{N}(K)$, и равно

$$q^{2k-3} F|\widetilde{\Pi}^*(q^{\delta-1})\widetilde{\Pi}(q^{\delta-1}),$$

если $F \in (\chi)$, $\chi \neq \chi_1, \chi_2$. Соотношения (4.12) и (4.13) следуют тогда по индукции. $\bullet$

Теорема 18. *Пусть q — нечетное простое число. Тогда подпространство $\mathrm{N}(K)$ новых форм целого веса k для группы $K = \Gamma_0^2(q)$, так же как и каждое из подпространств $\mathfrak{N}(\chi) = \mathfrak{N}_k^2(q, \chi)$ касп-форм веса k и характера χ для группы K, где χ — характер Дирихле по модулю q, отличный от тривиального характера χ_1 и от квадратичного характера $\chi_2(r) = (\frac{r}{q})$, имеет ортонормированный базис, состоящий из общих собственных функций всех операторов Гекке, отвечающих элементам регулярного HS-кольца $\mathcal{H}_r(G)$ группы $G = \Gamma^2(q, q)$ и всем сингулярным элементам Фробениуса $\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ с $\delta = 0, 1, 2, \ldots$ для группы G. Собственные числа $\lambda(q^\delta)$ операторов $|\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ удовлетворяют соотношениям*

$$|\lambda(q^\delta)| = \begin{cases} q^{(k-2)\delta} & \text{на } \mathrm{N}(K), \\ q^{(k-3/2)\delta} & \text{на } \mathfrak{N}(\chi)\ (\chi \neq \chi_1, \chi_2). \end{cases} \tag{4.16}$$

Доказательство. По теоремам 13 и 14 каждое из указанных подпространств инвариантно относительно всех перечисленных операторов, и эти операторы нормальны на рассматриваемых подпространствах. По теореме 13(2) и предложению 9(2), (3) все указанные операторы коммутируют друг с другом. Тогда первое утверждение следует из известной теоремы линейной алгебры. Согласно (4.8), операторы $|\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ и $|\widetilde{\Pi}^*(q^\delta)$ сопряжены и поэтому имеют комплексно-сопряженные собственные числа. Соотношения (4.16) следуют тогда из соотношений (4.12) и (4.13). •

Отметим, что условие $\chi \neq \chi_2$ оказалось несколько неожиданным для нас. Оно появилось, поскольку мы не смогли доказать, что хотя бы одно из подпространств $\mathfrak{N}'(\chi_2)$ или $\mathfrak{N}''(\chi_2)$, введенных в лемме 17, инвариантно относительно оператора, отвечающего элементу $\widetilde{\Omega}$. Возможно, это означает, что оператор Фробениуса $|\widetilde{\Pi}(q^\delta)$ не всегда диагонализируем на пространстве $\mathfrak{N}(\chi_2)$, которое таким образом должно быть заменено некоторым подпространством „очень новых форм“.

§5. Эйлерово разложение лучевых рядов Дирихле

Э. Гекке открыл в [5], что коэффициенты Фурье собственных функций некоторых операторов на пространствах модулярных форм от одной переменной, называемых теперь операторами Гекке, имеют определенные мультипликативные свойства. После его работ было вполне естественно ожидать, что коэффициенты Фурье зигелевых модулярных форм также имеют некоторые мультипликативные свойства. Однако даже постановка этого вопроса в зигелевом случае далеко не ясна. Возьмем, например, модулярную форму F для группы

$\Gamma^n(q, q)$. Согласно соотношениям (0.7), коэффициенты Фурье $f(A)$ формы F являются значениями некоторой функции на классах четных матриц порядка n по модулю собственной целочисленной эквивалентности

$$A \mapsto {}^tUAU \quad (A \in \mathbb{E}_n,\ U \in SL_n(\mathbb{Z})) \tag{5.1}$$

