Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, S. I. Anisimov, A. M. Oparin, I. V. Lomonosov,

Pis'ma v Zh. Èksper. Teoret. Fiz., 2009, Volume 90, Issue 1, 21–27

https://www.mathnet.ru/eng/jetpl463

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
January 25, 2026, 06:38:28

Письма в ЖЭТФ, том 90, вып. 1, с. 21 – 27 © 2009 г. 10 июля

О нейтральной устойчивости ударной волны в реальных средах

А. В. Конюхов, А. П. Лихачев[1)], *В. Е. Фортов, К. В. Хищенко, С. И. Анисимов*[+], *А. М. Опарин*[*], *И. В. Ломоносов*[∇]

Объединенный институт высоких температур РАН, 125412 Москва, Россия

[+]*Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

[*]*Институт автоматизации проектирования РАН, 123056 Москва, Россия*

[∇]*Институт проблем химической физики РАН, 142432 Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 8 мая 2009 г.

Представлены результаты теоретического анализа и компьютерного моделирования поведения нейтрально устойчивых ударных волн с использованием реальных (газ Ван-дер-Ваальса, магний) уравнений состояния. Развит подход, на основе которого область нейтральной устойчивости ударной волны для каждого значения давления перед ней определяется из анализа уравнения состояния. Создан простой алгоритм, позволяющий установить причину акустических возмущений (фронт ударной волны или внешний источник) непосредственно по картине течения. Отмечается, что в отличие от предсказаний линейной теории амплитуда возмущений нейтрально устойчивой ударной волны уменьшается со временем, хотя этот процесс происходит заметно медленнее, чем в случае абсолютно устойчивой ударной волны.

PACS: 47.40.−x, 64.10.+h

Введение. В работе [1] и ряде последовавших за ней публикаций (в частности, [2 – 7]) была развита линейная теория устойчивости ударной волны (УВ). В рамках этой теории было показано, что абсолютная устойчивость плоской стационарной УВ по отношению к малым периодическим возмущениям ее фронта, всегда соблюдающаяся в совершенном газе, может нарушаться в средах с произвольным уравнением состояния. Происходящая в этом случае эволюция УВ имеет вид экспоненциального роста амплитуды возмущений со временем (неустойчивость) или неисчезающей "ряби" на поверхности УВ без угасания или усиления возмущений (нейтральная устойчивость). В [1, 2] были определены условия, при выполнении которых УВ находится в одном из этих состояний. В частности, было установлено, что нейтральная устойчивость, интерпретируемая в линейной теории как состояние спонтанного излучения фронтом УВ звуковых и энтропийно-вихревых волн, имеет место при выполнении условия

$$L_A < L < 1 + 2M_1, \qquad (1)$$

где $L = j^2(\partial V/\partial p)_H$ – введенный в [1] параметр устойчивости УВ, $j = [(p_1 - p_0)/(V_0 - V_1)]^{1/2}$ – плотность потока вещества через фронт УВ, p – давление, V – удельный объем, индекс H означает дифференцирование вдоль ударной адиабаты (УА), $L_A = (1 - \mathrm{M}_1^2 - \theta\mathrm{M}_1^2)/(1 - \mathrm{M}_1^2 + \theta\mathrm{M}_1^2)$ – нижняя граница области нейтральной устойчивости (точное выражение для L_A было получено в [2], в связи с чем условие (1) часто называют условием Дьякова–Конторовича), M_1 – число Маха в системе координат, связанной с фронтом УВ, $\theta = V_0/V_1$, индексы "0" и "1" относятся, соответственно, к параметрам до и после ударной волны.

