В. А. Ватутин, О расстоянии до ближайшего общего предка в ветвящихся процессах Беллмана–Харриса, *Матем. заметки*, 1979, том 25, выпуск 5, 733–741

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 5 (1979)

О РАССТОЯНИИ ДО БЛИЖАЙШЕГО ОБЩЕГО ПРЕДКА В ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССАХ БЕЛЛМАНА — ХАРРИСА

В. А. Ватутин

Пусть $z(t)$ обозначает количество частиц ветвящегося процесса Беллмана — Харриса в момент t, если в момент $t = 0$ была одна частица нулевого возраста; $G(t) = \mathsf{P}\{\eta \leqslant t\}$, $G(+0) = 0$,— функцию распределения длительности жизни η одной частицы; $F(s)$ — производящую функцию числа потомков частицы в конце ее жизни, а $\Phi(t, s) = \boldsymbol{E} s^{z(t)}$ — производящую функцию числа частиц в прцессе в момент t.

Сопоставим каждой частице ее «родословную», т. е. конечный набор чисел $\boldsymbol{d} = (d_0, d_1, \ldots, d_k)$, следующим образом: первоначальной частице ставится в соответствие набор $\boldsymbol{d} = (1)$, а частице, являющейся i-м непосредственным потомком частицы $\boldsymbol{d} = (1, d_1, \ldots, d_k)$, ставится в соответствие набор $\boldsymbol{d}' = (1, d_1, \ldots, d_k, i)$. В дальнейшем частица и ее родословная отождествляются.

Определение 1. Ближайшим общим предком частиц $\boldsymbol{d}' = (1, d_1', \ldots, d_{k'}')$ и $\boldsymbol{d}'' = (1, d_1'', \ldots, d_{k''}'')$ называется частица $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{d}' \cap \boldsymbol{d}'' = (1, p_1, \ldots, p_n)$, где $n = \min\{i: d_{i+1}' \neq d_{i+1}''\}$, а $p_j = d_j' = d_j''$ при $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. Родителем частицы $\boldsymbol{d} = (1, d_1, \ldots, d_k, d_{k+1})$ называется частица $\boldsymbol{d}^* = (1, d_1, \ldots, d_k)$.

Пусть $\boldsymbol{d}^{(1)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{d}^{(z(t))}$ — все частицы, существующие в момент t. На множестве $\{z(t) > 0\}$ определим случайную] величину $\xi(t)$ — расстояние до ближайшего общего предка:

$$\xi(t) = t - T(t),$$

где $T(t)$ — момент деления частицы $p(t) = \bigcap_{j=1}^{z(t)} d^{(j)}$, если $z(t) > 1$, момент деления родителя частицы $d^{(1)}$, если $z(t) = 1$ и $d^{(1)} \neq 1$, и $T(t) = 0$, если $z(t) = 1$ и $d^{(1)} = 1$.

В работе [1] для марковских ветвящихся процессов с дискретным и непрерывным временем изучалось поведение при $t \to \infty$ случайной величины $\tau(t)$, которая отличается от $\xi(t)$ лишь тем, что $\tau(t) = 0$, если $z(t) = 1$. В настоящей заметке получены предельные распределения $\xi(t)$ для надкритических и критических ветвящихся процессов Беллмана — Харриса, которые аналогичны распределениям, полученным в [1] для случайной величины $\tau(t)$.

1. Надкритический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $F(0) > 0$ *и* $F'(1) > 1$, *то*

$$\mathsf{P}\{\exists \lim_{t\to\infty}(t - \xi(t)) = \xi \,|\, z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = 1,$$

причем

$$\mathsf{P}\{\xi < T \,|\, z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} = 1 - \int_{[0,\, T]} (1 - G(T - y))\, \mathrm{d}H_\beta(y), \qquad (1)$$

где $H_\beta(y) = \sum_{k\geqslant 0}\beta^k G^{*k}(t)$, $\beta = F'(q)$, *а* $q = \lim_{t\to\infty}\Phi(t, 0) < 1$ — *минимальный неотрицательный корень уравнения* $F(s) = s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, z(T))$ — время жизни после момента T i-й частицы из числа частиц, существовавших в момент T, и для $B \subseteq \mathbf{R}^k$

$$\mathsf{P}(T, k, B) = \mathsf{P}\{\tau(T) = (\tau_1(T), \ldots, \tau_k(T)) \in B \,|\, z(T) = k\}.$$