или, другими словами, на классах целочисленных квадратичных форм $\frac{1}{2}{}^tXAX$ относительно указанной эквивалентности. Априори неясно, в каком смысле такая функция может быть мультипликативна, так как, вообще говоря, отсутствует естественное умножение самих классов. Вместо общего вопроса можно спросить, является ли мультипликативной та или другая функция от одной целочисленной переменной, связанная с f. Простейшими возможными функциями являются *лучевые функции*

$$m \mapsto f(mA)$$

с фиксированными $A \in \mathbb{E}_n$, и простейшим вопросом о мультипликативности таких функций является вопрос, имеют ли соответствующие *лучевые ряды Дирихле*

$$R_F(s, \eta, A) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta(m) f(mA)}{m^s}, \tag{5.2}$$

где $\eta(m)$ — некоторая вполне мультипликативная функция, по крайней мере формально, разложение эйлерова типа по всем простым числам. В случае модулярных форм от одной переменной эйлеровы разложения лучевых рядов Дирихле, отвечающих собственным функциям „всех“ операторов Гекке, хорошо известны (см., например, [7]). В зигелевом случае мало что известно, если род $n > 2$. Если же $n = 2$, эйлеровы разложения лучевых рядов Дирихле были получены в [1] для случая собственных функций F всех операторов Гекке для полной модулярной группы Γ^2 и $\eta(m) \equiv 1$. Этот результат был обобщен в [2], §4.3.2 на *регулярные лучевые ряды*

$$R_F^*(s, \eta, A) = \sum_{m \geqslant 1,\, \gcd(m, q)=1} \frac{\eta(m) f(mA)}{m^s}, \tag{5.3}$$

отвечающие собственным функциям F всех регулярных операторов Гекке для групп $\Gamma^2(q, q)$. Здесь мы обобщим эти разложения на полные лучевые ряды вида (5.2) в предположении, что F является также собственной функцией всех сингулярных операторов Фробениуса для таких групп. Ввиду результатов о собственных функциях, полученных выше и в [4], теорема 15, такое обобщение вполне осмыслено.

Теорема 19. *Пусть k, q — положительные целые рациональные числа, χ — характер Дирихле по модулю q и пусть*

$$F(Z) = \sum_{A \in \mathbb{E}_2,\, A \geqslant 0} f(A) \exp(\pi i Tr(AZ)) \in \mathfrak{M}_k^2(q, \chi)$$

— собственная функция всех регулярных операторов Гекке $|_{k,\chi}$ для группы $\Gamma_0^2(q)$,

$$F|_{k,\chi}T = \lambda_F(T)F \quad (T \in \mathcal{H}_r(\Gamma_0^2(q))),$$

и всех сингулярных операторов Фробениуса $|_k\widetilde{\Pi}(q')$ для группы $\Gamma^2(q, q)$,

$$F|_k\widetilde{\Pi}(q') = \lambda_F(q')F \quad (q'|q^\infty). \tag{5.4}$$

Для отрицательного целого рационального числа Δ пусть d обозначает дискриминант мнимого квадратичного поля $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, $l = \sqrt{\Delta/d}$, $\mathcal{O}_b$ подкольцо индекса l в кольце $\mathcal{O}$ всех целых чисел этого поля, пусть $H(\Delta)$ обозначает группу классов эквивалентных полных модулей в $\mathcal{F}$ с кольцом множителей $\mathcal{O}_l$, реализованную как группа относительно гауссовой композиции классов $\{A\}$ по модулю собственной эквивалентности (5.1) матриц $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_2$ (или соответствующих квадратичных форм) с $b^2 - 4ac = \Delta$ и $\gcd(a, b, c) = 1$, и пусть ψ — некоторый характер группы $H(\Delta)$. Тогда для каждой вполне мультипликативной функции $\eta : \{1, 2, \dots\} \to \mathbb{C}$ имеют место следующие утверждения.