Анализ уравнений состояния реальных веществ показывает, что условие (1) может выполняться в области фазового перехода "жидкость–пар" в воде [8], меди [9], некоторых других металлах [10, 11], а также в сильно ионизованных инертных газах [12]. Экспериментальное подтверждение этих теоретических предсказаний сталкивается с трудностью интерпретации полученных данных в силу нелинейности реального процесса и наличия внешних (не связанных с условием (1)) источников акустических возмущений. К настоящему времени известен ряд работ, в которых нейтральная устойчивость УВ исследовалась в той или иной нелинейной постановке. В частности, в [13] было показано, что нейтрально устойчивые УВ могут распадаться с образованием тройных конфигураций, состоящих из УВ, контактного разрыва и либо УВ, либо волны Прандтля–Майера. В [14] была предложена нестационарная модель процесса самовозбуждения возмущений фронта УВ, в рамках которой при

[1)]e-mail: apl@ihed.ras.ru

определенной форме УА в области (1) амплитуда возмущений может увеличиваться со временем. В [15] был проведен анализ поведения нейтрально устойчивой УВ с учетом квадратичных членов в разложении возмущения по амплитуде, показавший, что спонтанное (не обусловленное внешними воздействиями) излучение звука фронтом УВ, по-видимому, невозможно. В то же время в этой работе подчеркивается, что при выполнении условия (1) взаимодействие УВ с внешним возмущением (слабой волной конечной амплитуды) может приводить к ее распаду на другие волновые элементы и/или к аномальному усилению шумового фона в зафронтовой области течения. Как видно, результаты этих работ носят предположительный и в известной степени противоречивый характер, не позволяя сделать окончательные выводы о формах проявления нейтральной устойчивости УВ в реальных условиях.

Более полную информацию о нелинейном поведении нейтрально устойчивой УВ можно получить в вычислительном эксперименте. В [16] было проведено моделирование эволюции нейтрально устойчивой УВ в политропном газе Ван-дер-Ваальса ($c_V = 30R$, где c_V – удельная теплоемкость при постоянном давлении, R – индивидуальная газовая постоянная). Рассматривалось распространение УВ в канале с небольшим внезапным сужением поперечного сечения. При прохождении через область сужения УВ возмущалась, и ее фронт становился источником акустических возмущений. Расчетное значение угла наклона звуковых волн к оси канала (направлению движения УВ) с хорошей точностью совпало с предсказаниями линейной теории. В целом, эта работа носила демонстрационный характер и не содержала анализа влияния нелинейности на поведение УВ в области нейтральной устойчивости. В [17] рассмотрено взаимодействие поперечного вихря с полной комбинированной волной сжатия, состоящей из абсолютно устойчивой и нейтрально устойчивой ударных волн. Показано принципиальное отличие в реакции УВ на прохождение вихря: на первой из них амплитуда возмущений быстро уменьшается до нуля, а на второй возникают медленно затухающие акустические возмущения.

В данной работе представлены результаты теоретического анализа и компьютерного моделирования поведения нейтрально устойчивых ударных волн с использованием уравнений состояния реальных сред (газ Ван-дер-Ваальса, магний). Развит подход, на основе которого область нейтральной устойчивости ударной волны для каждого значения давления перед ней определяется из анализа уравнения состояния. Создан простой алгоритм, позволяющий установить источник акустических возмущений (фронт ударной волны или внешний источник) непосредственно по картине течения. Отмечается, что в отличие от предсказаний линейной теории амплитуда возмущений нейтрально устойчивой ударной волны уменьшается со временем, хотя этот процесс происходит значительно медленнее, чем в случае абсолютно устойчивой ударной волны.

1. Реализуемость условия (1) в конкретной среде может быть выявлена непосредственной проверкой его выполнения на выборочно построенных ударных адиабатах, однако этот путь весьма трудоемок и не обладает необходимой общностью. Между тем, наличие на фазовой диаграмме области нейтральной устойчивости УВ для семейства ударных адиабат с некоторым значением начального давления p_0 и ее границы (если такая область существует) могут быть определены заранее из анализа уравнения состояния. Опишем алгоритм такого анализа на примере обобщенного уравнения состояния ван-дер-ваальсовского типа (см., например, [18]):

$$\left(p + \frac{a}{V^n}\right)(V - b) = RT, \qquad (2)$$

где T – температура, a, b – постоянные величины, n – параметр. Среда полагается политропной с постоянной молекулярной массой, то есть $c_V = \text{const}$, $R = \text{const}$. При $n = 2$ уравнение (2) переходит в обычное уравнение Ван-дер-Ваальса, при $n = 5/3$ – во второе уравнение Дитеричи. Преобразовав (2) к калорическому виду,

$$e = \frac{c_V}{R}\left(p + \frac{a}{V^n}\right)(V - b) - \frac{a}{(n-1)V^{n-1}}, \qquad (3)$$