Пользуясь свойствами условного математического ожидания, получаем

$$\mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T,\ z(t) > 0 \mid z(T) = k\} =$$
$$= E[E[\chi(t - \xi(t) \geqslant T, z(t) > 0) \mid \tau_i(T),\ i = 1, \ldots$$

$$\ldots, z(T)] \mid z(T) = k] =$$
$$= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{z(T)} (1 - F(\Phi(t - T - \tau_i(T)))) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \prod_{j \neq i}^{z(T)} F(\Phi(t - T - \tau_j(T))) \right| z(T) = k] =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_k(0,\, T]} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot$$
$$\cdot \prod_{j \neq i}^{k} F(\Phi(t - T - x_j))\, \mathsf{P}(T,\, k,\, \mathrm{d}x), \qquad (2)$$

где $\chi(A)$ — индикатор события A, $\Phi(t - T - x_j) \equiv \Phi(t - T - x_j, 0)$, а интегрирование ведется по множеству $\Omega_k(0, T) = \{x_i \in (0, T],\ i = 1, \ldots, k\}$.

Оценивая вероятность (2) сверху и снизу, убеждаемся, что для любого $N \in (0, t - T]$

$$k(1 - q)\, F^{k-1}(\Phi(t - T - N))[1 - \mathsf{P}\{\exists i\colon\ \tau_i(T) \geqslant$$
$$\geqslant N \mid z(T) = k\}] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_k(0,\, N]} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot$$
$$\cdot \prod_{j \neq i}^{k} F(\Phi(t - T - x_j))\, \mathsf{P}(T,\, k,\, \mathrm{d}x) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T,\ z(t) > 0 \mid z(T) = k\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_k(0,\, N]} (1 - F(\Phi(t - T - x_i))) \cdot$$
$$\cdot \prod_{j \neq i}^{k} F(\Phi(t - T - x_j))\, \mathsf{P}(T,\, k,\, \mathrm{d}x) +$$
$$+ k\mathsf{P}\{\exists i\colon\ \tau_i(T) \geqslant N \mid z(T) = k\} \leqslant$$
$$\leqslant k(1 - F(\Phi(t - T - N)))\, q^{k-1} +$$
$$+ k\mathsf{P}\{\exists i\colon\ \tau_i(T) \geqslant N \mid z(T) = k\}. \qquad (3)$$

Заметим, что для любого фиксированного T

$$\lim_{N \to \infty} \mathsf{P}\{\exists i\colon\ \tau_i(T) \geqslant N \mid z(T) = k\} = 0, \qquad (4)$$

поскольку

$$\lim_{N \to \infty} \mathsf{P}\{\exists i\colon\ \tau_i(T) \geqslant N \mid z(T) = k\} =$$
$$= 1 - \lim_{N \to \infty} \mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant i \leqslant k} \tau_i(T) < N \mid z(T) = k\} =$$
$$= 1 - \mathsf{P}\{\max_{1 \leqslant i \leqslant k} \tau_i(T) < \infty \mid z(T) = k\}$$

и $\mathsf{P}\{\tau_i(T) < \infty \mid z(T) = k\} = 1$ для любых i, k, T.

Из (3) и (4), устремляя N и t к бесконечности так, чтобы $t - T - N \to \infty$, и используя равенство $F(q) = q$, выводим, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T,\ z(t) > 0 \mid z(T) = k\} = k(1-q)q^{k-1}.$$

Отсюда в свою очередь следуют соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T \mid z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T,\ z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\}}{\mathsf{P}\{z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\}} =$$

$$= (1/(1-q)) \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{t - \xi(t) \geqslant T,$$

$$z(t) > 0 \mid z(T) = k\} \mathsf{P}\{z(T) = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \mathsf{P}\{z(T) = k\} = \Phi_q'(T,\ q). \tag{5}$$

Как известно (см., например, [2, стр. 198]), функция $\Phi(t, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi(t,\ s) = s(1 - G(t)) + \int_{(0,\ t]} F(\Phi(t-y,\ s))\, \mathrm{d}G(y) \tag{6}$$

и, кроме того, $\Phi(t, q) = q$ [3, стр. 143]. Дифференцируя уравнение (6) по s в точке q, получаем для функции $\Phi_q'(t, q)$ уравнение восстановления

$$\Phi_q'(T,\ q) = 1 - G(T) + F'(q) \int_{(0,\ T]} \Phi_q'(T-y,\ q)\, \mathrm{d}G(y).$$

Отсюда

$$\Phi_q'(T,\ q) = \int_{[0,\ T]} (1 - G(T-y))\, \mathrm{d}H_\beta(y),$$

или, учитывая (5),

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{t - \xi(t) < T \mid z(x) > 0 \quad \forall x < \infty\} =$$

$$= 1 - \int_{[0,\ T]} (1 - G(T-y))\, \mathrm{d}H_\beta(y).$$

Сходимость с вероятностью 1 следует из того, что функция $t - \xi(t)$ на множестве $\{z(x) > 0 \ \forall x < \infty\}$ не убывает.

