A. A. Vladimirov, Method of oscillation and spectral problem for four-order differential operator with self-similar weight,
Algebra i Analiz, 2015, Volume 27, Issue 2, 83–95

Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №2

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О СПЕКТРЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С САМОПОДОБНЫМ ВЕСОМ

© А. А. ВЛАДИМИРОВ

Рассматриваются самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения $y^{(4)} - \lambda\rho y = 0$, где вес $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции канторовского типа. На основе изучения осцилляционных свойств собственных функций уточняются характеристики известных спектральных асимптотик таких задач.

§1. Введение

1.1. Целью настоящей статьи является применение разработанного в [1] осцилляционного метода исследования спектральных асимптотик задач Штурма–Лиувилля с самоподобными весами к случаю самосопряженной граничной задачи

$$y^{(4)} - \lambda\rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$(U-1)y^{\vee} + i(U+1)y^{\wedge} = 0, \tag{1.2}$$

где $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ — неотрицательная обобщенная весовая функция, $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ — унитарная матрица граничных условий, а $y^{\wedge}$ и $y^{\vee}$ — числовые векторы

$$y^{\wedge} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} y(0) & y'(0) & y(1) & y'(1) \end{pmatrix}^T,$$
$$y^{\vee} \rightleftharpoons \begin{pmatrix} -y'''(0) & y''(0) & y'''(1) & -y''(1) \end{pmatrix}^T$$

(ср. [2, (7.50)]). Исследование осцилляционных свойств собственных функций задач четвертого порядка требует использования методов, отличных

Ключевые слова: дифференциальный оператор, осцилляция собственных функций, самоподобная функция, спектральные асимптотики.

Работа поддержана РФФИ, грант №13-01-00705.

от обычно применяемых в теории задач Штурма–Лиувилля (см., например, [3, 4]). Поэтому перенесение основанных на таком исследовании результатов работы [1] на случай задачи (1.1), (1.2) не является вполне тривиальным.

Одним из основных рабочих инструментов развитой в [1] конструкции, используемым и далее в настоящей статье, выступает следующий критерий сингулярности монотонной функции:

Предложение 1 (см. [1, §4.1.2, §4.1.3]). *Ограниченная неубывающая функция $f \in L_2[0,1]$ является сингулярной в том и только том случае, когда найдется последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ неубывающих ступенчатых функций со свойством*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2)\, \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

где через $\mathfrak{A}_n$ обозначены множества точек разрыва функций f_n.

Центральный результат работы [1] по форме совпадает — с точностью до несколько иного определения коэффициента ν — с формулируемым далее предложением 10. Используемые при этом ограничения на характер весовой функции идентичны указанным в следующем пункте. Менее точные, чем устанавливаемые в настоящей статье, — однако формулируемые при меньших ограничениях на характер весовой функции — результаты о распределении спектра задач высшего порядка могут быть найдены в работе [5, §3]. В работах [1, 5] приведены также некоторые исторические сведения об изучении обыкновенных дифференциальных уравнений с самоподобными весами.

1.2. Граничные задачи (1.1), (1.2) будут далее рассматриваться не в максимальной общности. А именно соотношения (1.2) мы намерены предполагать[1] допускающими запись в виде

$$\begin{aligned} y''(0) + \alpha y(0) - \beta y'(0) &= -\beta y'''(0) + \alpha y''(0) \\ &= y''(1) + \alpha y(1) + \beta y'(1) = -\beta y'''(1) - \alpha y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$. Кроме того, функция ρ будет обычно предполагаться обобщенной производной неубывающей функции $P \in C[0,1]$ канторовского типа самоподобия.

Определение 1 (см. [1, §2]). Функция $P \in C[0,1]$ называется самоподобной функцией канторовского типа, если выполнены равенства $P(0) = 0$ и

[1]Это ограничение является техническим и не влияет на немедленно вытекающую из вариационных принципов применимость окончательного результата (см. предложение 10) к случаю произвольных граничных условий (1.2).

$P(1) = 1$, а также могут быть указаны натуральное число $\varkappa \geqslant 2$ и пара вещественных чисел $a \in (0, 1/\varkappa)$, $b \rightleftharpoons (1 - \varkappa a)/(\varkappa - 1)$ со следующими свойствами:

(1) Независимо от выбора индекса $k \in \overline{0, \varkappa - 1}$ функция $P_k \in C[0,1]$ вида
$$P_k(x) \rightleftharpoons \varkappa P(k[a+b] + ax)$$
совпадает с функцией P с точностью до аддитивной постоянной.