и получив уравнение ударной адиабаты и выражение для скорости звука, выразим параметр устойчивости УВ L в виде

$$L = -1 + \frac{1 - M_1^2}{1 - M_1^2 + \left(\frac{1}{2}(\gamma+1)V_1 + \frac{1}{2}(\gamma-1)V_0 - b\right)(V_1 - b)^{-1}M_1^2},$$

где $\gamma = 1 + R/c_V$. При $M_1 < 1$ (одно из условий эволюционности ударной волны) $L < 0$, то есть в газе ван-дер-ваальсовского типа правое неравенство в условии (1) выполняется всегда. Левую часть условия (1) после несложных преобразований можно записать в виде

$$p_1 < p_0 + (n - \gamma)\frac{a}{b}V_1^{1-n} - naV_1^{-n} - \frac{\gamma p_0 V_1}{b},$$

что позволяет для каждого семейства ударных адиабат с начальным давлением p_0 выделить область

p–V диаграммы, внутри которой заключены участки ударных адиабат, отвечающие условию нейтральной устойчивости ударных волн. В качестве примера на рис.1 рассмотрен случай политропного газа Ван-дер-Ваальса при $n = 2$, $\gamma = 1.2$ (давление перед УВ $p_0 = 0.1p_c$, начальная точка 0 ударной адиабаты расположена на границе двухфазной области).

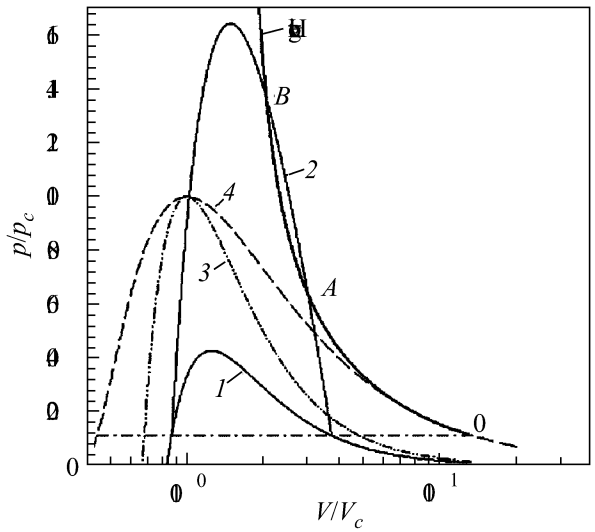

Рис.1. Положение области нейтральной устойчивости ударных волн в политропном газе Ван-дер-Ваальса при $n = 2$, $\gamma = 1.2$, $p_0/p_c = 0.1$: *1* – граница области гиперболичности уравнений Эйлера, *2* – граница области нейтральной устойчивости, *3* – спинодаль, *4* – бинодаль. Участок A–B ударной адиабаты соответствует нейтрально устойчивым ударным волнам

В связи с проблемой идентификации нейтральной устойчивой УВ в эксперименте напомним некоторые выводы линейной теории устойчивости УВ, в основе которой лежит поиск решения в виде акустической и энтропийно-вихревой волн, согласованных с условиями на разрыве. Возмущение энтропии и завихренности генерируется на фронте УВ в узловой точке и сносится в область зафронтового течения. Акустической компонентой этого решения является плоская звуковая волна произвольной частоты, наклон которой к невозмущенной исходной УВ составляет угол α (см., например, [19]):

$$\cos(\alpha) = \frac{L-2-M_1^2+((1-M_1^2)^2+(L^2-1)(1-M_1^2)\theta+M_1^2\theta^2(L+1)^2)^{\frac{1}{2}}}{M_1(4+(L+1)(\theta-1))}. \tag{4}$$

