Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

О. С. Розанова, О неограниченности решения одной системы уравнений в частных производных,
УМН, 1991, том 46, выпуск 5, 175–176

https://www.mathnet.ru/rm4668

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
20 июня 2025 г., 02:04:26

О НЕОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

О. С. Розанова

Пусть V — ориентируемое n-мерное компактное многообразие с краем S, с метрическим тензором a_{ij}, а $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные криволинейные координаты на V. Рассмотрим заданную на V систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \overline{\nabla q} + \bar{Q} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\bar{u}$ и $\bar{Q}$ являются n-мерными вектор-функциями, $q = q^{ij}(\bar{u}, \bar{x}, t)$ — это C^1-гладкое по всем аргументам тензорное поле на V, а $\nabla_j q^{ij}$ — дивергенция тензора, вычисленная в метрике a_{ij} с учетом зависимости $\bar{u}$ от x. Аргумент t в физических приложениях удобно трактовать как время. Слагаемое $\bar{Q}$ может включать зависимость не только от x, t, $\bar{u}$ и параметров, но также от различных интегральных и дифференциальных выражений, составленных с помощью этих величин; условия на $\bar{Q}$ указаны ниже, в формулировке теоремы.

При исследовании свойств решений системы (1) применен метод, аналогичный использованному в работах [1—3]. Обозначим $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение на V в метрике a_{ij}, dV и dS — элементы n-мерного объема на V и $(n-1)$-мерной площади на S соответственно, а $\bar{n}_s$ — ориентирующую внешнюю нормаль на S. Верна

Теорема. *Классическое решение системы* (1), *для которого в предположении сходимости всех участвующих интегралов выполняются условия* (а) $\int_V q^i_j \nabla_i u^j dV > \varepsilon > 0$, (б) $\int_V (\bar{u}, \bar{Q})\, dV \leqslant 0$, (в) $\int_S a_{ij} q^i_\alpha u^\alpha n^j_S dS \leqslant 0$, *не может быть ограниченным на* V *при всех* $t \geqslant 0$.

Доказательство проведем от противного, т. е. будем считать, что $\bar{u}$ ограничено. Рассмотрим функционал $F(t) = \int_V (\bar{u}, \bar{u})\, dV$, фактически представляющий собой неотрицательную функцию числового аргумента t, принимающую значение нуль только в случае тождественного равенства нулю решения $\bar{u}$ на всем V, что в нашей ситуации запрещается условием (а). Предположение ограниченности $\bar{u}$ на $V \times [0, +\infty)$ влечет существование числа $F > 0$ такого, что $F(t) < F$ для любого t. Так как решение $\bar{u}$ предполагается классическим, то при всех $t > 0$ функция $F(t)$ принадлежит классу C^1. С использованием (а), (б), (в) и теоремы о дивергенции (см. [4]) получим, что

$$(F(t))' = 2\int_V (\bar{u}'_t, \bar{u})\, dV \geqslant 2\int_V q^i_j \nabla_i u^j dV > 2\varepsilon > 0. \tag{2}$$

Следовательно, после интегрирования (2) от нуля до произвольного $T > 0$ с учетом предположения об ограниченности $\bar{u}$ имеем, что $F > F(T) > 2\varepsilon T + F(0)$; $(F > F(0))$, откуда получаем оценку $T < [F - F(0)]/2\varepsilon < \infty$, которая показывает, что предположение об ограниченности неверно.

Замечания. 1) Оговорив заранее, что $\bar{u}$ нетривиально, и заменив условие (а) следующим: $H(F(t)) \leqslant C\int_V q^i_j \nabla_i u^j dV$; $C = \mathrm{const} > 0$, где $H(\eta)$ — некоторая функция одного переменного такая, что $H(\eta) > H_0 > 0$ при $\eta > \eta_0 > 0$ и $\int_{\eta_1}^{\infty} \frac{d\eta}{H(\eta)} < \infty$, можно получить оценку «взрыва» гладкого решения, т. е. обращения его в бесконечность за конечное время: $T \leqslant C\int_{F(0)}^{\infty} \frac{d\eta}{H(\eta)} < \infty$.