(1) *Лучевые ряды* (5.2) *удовлетворяют формальному тождеству*

$$\begin{aligned}\sum_{\{A_i\} \in H(\Delta)} \psi(\{A_i\}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta(m) f(mA_i)}{m^s} \\ = \rho(s) \left\{ \prod_{\mathfrak{p},\, N(\mathfrak{p}) \nmid (ql)^2} \left(1 - \frac{\eta(N(\mathfrak{p}))\chi(N(\mathfrak{p}))\psi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{s-k+2}}\right)\right\} \left\{ \prod_{p \nmid q} Q_{p,F}^{-1}\left(\frac{\eta(p)}{p^s}\right)\right\} \\ \times \left\{ \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\eta(p)\lambda_F(p)}{p^s}\right)^{-1}\right\},\end{aligned} \tag{5.5}$$

где A_i слева пробегают систему представителей из собственных классов $\{A_i\}$ в группе $H(\Delta)$, $\rho(s)$ справа является конечной суммой, задаваемой равенством

$$\rho(s) = \sum_{\{A_i\} \in H(\Delta)} \psi(\{A_i\}) \sum_{\substack{t, t_1 \geqslant 1,\, t|t_1|l, \\ \gcd(tt_1, q) = 1}} \frac{\eta(tt_1)\chi(t^2 t_1)\mu(t)\mu(t_1)}{t^{s-2k+3} t_1^{s-k+2}} f\left(\frac{t_1}{t}(A_i \times \mathcal{O}_{l/t_1})\right), \tag{5.6}$$

с функцией Мебиуса μ, подкольцами $\mathcal{O}_\nu$ индекса ν в конце $\mathcal{O}$, и естественными эпиморфизмами $\{A\} \to \{A \times \mathcal{O}_\nu\}$ группы $H(\Delta) = H(dl^2)$ на $H(d\nu^2)$, и где $\mathfrak{p}$ пробегает все регулярные простые идеалы кольца $\mathcal{O}_l$, норма которых $N(\mathfrak{p})$ взаимно-проста с ql, p пробегает все простые числа, удовлетворяющие соответствующим условиям, и для каждого из простых чисел p, не делящих q, через $Q_{p,F}(x)$ обозначается многочлен степени 4 вида

$$\begin{aligned} Q_{p,F}(x) = 1 - \lambda_F(T(p))x + \left\{p\lambda_F(T_1(p^2)) + \chi(p^2)p^{2k-5}(p^2+1)\right\} x^2 \\ - \chi(p^2)p^{2k-3}\lambda_F(T(p))x^3 + \chi(p^4)p^{4k-6}x^4, \end{aligned} \tag{5.7}$$

с элементами $T(p)$, $T_1(p^2)$ регулярного кольца $\mathcal{H}_p(\Gamma_0^2(q))$, определенными равенствами (2.6).

(2) *Предположим, что лучевые ряды $R_F(s, \eta, A')$ формально равны нулю для каждой матрицы $A' = \begin{pmatrix} 2a' & b' \\ b' & 2c' \end{pmatrix}$ с $\gcd(a', b', c') = 1$ и $(b')^2 - 4a'c' = d\nu^2$, где $\nu | l$ и $\nu < l$, тогда множитель $\rho(s)$ является константой*:

$$\rho(s) = \sum_{\{A_i\}\in H(\Delta)} \psi(\{A_i\})f(A_i). \tag{5.8}$$

(3) *Если функция η удовлетворяет неравенству $|\eta(m)| \leqslant cm^\sigma$ с некоторыми константами c и σ, то ряды Дирихле в левой части соотношения* (5.5) *и бесконечные произведения справа сходятся абсолютно и равномерно в каждой правой полуплоскости вида $\mathrm{Re}\, s > 2ke + \sigma + 1 + \varepsilon$ с произвольным $\varepsilon > 0$, где $e = 1$ в общем случае и $e = 1/2$, если F является касп-формой.*

Доказательство. По теореме 4.3.16 [2] имеет место формальное тождество

$$\begin{aligned} &\sum_{\{A_i\}\in H(\Delta)} \psi(\{A_i\})R_F^*(s, \eta, q'A_i) \\ &= \eta(q')\rho(s, q')\left\{ \prod_{\mathfrak{p},\, N(\mathfrak{p})\nmid (ql)^2} \left(1 - \frac{\eta(N(\mathfrak{p}))\chi(N(\mathfrak{p}))\psi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{s-k+2}}\right) \right\} \prod_{p\nmid q} Q_{p,F}^{-1}\left(\frac{\eta(p)}{p^s}\right) \end{aligned} \tag{5.9}$$