При условии $\cos\alpha < -M_1$ поток энергии звуковой волны в связанной с разрывом системе координат направлен в сторону ударной волны, то есть стационарность поддерживается извне. При $\cos\alpha > -M_1$ источником звука является ударная волна. Последнее условие, определяющее диапазон спонтанного излучения звука, можно преобразовать к виду

$$\frac{1-M_1^2(1+\theta)}{1-M_1^2(1-\theta)} = L_A < L.$$

Из (4) следует, что в окрестности звуковой точки ($L \to -1$, $M_1 \to 1$) звук излучается в направлении движения ударной волны ($\cos\alpha \to -1$). При $\cos\alpha > 0$ выполняется условие

$$\frac{1+(2-\theta)M_1^2}{1+\theta M_1^2} = L_B < L.$$

Диапазон $L_B < L < 1 + 2M_1$ интересен тем, что в этом случае узловая точка, из которой исходят акустическая и энтропийно-вихревая волны, перемещается вдоль фронта УВ со скоростью $v_D = c_1(1+M_1\cos\alpha)/\sin\alpha$, превышающей скорость звука по обе стороны от разрыва.

С положением фронтов акустической и энтропийно-вихревой волн связан простой критерий, позволяющий идентифицировать причину акустических возмущений (фронт ударной волны или внешний источник) непосредственно по "фотографии" структуры течения (по распределению плотности, градиентные зоны которой присутствуют и в звуковых, и в энтропийно-вихревой волнах). Рассмотрим акустическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси y в системе координат, в которой трехволновая конфигурация со слабой исходящей волной стационарна. Пусть (u, v) – компоненты скорости течения газа после ударной волны в рассматриваемой системе координат. Если вектор $\mathbf{n}$ с компонентами $(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y)$ – единичная нормаль к акустической волне, то условие $n_x c_1 + u_1 > 0$, при котором акустическая волна является исходящей, с учетом условия стационарности (в системе координат, связанной с узловой точкой) $n_x u_1 + n_y v_1 + c_1 = 0$ записывается в виде $n_y u_1 - n_x v_1 > 0$. Следовательно, слабая акустическая волна является исходящей (ударная волна излучает звук) тогда и только тогда, когда угол β между волновыми векторами акустической и энтропийно-вихревой волн (или собственно между волнами) составляет менее 90° (компоненты нормали к энтропийной волне – $(-v, u)$).

2. Рассмотрим поведение возмущенной нейтрально устойчивой ударной волны в газе ван-дер-ваальсовского типа (2) при $n = 2$, $\gamma = 1.4$. Здесь и в последующих расчетах предполагается, что разрыв представляет собой математическую поверхность,