2. Критический ветвящийся процесс Беллмана — Харриса. Пусть $F_n(s)$ — n-я итерация функции $F(s)$, $z(t, x)$ — число частиц, существующих в момент t и имеющих возраст не более x, а $z^*(t, x)$ — число частиц, существующих в момент t, которые будут существовать в момент $t + x$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть распределение* $G(t)$ — *нерешетчатое*, $F'(1) = 1$. *Если*

$$F(s) = s + (1 - s)^{1+\alpha} L(1 - s), \tag{7}$$

где $\alpha \in (0, 1]$, *а* $L(x)$ *медленно меняется при* $x \to +0$ *и, кроме того,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n(1 - G(n))}{1 - F_n(0)} = 0, \tag{8}$$

то

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{\xi(t) \leqslant tx \mid z(t) > 0\} = x. \tag{9}$$

В ходе доказательства теоремы 2 нам понадобится

ЛЕММА. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{P}\{z^*(t, t\varepsilon) > 0 \mid z(t) > 0\} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Используя равенство

$$z^*(t, t\varepsilon) = z(t(1 + \varepsilon)) - z(t(1 + \varepsilon), t\varepsilon),$$

получаем оценку

$$\mathsf{P}\{z^*(t, t\varepsilon) > 0 \mid z(t) > 0\} \leqslant \boldsymbol{E}[z^*(t, t\varepsilon) \mid z(t) > 0] \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \Phi(t, 0))^{-1} \boldsymbol{E}[z(t(1 + \varepsilon)) - z(t(1 + \varepsilon), t\varepsilon)]. \tag{11}$$

В [2, стр. 232] показано, что если $F'(1) = 1$, то $A(t, x) \equiv \boldsymbol{E}z(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$A(t, x) = (1 - G(t)) J(x - t) + \int_{(0, t]} A(t - y, x)\, dG(y), \tag{12}$$

де $J(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ и $J(t) = 0$ при $t < 0$.

Применяя к (12) теорему восстановления, приходим к соотношению

$$\boldsymbol{E}z(t, x) = (1 - G(t)) J(x - t) +$$
$$+ \int_{(0, t]} (1 - G(t - y)) J(x + y - t)\, dH(y), \tag{13}$$

где $H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(t)$. Из (13) и равенства

$$\boldsymbol{E}z(t) \equiv 1 = 1 - G(t) + \int_{(0, t]} (1 - G(t - y))\, dH(y)$$

получаем, что

$$\boldsymbol{E}\,[z\,(t\,(1+\varepsilon)) - z\,(t\,(1+\varepsilon),\ t\varepsilon)] =$$
$$= 1 - G\,(t\,(1+\varepsilon)) + \int_{(0,\,t]} (1 - G\,(t\,(1+\varepsilon) - y))\,\mathrm{d}H\,(y) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + H\,(t))\,(1 - G\,(t\varepsilon)). \qquad (14)$$

Известно, что если выполнено условие (7), то (см. [4])

$$1 - F_n\,(0) = n^{-1/\alpha} L_1\,(n), \qquad (15)$$

где функция $L_1\,(n)$ медленно меняется при $n \to \infty$. Отсюда и из (8), пользуясь определением медленно меняющейся функции, получаем оценку

$$1 - G\,(t\varepsilon) = o\,(t^{-1-1/\alpha} L_1\,(t))$$

при $t \to \infty$. Заметим также, что $H\,(t) \sim \mu^{-1} t$ при $t \to \infty$, где $\mu = \int_{[0,\,\infty)} t\ \mathrm{d}G\,(t)$ (см. [5, стр. 269]). Приведенные выше асимптотические соотношения дают для левой части (14) такую оценку:

$$\boldsymbol{E}\,[z\,(t\,(1+\varepsilon)) - z\,(t\,(1+\varepsilon),\ t\varepsilon)] =$$
$$= o\,(t^{-1/\alpha} L_1\,(t)) \quad (t \to \infty). \qquad (16)$$

В заметке [6] доказано, что если выполнены условия теоремы 2, то

$$1 - \Phi\,(t,\,0) \sim (\mu/t)^{1/\alpha} L_1\,(t) \quad (t \to \infty), \qquad (17)$$

где функция $L_1\,(t)$ та же, что и в (15). Объединяя (17), (16) и (11), получаем (10).