для каждого числа q', делящего q^∞, где множитель $\rho(s, q')$ равняется сумме

$$\sum_{\{A_i\}\in H(\Delta)} \psi(\{A_i\}) \sum_{\substack{t, t_1 \geqslant 1,\, t | t_1 | l, \\ \gcd(tt_1, q)=1}} \frac{\eta(tt_1)\chi(t^2t_1)\mu(t)\mu(t_1)}{t^{s-2k+3}t_1^{s-k+2}} f\left(\frac{q't_1}{t}(A_i \times \mathcal{O}_{l/t_1})\right)$$

и где формулы для коэффициентов многочленов $Q_{p,F}(x)$ следуют из формул, полученных в [2] (см. предложение 3.3.35 и упражнения 3.3.38), поскольку

$$F|_{k,\chi}[p] = F|_{k,\chi}(\Gamma_0^2(q)(pE_4)) = \chi(p^2)p^{2k-6}F.$$

Из (5.4) и (0.18) следуют соотношения

$$f(q'A') = \lambda_F(q')f(A'), \quad \text{если } q'|q^\infty \text{ и } A' \in \mathbb{E}_2,$$

откуда

$$\rho(s,\, q') = \lambda_F(q')\rho(s), \tag{5.10}$$

где сумма $\rho(s)$ имеет вид (5.6). Из (5.9) и (5.10) следует, что ряд в левой части соотношения (5.5) формально равен выражению

$$\sum_{q'|q^\infty} \frac{\eta(q')\lambda_F(q')\rho(s)}{(q')^s}\left\{\prod_{\mathfrak{p},\, N(\mathfrak{p})\nmid(ql)^2}\left(1 - \frac{\eta(N(\mathfrak{p}))\chi(N(\mathfrak{p}))\psi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{s-k+2}}\right)\right\}\prod_{p|q} Q_{p,F}^{-1}\left(\frac{\eta(p)}{p^s}\right),$$

что доказывает тождество (5.5), поскольку

$$\sum_{q'|q^\infty} \frac{\eta(q')\lambda_F(q')}{(q')^s} = \prod_{p|q}\sum_{\delta=0}^{\infty}\frac{\eta(p^\delta)\lambda_F(p^\delta)}{p^{\delta s}} = \prod_{p|q}\left(1 - \frac{\eta(p)\lambda_F(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Формула (5.8) следует из (5.6), так как из предположений части (2) следует, что

$$f\left(\frac{t_1}{t}(A_i \times \mathcal{O}_{l/t_1})\right) = 0,$$

кроме случая $t = t_1 = 1$.

Часть (3) следует из соответствующих утверждений о рядах и произведениях, входящих в тождество (5.9), доказанных в теореме 4.3.16 [2]. •

Список литературы

[1] Андрианов А. Н., *Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2*, Успехи мат. наук **29** (1974), №3, 43–110.

[2] Andrianov A. N., *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 286, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1987.

[3] Андрианов А. Н., Журавлев В. Г., *Модулярные формы и операторы Гекке*, Наука, М., 1990.

[4] Andrianov A. N., *Singular Hecke-Shimura rings and Hecke operators on Siegel modular forms*, Preprint Ser. no. 118, Max-Planck-Inst. für Math. Bonn, Bonn, 1998; Пер. на рус. яз., Алгебра и анализ **11** (1999), no. 6.

[5] Hecke E., *Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung.* I, II, Math. Ann. **114** (1937), 1–28, 316–351.

[6] Hida H., *Elementary theory of $\mathcal{L}$-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 26, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[7] Li W. W., *Newforms and functional equations*, Math. Ann. **212** (1975), 285–315.

[8] Panchishkin A. A., Piatetski-Shapiro I. I., *On a Λ-adic Andrianov $\mathcal{L}$-function for* $\mathrm{GS}_{p(4)}$, Prépubl. Inst. Fourier no. 429, Grenoble, 1998.

[9] Piatetski-Shapiro I. I., *$\mathcal{L}$-functions for* GSp_4, Olga Taussky-Todd in memoriam, Pacific J. Math. 1997, Special Issue, 259–275.

Поступило 16 апреля 1999 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия

Université de Grenoble, 1
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
associé au CNRS
B. P. 74
38402, Saint-Martin-d'Hères Cedex
France