2) Вместо (а), (б), и (в) достаточно предположить, что

$$\int_V (q^i_j \nabla_i u^j - \nabla_i (q^i_j u^j) - (\bar{u}, \bar{Q}))\, dV > \varepsilon > 0.$$

Гидродинамические уравнения движения для атмосферы планеты, записанные в координатах (x^1, x^2, x^3) таких, что (x^1, x^2) — локальные криволинейные координаты на эквипотенциальной поверхности поля силы тяжести планеты G, а $x^3 = z$ — вертикальная координата, отсчитывающаяся по нормали к G, в предположении, что вязкость отсутствует, имеют вид (см. [5])

$$(3) \qquad (v^i)_t' = -v^\alpha \nabla_\alpha v^i - 2\varepsilon^i_{jk} \Omega^j v^k - \nabla^i \Phi - \rho^{-1} V^i p, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь $v^i = dx^i/dt$ — контравариантные координаты скорости ветра, $\bar{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения планеты, ε_{ijk} — символ Леви-Чивита, Φ — геопотенциал, p — давление, ρ — плотность. Граничными условиями являются условия непротекания: $v^3|_G = v^3|_H = 0$, где H — верхняя граница модельной атмосферы. Так как на H возможно обращение в нуль величин плотности и давления, потребуем также, чтобы $\lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\bar{\nabla} p}{\rho}$ был конечным. Кроме того, будем считать выполненным уравнение состояния идеального газа $p = \rho R T$ (здесь T — температура, а R — универсальная газовая постоянная). Система (3) после записи в форме Лэмба (см. [6]) имеет вид (1) при $u^i = v^i$, $Q^i = \varepsilon^i_{jk} (2\Omega^j + \omega^j) v^k + \nabla^i \Phi + \rho^{-1} \nabla^i p$ $(i = 1, 2, 3)$; $q = (\bar{v}, \bar{v}) e^i e^j/2$, где e^i — базисный вектор i-го координатного направления, ω^i — компоненты вектора $\operatorname{rot} \bar{v}$. Учет условий непротекания приводит к выполнению требования (б) теоремы со знаком равенства. Поэтому из теоремы получаем

Следствие. *При условиях*

$$(4) \qquad \int_0^H \int_G (\bar{v}, \bar{v}) \nabla_i v^i \, dG\, dz > \varepsilon > 0,$$

$$(5) \qquad \int_0^H \int_G a_{ij} (\varepsilon^i_{\alpha k} (2\Omega^\alpha + \omega^\alpha) v^k v^j + RT\rho^{-1} v^i \nabla^j p)\, dG\, dz \leqslant \int_0^H \int_G (\Phi + RT) \nabla_i v^i dG\, dz$$

гладкое решение системы (3) *не может оставаться ограниченным при всех* $t \geqslant 0$.

Условия (4) и (5) можно прокомментировать так: в невязкой модели для неограниченного роста скорости ветра достаточно, чтобы области с положительной дивергенцией в некотором смысле преобладали над областями с отрицательной дивергенцией. Это согласуется с выводами работы [7] о том, что «расходящиеся антициклоны в первую очередь обеспечивают приток энергии для общей циркуляции атмосферы». Разумеется, в реальной ситуации процессы турбулентности препятствуют неограниченному росту скорости ветра.

Замечание. Обратим внимание на то, что условие (4) не может быть выполнено для уравнений движения несжимаемой среды.

[1] Sideris T. C. // Commun. Math. Phys.— 1985.— V. 101, № 4.— P. 475—485. [2] Розанова О. С. // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 6.— С. 143—144. [4] Розанова О. С. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.— 1991.— № 2.— С. 23—27. [4] Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли.— М.: Мир, 1987. [5] Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987. [6] Черный Г. Г. Газовая динамика.— М.: Наука, 1988. [7] Starr V. // J. Meteorology.— 1948.— V. 5, № 5.— P. 193—197.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в Правление общества 26 апреля 1991 г.