(2) Независимо от выбора индекса $k \in \overline{1, \varkappa - 1}$ функция P постоянна на интервале $(k[a+b] - b, k[a+b])$.

В частности, известная канторова лестница представляет собой самоподобную функцию канторовского типа с параметрами $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$. Легко также видеть, что всякая самоподобная функция P канторовского типа удовлетворяет тождеству $P(x) \equiv 1 - P(1-x)$.

1.3. Формальной задаче (1.1), (1.3) обычным образом [6] сопоставляется линейный пучок $T\colon \mathbb{C} \to \mathcal{B}(W_2^2[0,1], W_2^{-2}[0,1])$ операторов вида
$$\langle T(\lambda)y, y\rangle \equiv \int_0^1 |y''|^2\,dx + \frac{|\alpha y(0) - \beta y'(0)|^2 + |\alpha y(1) + \beta y'(1)|^2}{\beta} - \lambda\langle \rho, |y|^2\rangle. \tag{1.4}$$
Интегрированием по частям (см. [6, лемма 2]) легко устанавливается, что пара $\{\lambda, y\}$, состоящая из числа $\lambda \in \mathbb{C}$ и нетривиальной функции $y \in W_2^2[0,1]$, является собственной парой пучка T в том и только том случае, когда функции y'' и $y''' - \lambda P y$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнению
$$[y''' - \lambda P y]' + \lambda P y' = 0 \tag{1.5}$$
совместно с граничными условиями (1.3). Это наблюдение постоянно будет использоваться нами в дальнейшем.

1.4. Статья имеет следующую структуру. В §2 излагаются сведения об осцилляции собственных функций задач рассматриваемого типа. Они являются достаточно стандартными [3, 4] и не претендуют в полной мере на научную новизну. В §3 рассматривается явление спектральной периодичности и вытекающие из него свойства спектральных асимптотик, а также приводятся иллюстрирующие полученные теоретические результаты данные числовых экспериментов.

Поясняющие изложение ссылки на разделы настоящей статьи приводятся в тексте в прямых скобках.

§2. Осцилляция собственных функций

2.1. Имеют место следующие два факта.

Предложение 2. *Пусть* $\lambda > 0$, *а* $y \in C^3[0,1]$ *есть нетривиальное решение уравнения* (1.5), *удовлетворяющее при некотором* $a \in [0,1)$ *неравенствам*

$$y(a) \geqslant 0, \quad y'(a) \geqslant 0, \quad y''(a) \geqslant 0, \quad y'''(a) \geqslant 0.$$

Тогда выполняются также неравенства

$$y(1) > 0, \quad y'(1) > 0, \quad y''(1) > 0, \quad y'''(1) > 0.$$

Доказательство. Пусть $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность функций класса $C^1[0,1]$, равномерно стремящихся к функции P, удовлетворяющих равенствам $P_n(a) = P(a)$ и имеющих равномерно на отрезке $[0,1]$ положительные производные. Пусть также $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность решений начальных задач

$$[y_n''' - \lambda P_n y_n]' + \lambda P_n y_n' = 0, \quad y_n^{(k)}(a) = y^{(k)}(a), \quad k \in \overline{0,3}. \tag{2.1}$$

Стандартными методами теории линейных дифференциальных уравнений для вектор-функций [7, §16] легко устанавливается факт равномерной на отрезке $[0,1]$ сходимости последовательностей $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n'\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n''\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{y_n''' - \lambda P_n y_n\}_{n=0}^{\infty}$ к функциям y, y', y'' и $y''' - \lambda P y$ соответственно.

Согласно [4, лемма 2.1] каждая из функций y_n, y_n', y_n'' и y_n''' строго положительна и возрастает на полуинтервале $(a,1]$. Соответственно независимо от выбора точки $x \in (a,1)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} y_n'''(1) &\geqslant \int_x^1 y_n^{(4)}(t)\,dt = \int_x^1 \lambda P_n'(t) y_n(t)\,dt \\ &\geqslant \int_x^1 \lambda P_n'(t)\,dt \cdot y_n(x) = \lambda \cdot [P_n(1) - P_n(x)]\, y_n(x). \end{aligned}$$

Посредством предельного перехода теперь немедленно устанавливается факт неотрицательности и неубывания на полуинтервале $(a,1]$ каждой из функций y, y', y' и y''', а также справедливость оценок

$$(\forall x \in (a,1)) \quad y'''(1) \geqslant \lambda \cdot [P(1) - P(x)] y(x). \tag{2.2}$$