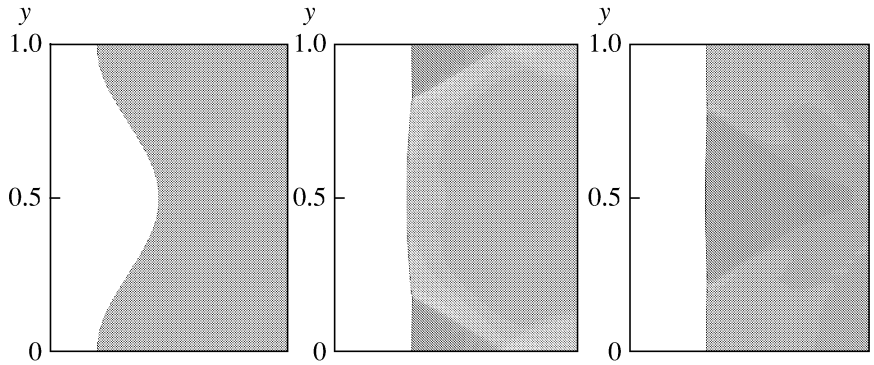

Рис.2. Затухание 2D возмущения УВ в идеальном газе $t = 0;\ 2;\ 5$

влиянием структуры и термодинамической неравновесности пренебрегается. В качестве дискретного аналога слабого решения уравнений Эйлера используется численный метод конечных объемов. Потоки на гранях ячеек аппроксимируются с использованием ENO схемы Янга [20]). Метод Роу, обобщенный на произвольное уравнение состояния, обеспечивает точное выполнение условий на стационарном разрыве [21, 22]. Для уменьшения дисперсионной ошибки и отбора термодинамически допустимых разрывов используется энтропийная коррекция Хартена [23]. Интегрирование по времени осуществляется с использованием метода Рунге-Кутта третьего порядка аппроксимации [24]. Степень дискретизации расчетной области выбиралась из условия обеспечения сходимости решения для всех значимых элементов структуры течения.

Расчеты проводились на прямоугольной сетке размерностью 800×600 с постоянным шагом по обеим пространственным координатам. Начальные условия соответствуют гармоническому возмущению формы стационарной ударной волны $\xi(y) = \xi_0\cos(ky)$, $\xi_0 = 0.1$. Калорическое уравнение состояния (3) приводилось к безразмерному виду

$$e_r = \frac{c_v}{R}\left(p_r + \frac{n+1}{n-1}V_r^{-n}\right)\left(V_r - \frac{n-1}{n+1}\right) - \frac{n+1}{(n-1)^2}V_r^{1-n},$$

где $p_r = p/p_c$, $V_r = V/V_c$, а удельная внутренняя энергия отнесена к величине p_cV_c.

Задавались следующие параметры среды до и после УВ:

$$(p, V, u) = \begin{cases} (0.005,\ 40,\ 0.933) & x < \xi(y) \\ (0.02,\ 12.45,\ 0.290) & x \geq \xi(y) \end{cases}.$$

В качестве сравнения рассматривалась УВ в идеальном газе с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ и параметрами

$$(p, V, u) = \begin{cases} (0.005,\ 40,\ 1.4) & x < \xi(y) \\ (0.04,\ 11.43,\ 0.4) & x \geq \xi(y) \end{cases}.$$

В качестве граничных условий задавались: на входной границе – “сверхзвуковые” условия, на выходной границе – неотражающие условия, на боковых границах $y = \mathrm{const}$ – условия периодичности.

В обоих случаях распад начального возмущения инициирует возмущение фронта УВ и зафронтового течения. Компоненты решения (давление, плотность и т.д.) в каждой точке за фронтом ударной волны испытывают затухающие колебания, вызванные интерференцией акустических волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси y. Период колебаний, равный $\lambda/(2v_D)$, где λ – длина волны возмущения в начальных данных, является естественным временным масштабом для сравнения характеристик затухания УВ (следует отметить, что скорости сравниваемых ударных волн различны).

На рис.2, 3 приведена картина течения в последовательные моменты времени для идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса, соответственно. Максимум давления в случае идеального газа расположен в узловой точке на фронте УВ. В случае газа Ван-дер-Ваальса максимум давления расположен на акустической волне, а минимум реализуется в центрах вихрей, образующихся на начальной стадии эволюции течения.

На рис.4 показана зависимость интенсивности акустических возмущений в зафронтовом течении для абсолютно устойчивой (идеальный газ) и нейтрально устойчивой (газ Ван-дер-Ваальса) ударных волн. В качестве характеристики процесса затухания принята величина $(p_{\max} - p_1)/p_1$, где $p_{\max}$ – мак-

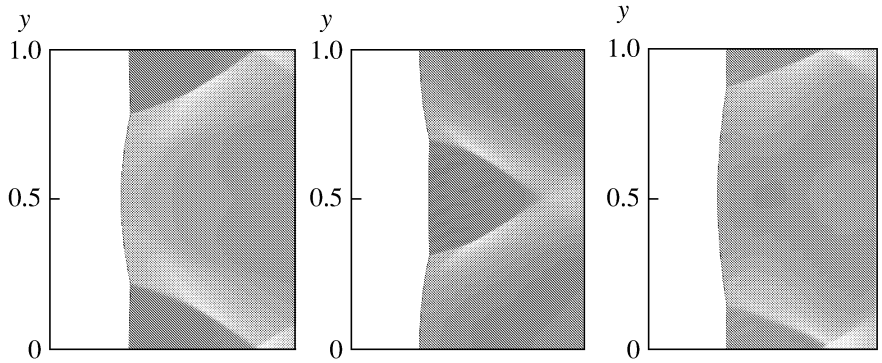

Рис.3. Затухание 2D возмущения нейтрально устойчивой УВ в газе Ван-дер-Ваальса $t = 2; 5; 8$