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть событие $C\,(t,\,x,\,\varepsilon)$ состоит в том, что $z\,(t\,(1-x)) > 0$, а $z^*\,(t\,(1-x),\ t\varepsilon) = 0$. По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx,\, z\,(t) > 0\} = \mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx,\, C\,(t,\,x,\,\varepsilon),\, z\,(t) > 0\} + \mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx,\, z^*\,(t\,(1-x),\, t\varepsilon) > 0,\ z\,(t) > 0\}.$$

Оценивая правую часть последнего равенства сверху и снизу, получаем

$$\frac{\mathsf{P}\,\{C\,(t,\ x,\ \varepsilon)\}}{\mathsf{P}\,\{z\,(t) > 0\}}\,\mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx,\ z\,(t) > 0 \mid C\,(t,\ x,\ \varepsilon)\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx \mid z\,(t) > 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\mathsf{P}\,\{z\,(t\,(1-x)) > 0\}}{\mathsf{P}\,\{z\,(t) > 0\}}\,[\mathsf{P}\,\{z^*(t\,(1-x),\ t\varepsilon) > 0 \mid z\,(t\,(1-x)) > 0\} +$$
$$+ \mathsf{P}\,\{\xi\,(t) \leqslant tx,\ z\,(t) > 0 \mid C\,(t,\ x,\ \varepsilon)\}]. \qquad (18)$$

Так как событие $C(t, x, \varepsilon)$ измеримо относительно σ-алгебры, порождаемой случайными величинами $z(t(1-x))$, $\tau_i(t(1-x))$, $i = 1, 2, \ldots, z(t(1-x))$, то

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{\xi(t) \leqslant tx,\ z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon)\} = \\
&\quad = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}[\chi(\xi(t) \leqslant tx,\ z(t) > 0) \mid z(t(1-x)),\ \tau_i(t(1-x)), \\
&\qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, z(t(1-x))] \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\
&\qquad\quad = \boldsymbol{E}\Big[\sum_{i=1}^{z(t(1-x))}(1 - F(\Phi(tx - \tau_i(t(1-x))))) \cdot \\
&\qquad\quad \cdot \prod_{j \neq i}^{z(t(1-x))} F(\Phi(tx - \tau_j(t(1-x)))) \mid C(t, x, \varepsilon)\Big] \qquad (19)
\end{aligned}$$

(здесь $\Pi_{j\neq 1}^{1} \cdot = 1$). Исходя из (19) и пользуясь монотонностью функций $F(s)$ и $\Phi(t)$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - F(\Phi(tx))}{F(\Phi(t(x-\varepsilon)))} \boldsymbol{E}[z(t(1-x)) \cdot \\
&\qquad \cdot F(\Phi(t(x-\varepsilon)))^{z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] \leqslant \\
&\qquad \leqslant \mathsf{P}\{\xi(t) \leqslant tx,\ z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon)\} \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{1 - F(\Phi(t(x-\varepsilon)))}{F(\Phi(tx))} \boldsymbol{E}[z(t(1-x)) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot F(\Phi(tx))^{z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)]. \qquad (20)
\end{aligned}$$

Цель дальнейших рассуждений — доказательство существования при $t \to \infty$ пределов у величин, оценивающих

$$\mathsf{P}\{\xi(t) \leqslant tx,\ z(t) > 0 \mid C(t, x, \varepsilon)\}$$

сверху и снизу, и вычисление этих пределов. Докажем сначала, что для любых $y > 0$ и $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}[F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\
&\qquad\qquad = 1 - (1 + (1-x)^{-1}\lambda^{-\alpha}y)^{-1/\alpha}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}[F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid C(t, x, \varepsilon)] = \\
&= \frac{\mathsf{P}\{z(t(1-x)) > 0\}}{\mathsf{P}\{C(t, x, \varepsilon)\}} \cdot \{\boldsymbol{E}[F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid z(t(1-x)) > 0] - \\
&\qquad - \boldsymbol{E}[\chi(z^*(t(1-x), t\varepsilon) > 0) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))} \mid z(t(1-x)) > 0]\}. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Из (10) следуют соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{P}\{z(t(1-x)) > 0\}}{\mathsf{P}\{C(t, x, \varepsilon)\}} = 1 \qquad (23)$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}\,[\chi(z^*(t(1-x),\ t\varepsilon)>0)\cdot$$
$$\cdot F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))}\,|\,z(t(1-x))>0]\leqslant$$
$$\leqslant \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\,\{z^*(t(1-x),\ t\varepsilon)>0\,|\,z(t(1-x))>0\}=0, \quad (24)$$