При этом ввиду нетривиальности функции y заведомо найдется величина $\gamma > 0$ со свойством

$$(\forall x \in (a,1]) \quad y(x) \geqslant \gamma \cdot (x-a)^3. \tag{2.3}$$

Объединяя оценки (2.2) и (2.3) с немедленно вытекающим из определения 1 фактом непостоянности функции P в любой левой окрестности точки 1, убеждаемся в выполнении неравенства $y'''(1) > 0$. Тогда в силу теоремы Лагранжа о среднем значении верны и прочие искомые неравенства. $\square$

Предложение 3. *Пусть $\lambda > 0$, а $y \in C^3[0,1]$ есть нетривиальное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее при некотором $a \in (0,1]$ неравенствам*

$$y(a) \geqslant 0, \quad y'(a) \leqslant 0, \quad y''(a) \geqslant 0, \quad y'''(a) \leqslant 0.$$

Тогда выполняются также неравенства

$$y(0) > 0, \quad y'(0) < 0, \quad y''(0) > 0, \quad y'''(0) < 0.$$

Предложение 3 доказывается полностью аналогично предложению 2.

2.2. Имеют место следующие два факта.

Предложение 4. *Спектр пучка T составлен последовательностью $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных — а в случае $\alpha > 0$ даже строго положительных — простых собственных значений. Независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ отвечающая собственному значению λ_n собственная функция y_n имеет только простые нули и удовлетворяет условиям $y_n(0) \neq 0$ и $y_n(1) \neq 0$.*

Доказательство. Из представления (1.4) квадратичной формы оператора $T(0)$ немедленно вытекает, что ядро этого оператора образовано линейными функциями, удовлетворяющими равенствам

$$\alpha y(0) - \beta y'(0) = \alpha y(1) + \beta y'(1) = 0.$$

В случае $\alpha > 0$ единственной такой функцией является тождественно нулевая. Соответственно, в этом случае все собственные значения пучка T строго положительны. В случае $\alpha = 0$ такие функции образуют одномерное подпространство постоянных функций.

Пусть некоторое собственное значение $\lambda > 0$ пучка T обладает собственной функцией y со свойством $y(0) = 0$. Тогда без ограничения общности рассмотрения можно считать, что функция y вещественнозначна, а знаки величин $y'(0)$, $y''(0)$ и $y'''(0)$ совпадают [(1.3)]. Однако это влечет противоречащее граничным условиям (1.3) совпадение знаков величин $y''(1) \neq 0$ и $y'''(1) \neq 0$ [предложение 2].

Пусть некоторое собственное значение $\lambda > 0$ пучка T обладает собственной функцией y со свойством $y(1) = 0$. Тогда без ограничения общности рассмотрения можно считать, что функция y вещественнозначна, а знаки величин $-y'(1)$, $y''(1)$ и $-y'''(1)$ совпадают [(1.3)]. Однако это влечет противоречащее граничным условиям (1.3) совпадение знаков величин $y''(0) \neq 0$ и $-y'''(0) \neq 0$ [предложение 3].

Пусть некоторое собственное значение $\lambda > 0$ пучка T является кратным. Тогда ему должна соответствовать собственная функция y со свойством $y(0) = 0$, что противоречит сказанному ранее.

Наконец, пусть для некоторого собственного значения $\lambda > 0$ пучка T существует кратный нуль $a \in (0, 1)$ соответствующей собственной функции y. Совпадение знаков величин $y''(a)$ и $y'''(a)$ означает противоречащее граничным условиям (1.3) совпадение знаков величин $y''(1) \neq 0$ и $y'''(1) \neq 0$ [предложение 2]. Различие указанных знаков означает противоречащее граничным условиям (1.3) совпадение знаков величин $y''(0) \neq 0$ и $-y'''(0) \neq 0$ [предложение 3]. □

Предложение 5. *В случае $\alpha > 0$ оператор $[T(0)]^{-1}T'(0)\colon W_2^2[0, 1] \to W_2^2[0, 1]$ не увеличивает числа перемен знака никакой вещественнозначной функции.*

Доказательство. Ввиду непрерывной в смысле равномерной операторной топологии зависимости оператора $[T(0)]^{-1}T'(0)$ от выбора весовой функции $\rho \in W_2^{-1}[0, 1]$, достаточно рассмотреть случай, когда функция ρ непрерывна и равномерно положительна. Иначе говоря, достаточно установить, что независимо от выбора натуральных чисел[2] $n > 0$ и m наличие у удовлетворяющей граничным условиям (1.3) вещественнозначной функции $y \in C^4[0, 1]$ не менее $n + (4 - m)^+$ перемен знака влечет наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. В случае $m = 0$ этот факт немедленно вытекает из теоремы Лагранжа о среднем значении. Общий случай будет сейчас рассмотрен нами на основе индукции по параметру m.