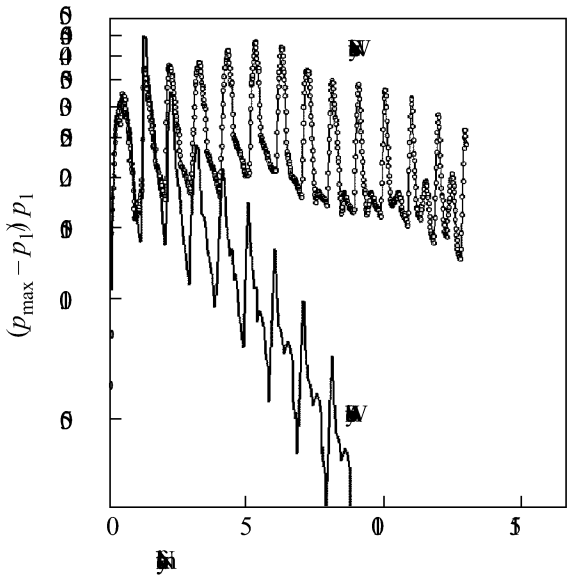

Рис.4. Затухание возмущений УВ при $L > L_0$ (верхняя кривая) и $L < L_0$ (нижняя кривая)

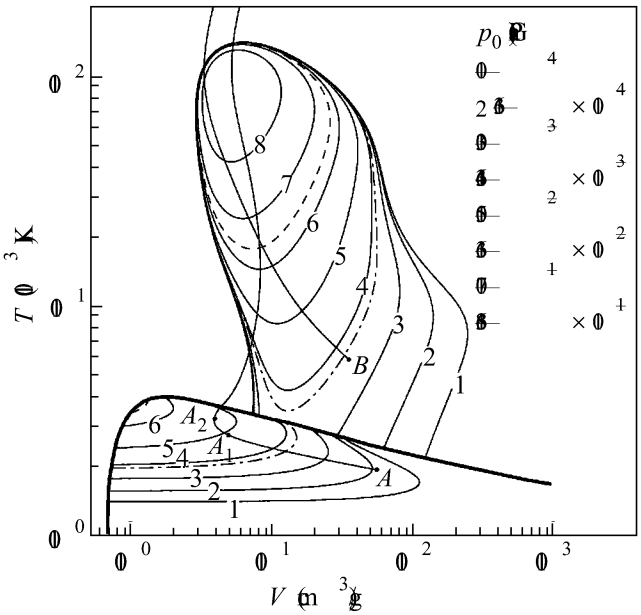

Рис.5. Границы областей $L > L_A$ в магнии для различных значений начального давления p_0. Ударные адиабаты с начальным состоянием в двухфазной (A) и однофазной (B) областях, имеющие участки $L > L_A$ (A, B) и $L > L_B$

симальное давление в зафронтовом течении. Видно, что возмущения за нейтрально устойчивой УВ затухают, но существенно медленнее, чем после абсолютно устойчивой УВ.

3. В [10, 25] было построено широкодиапазонное уравнения состояния магния и установлено существование ударных адиабат, на которых выполняется условие нейтральной устойчивости. Анализ этого уравнения состояния с использованием описанного выше алгоритма обнаружил следующие особенности реализации условия (1), рис.5.