а из (17) вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{\log F(\Phi(ty))}{1-\Phi(t(1-x))}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\Phi(ty)}{1-\Phi(t(1-x))}=\left(\frac{1-x}{y}\right)^{1/\alpha}. \quad (25)$$

В работе [6] было доказано, что при выполнении условий теоремы 2

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}\,[\exp\{-\lambda z(t)(1-\Phi(t))\}\,|\,z(t))>0]=$$
$$=1-(1+\lambda^{-\alpha})^{-1/\alpha},$$

что вместе с (25) дает

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{E}\,[\exp\{\lambda z(t(1-x))\log F(\Phi(ty))\}\,|\,z(t(1-x))>$$
$$>0]=1-(1+(1-x)^{-1}\lambda^{-\alpha}y)^{-1/\alpha}; \quad (26)$$

объединяя (22) — (24) и (26), получаем (21). Поскольку допредельное выражение в левой части (21) аналитично в области $\operatorname{Re}\lambda>0$ при каждом t, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{E}\,[F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))}\,|\,C(t,x,\ \varepsilon)]\,|_{\lambda=1}=$$
$$=-y(1-x)^{1/\alpha}(1-x+y)^{-1/\alpha-1}. \quad (27)$$

Заметим теперь, что

$$\boldsymbol{E}\,[z(t(1-x))F(\Phi(ty))^{z(t(1-x))}\,|\,C(t,x,\ \varepsilon)]=$$
$$=\frac{1}{\log F(\Phi(ty))}\frac{\partial}{\partial\lambda}\boldsymbol{E}\,[F(\Phi(ty))^{\lambda z(t(1-x))}\,|\,C(t,\ x,\ \varepsilon)]\,|_{\lambda=1}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (20) при $y=x$ и $y=x-\varepsilon$ и пользуясь (27) и (17), получаем цепочку неравенств

$$x^{-1/\alpha}(1-x)^{1/\alpha}(x-\varepsilon)^{1/\alpha+1}(1-\varepsilon)^{-1-1/\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\liminf_{t\to\infty}\mathsf{P}\,\{\xi(t)\leqslant tx,\ z(t)>0\,|\,C(t,\ x,\ \varepsilon)\}\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{t\to\infty}\mathsf{P}\,\{\xi(t)\leqslant tx,\quad z(t)>0\,|\,C(t,\ x,\ \varepsilon)\}\leqslant$$
$$\leqslant(x-\varepsilon)^{-1/\alpha}(1-x)^{1/\alpha}x^{1/\alpha+1},$$

Отсюда, из равенства (10), соотношений

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathsf{P}\{C(t,\ x,\ \varepsilon)\}}{\mathsf{P}\{z(t)>0\}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\mathsf{P}\{z(t(1-x))>0\}}{\mathsf{P}\{z(t)>0\}}=(1-x)^{-1/\alpha}$$

и оценок (17) выводим, что

$$x^{-1/\alpha}(x-\varepsilon)^{1/\alpha+1}\leqslant\liminf_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\xi(t)\leqslant tx\,|\,z(t)>0\}\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{t\to\infty}\mathsf{P}\{\xi(t)\leqslant tx\,|\,z(t)>0\}\leqslant(x-\varepsilon)^{-1/\alpha}x^{1/\alpha+1}.$$

Из этой цепочки неравенств, устремляя ε к нулю, получаем (9).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
21.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Зубков А. М., Предельные распределения расстояния до ближайшего общего предка, Теор. вероятн. и ее примен., **20**, № 3 (1975), 614—623.

[2] Харрис Т., Теория ветвящихся случайных процессов, М., «Мир», 1966.

[3] Athreya K. B., Ney P. E., Branching processes, Berlin, Springer-Verlag, 1972.

[4] Slack R. S., A branching process with mean one and possibly infinite variance, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **9**, № 2 (1968), 139—145.

[5] Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., «Наука», 1971.

[6] Ватутин В. А., Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Беллмана — Харриса с бесконечной дисперсией, Теория вероятн. и ее примен., 21, № 4 (1976), 861—863.