Итак, предположим, что независимо от значения $n > 0$ наличие у произвольной удовлетворяющей граничным условиям (1.3) вещественнозначной функции $y \in C^4[0, 1]$ не менее $n + 1 + (4 - m)^+$ перемен знака заведомо влечет наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. Пусть также некоторая вещественнозначная функция $y \in C^4[0, 1]$ удовлетворяет граничным условиям (1.3) и пусть найдутся $n + 1 + (4 - m)^+$ упорядоченных по возрастанию точек

$$0 < \xi_{0,1} < \ldots < \xi_{0,n+1+(4-m)^+} < 1$$

со свойствами $y(\xi_{0,k}) \cdot y(\xi_{0,k+1}) < 0$, где $k \in \overline{1, n + 1 + (4 - m)^+}$. Согласно теореме Лагранжа найдутся $n + (4 - m)^+$ точек $\xi_{1,k} \in (\xi_{0,k}, \xi_{0,k+1})$ со свойствами $y'(\xi_{1,k}) \cdot y(\xi_{0,k}) < 0$. При этом либо найдется точка $\xi \in (0, \xi_{0,1})$ со свойством $y(\xi) \cdot y(\xi_{0,1}) < 0$, либо $y'(0) \cdot y'(\xi_{1,1}) < |y'(\xi_{1,1})|^2$, либо $y''(0) \cdot y'(\xi_{1,1}) > 0$. Обоснование указанной альтернативы использует фигурирующее среди граничных условий (1.3) выражение величины $y''(0)$

[2] Мы всегда предполагаем, что наименьшим натуральным числом является 0.

через $y(0)$ и $y'(0)$. В первом случае функция y имеет не менее $n+1+(4-m)^+$ перемен знака, что по предположению индукции означает наличие не менее n перемен знака у функции $y^{(4)}$. Во втором и третьем случаях найдется точка $\xi_{2,1} \in (0, \xi_{1,1})$ со свойством $y''(\xi_{2,1}) \cdot y'(\xi_{1,1}) > 0$. Аналогичным образом либо найдется точка $\xi \in (\xi_{0,n+1+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y(\xi) \cdot y(\xi_{0,n+1+(4-m)^+}) < 0$, либо $y'(1) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < |y'(\xi_{1,n+(4-m)^+})|^2$, либо $y''(1) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < 0$. В первом случае функция y имеет не менее $n + 1 + (4 - m)^+$ перемен знака. Во втором и третьем случаях найдется точка $\xi_{2,n+1+(4-m)^+} \in (\xi_{1,n+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) \cdot y'(\xi_{1,n+(4-m)^+}) < 0$.

Объединяя сказанное, получаем, что либо функция $y^{(4)}$ имеет не менее n перемен знака, либо найдутся $n + 1 + (4 - m)^+$ упорядоченных по возрастанию точек

$$0 < \xi_{2,1} < \ldots < \xi_{2,n+1+(4-m)^+} < 1$$

со свойствами $y''(\xi_{2,k}) \cdot y''(\xi_{2,k+1}) < 0$. Во втором случае согласно граничным условиям (1.3) выполняется либо неравенство $y''(0) \cdot y''(\xi_{2,1}) < |y''(\xi_{2,1})|^2$, либо неравенство $y'''(0) \cdot y''(\xi_{2,1}) > 0$. В обоих подслучаях найдется точка $\xi_{3,0} \in (0, \xi_{2,1})$ со свойством $y'''(\xi_{3,0}) \cdot y''(\xi_{2,1}) > 0$. Аналогичным образом выполняется либо неравенство $y''(1) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < |y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+})|^2$, либо неравенство $y'''(1) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < 0$. В обоих подслучаях найдется точка $\xi_{3,n+1+(4-m)^+} \in (\xi_{2,n+1+(4-m)^+}, 1)$ со свойством $y'''(\xi_{3,n+1+(4-m)^+}) \cdot y''(\xi_{2,n+1+(4-m)^+}) < 0$. Соответственно, функция y''' имеет не менее $n + 1 + (4 - m)^+$ перемен знака, что согласно теореме Лагранжа означает наличие не менее $n + (4 - m)^+ \geqslant n$ перемен знака у функции $y^{(4)}$. Шаг индукции тем самым завершен. □

2.3. Имеют место следующие два факта.