Имеется два семейства вложенных областей ($L > L_A$), первое из которых соответствует ударным волнам с конечным состоянием в двухфазной области жидкость-газ и расположено на рис.5 ниже кривой сосуществования фаз. Часть границ этого семейства совпадает с границей двухфазной области. Максимум по давлению p_0 (общая точка областей $L > L_A$ для различных p_0) достигается в околокритической области со стороны жидкой фазы и составляет ~ 0.05 ГПа. В двухфазной области возможна реализация условия $L > L_B$, при котором узловые точки распространяются по поверхности ударной волны со скоростью, превышающей скорость звука после УВ. Соответствующий участок $A_1 - A_2$ показан на ударной адиабате с начальным состоянием $p_0 = 24$ бар, $v_0 = 55\,\text{см}^3/\text{г}$ (точка A). Следует отметить, что протяженность областей $L > L_A$ ударных волн с конечным состоянием в однофазной области в приведен-

ных переменных существенно больше, чем для простых моделей реального газа. Так, в модели газа Ван-дер-Ваальса давление p_1 за нейтрально устойчивой УВ при любых теплоемкостях и начальных давлениях не превышает величину $27/8\,p_c$, а максимальная температура не превышает температуру Бойля $T_b = 27/8\,T_c$. В то же время в магнии соответствующие величины в десятки раз выше (рис.5). Столь большое отличие объясняется, по-видимому, влиянием вырождения газа тепловых электронов. Общая точка областей $L > L_A$ второго семейства (ударные волны с конечным состоянием в однофазной области) характеризуется начальным давлением $p_0 \sim 1$ ГПа.

Моделирование поведения нейтрально устойчивой ударной волны в магнии (рис.6) проводились в той же модели, что и для газа Ван-дер-Ваальса.

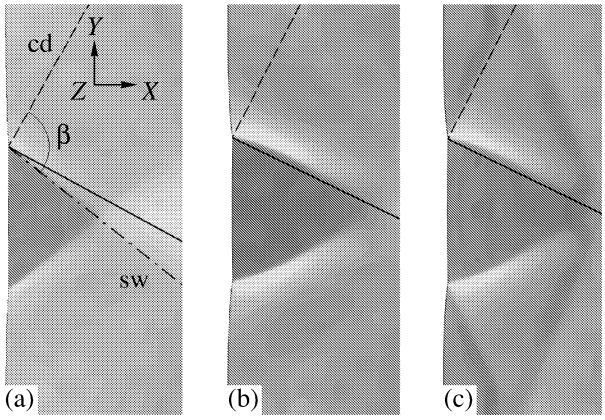

Рис.6. Идентификация нейтрально устойчивой УВ по положению акустической и энтропийно-вихревой волн: (a) идеальный газ, $L < L_0$, визуализация давления; (b) магний, $L > L_0$, визуализация давления; (c) магний, $L > L_0$, визуализация плотности (здесь sw – слабая ударная или акустическая волна)

В качестве начальной точки ударной адиабаты была выбрана точка B (рис.5) с параметрами $p_0 = 0.5$ кбар, $V_0 = 35\,\text{см}^3/\text{г}$, находящаяся в однофазной области. Конечное состояние, характеризующееся давлением 10 кбар, принадлежит области нейтральной устойчивости, граница которой показана на рис.6 штриховой линией. Как видно, в результате распада начального возмущения, как и в предыдущих решениях, образуются две группы вторичных волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

Рис.6 иллюстрирует сформулированное выше правило углов, позволяющее определить источник акустических возмущений зафронтового течения. На рис.6b, c показаны распределения давления и плотности в момент времени, соответствующий 10 периодам колебаний фронта, когда структура акустических волн установилась, и их амплитуда не превышает $0.05p_1$. Положение фронта энтропийных возмущений, определенное по скорости узловой точки и скорости течения после УВ, хорошо согласуется с расчетным положением энтропийно-вихревой волны (рис.6c). Штриховой линией показано положение фронта энтропийной волны, сплошной линией – перпендикуляр к энтропийно-вихревой волне. Как видно из этих рисунков, акустические волны, связанные с узловой точкой, расположены в пределах угла $\pi/2$, отсчитываемого от положения фронта энтропийных возмущений, что говорит о том, что звуковые волны являются исходящими. Для сравнения на рис.6a представлено решение аналогичной задачи для идеального газа. Величина угла β, образуемого фронтами акустических возмущений (штрих-пунктир) и энтропийных возмущений (штриховая линия), превышает $\pi/2$. Это означает, что звук падает на УВ, что и должно иметь место при $L < L_A$.

Выводы. Проведен ряд вычислительных экспериментов по моделированию поведения нейтрально устойчивых ударных волн. В рамках 2D постановки численно исследована эволюция нейтрально устойчивой ударной волны в газе ван-дер-ваальсовского типа при периодическом возмущении ее фронта. С течением времени за фронтом возмущенной ударной волны формируется характерная решетка звуковых волн, распространяющихся под предсказываемыми линейной теорией углами $\pm\alpha$ к направлению движения газа в ударной волне. Расчеты с использованием широкодиапазонного уравнения состояния магния подтвердили результаты теоретического анализа, проведенного в данной работе и в работе [10], о возможности существования нейтрально устойчивых ударных волн в этом металле.

В целом, во всех рассмотренных случаях излучение звука ударной волной являлось вынужденным, а спонтанная (не обусловленная внешними воздействиями) генерация акустических волн не наблюдалась. В то же время затухание акустических возмущений в зафронтовом течении таких УВ происходит значительно медленнее, чем в случае абсолютно устойчивых ударных волн, что может оказаться практически важным во многих приложениях.

Работа выполнена в рамках Программ фундаментальных исследований Президиума РАН “Исследование вещества в экстремальных условиях” и “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”.

1. С. П. Дъяков, ЖЭТФ **27**, 288 (954).
2. В. М. Конторович, ЖЭТФ **33**, 1525 (1957).
3. С. В. Иорданский, ПММ **21**, 465 (1957).
4. Г. Я. Галин, Докл. АН СССР **120**, 730 (1958).
5. J. J. Erpenbeck, Phys. Fluids **5**, 1181 (1962).
6. G. W. Swan and G. R. Fowles, Phys. Fluids **18**, 28 (1975).
7. А. Л. Ни, С. Г. Сугак, В. Е. Фортов, ТВТ **24**, 564 (1986).
8. Н. М. Кузнецов, О. Н. Давыдова, ТВТ **26**, 567 (1988).
9. А. В. Бушман, *В тезисах докладов Всесоюзного симпозиума по импульсным давлениям*, М.: ВНИИФТРИ, 1976, с. 613.
10. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khischenko, and P. R. Levashov, In Proc. *Shock Compression of Condensed Matter-2002*, New York: AIP, 2003. p. 91.
11. I. Rutkevich, E. Zaretsky, and M. J. Mond, Appl. Phys. **81**, 7228 (1997).
12. M. Mond and I. M. Rutkevich, J. Fluid Mech. **275**, 121 (1994).
13. С. А. Егорушкин, Изв. АН СССР. МЖГ №6, 147 (1982).
14. С. А. Егорушкин, Изв. АН СССР. МЖГ №3, 110 (1984).
15. Н. М. Кузнецов, УФН **159**, 493 (1989).
16. J. W. Bates and D. C. Montgomery, Phys. Rev. Lett. **84**, 1180 (2000).
17. А. В. Конюхов, А. П. Лихачев, А. М. Опарин и др., ЖЭТФ **131**, 761 (2007).
18. Р. Л. Фогельсон, Е. Р. Лихачев, ЖТФ **74**, 129 (2004).
19. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
20. J. Y. Yang and C. A. Hsu, AIAA J. **30**, 1570 (1992).
21. P. L. Roe, J. Comput. Phys. **43**, 357 (1981).
22. P. Glaister, J. Comput. Phys. **74**, 382 (1988).
23. A. Harten, J. Comput. Phys. **49**, 357 (1983).
24. C.-W. Shu and S. Osher, J. Comput. Phys. **77**, 439 (1988).
25. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, and P. R. Levashov, In Proc. *Shock Compression of Condensed Matter – 2001*, New York: AIP, 2002, p. 111.