Предложение 6. *Пусть вещественнозначная функция $f \in W_2^2[0,1]$ удовлетворяет неравенствам $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$ и имеет на интервале $(0,1)$ ровно n, причем простых, нулей. Тогда существует величина $\varepsilon > 0$, для которой любая вещественнозначная функция $y \in W_2^2[0,1]$ со свойством $\|y - f\|_{W_2^2[0,1]} < \varepsilon$ также имеет на интервале $(0,1)$ ровно n простых нулей.*

Это предложение тривиальным образом вытекает из факта непрерывности естественного вложения $W_2^2[0,1] \hookrightarrow C^1[0,1]$.

Предложение 7. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений пучка* T. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *отвечающая собственному значению* λ_n *собственная функция* y_n *имеет в точности* n *нулей на интервале* $(0,1)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha > 0$. Заметим, что с каждой вещественнозначной функцией вида

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k y_k \tag{2.4}$$

можно связать [предложение 4] функциональную последовательность $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ вида

$$f_m \rightleftharpoons \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_k^m \lambda_n^{-m} y_k.$$

Эта последовательность очевидным образом удовлетворяет равенствам $f_m = \lambda_n \cdot [T(0)]^{-1} T'(0) f_{m+1}$, а ее пределом в пространстве $W_2^2[0,1]$ является [предложение 4] функция $c_n y_n$. Соответственно [предложения 5, 4, 6] при $c_n \neq 0$ число знакоперемен функции f минорирует число нулей функции y_n. Однако ввиду линейной независимости семейства собственных функций пучка T заведомо найдется функция вида (2.4), удовлетворяющая условию $c_n \neq 0$ и имеющая не менее n перемен знака на интервале $(0,1)$. Тем самым функция y_n имеет не менее n нулей.

Далее, зафиксируем нетривиальный вещественнозначный многочлен Q не превышающей n степени, принадлежащий инвариантному подпространству оператора $[T(0)]^{-1} T'(0)$, которое отвечает дополнительной к набору $\{\lambda_k\}_{k=0}^{n-1}$ части спектра. Ввиду бесконечности носителя весовой функции ρ, многочлен Q не может быть элементом ядра оператора $[T(0)]^{-1} T'(0)$. Соответственно, существует номер $N \geqslant n$, для которого функциональная последовательность $\{Q_m\}_{m=0}^{\infty}$ вида

$$Q_m \rightleftharpoons \lambda_N^m \{[T(0)]^{-1} T'(0)\}^m Q$$

сойдется в пространстве $W_2^2[0,1]$ к нетривиальному кратному собственной функции y_N. При этом [предложения 5, 4, 6] число нулей функции y_N не может превосходить числа знакоперемен многочлена Q, а тогда и величину n. Объединяя сказанное, убеждаемся в выполнении равенства $N = n$ и наличии у собственной функции y_n в точности n нулей на интервале $(0,1)$.

Распространение полученных результатов на общий случай $\alpha \geqslant 0$ проводится предельным переходом с учетом предложений 4 и 6. $\square$

§3. Спектральная периодичность и асимптотики собственных значений

3.1. Имеют место следующие два факта.

Предложение 8. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (1.1), (1.3) *при* $\alpha = 0$, $\beta = 2/b$, *а* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *аналогичная последовательность для граничной задачи того же типа при* $\alpha = 0$, $\beta = 2a/b$. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa n} = (\varkappa/a^3)\,\mu_n.$$

Доказательство. Ввиду очевидного выполнения искомого равенства для собственных значений $\lambda_0 = \mu_0 = 0$ достаточно ограничиться рассмотрением случая $n > 0$.

Зафиксируем отвечающую собственному значению $\mu_n > 0$ собственную функцию y, имеющую на интервале $(0,1)$ в точности n различных нулей и не обращающуюся в нуль на границе этого интервала [предложения 7, 4]. Ввиду простоты собственного значения μ_n тождество $P(x) \equiv 1 - P(1-x)$ [1.2] гарантирует, что удовлетворяющая уравнению

$$[y''' - \mu_n P y]' + \mu_n P y' = 0$$

и граничным условиям (1.3) собственная функция y является относительно точки $1/2$ либо четной, либо нечетной. Это наблюдение позволяет построить функцию $z \in C^3[0,1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) При любом выборе индекса $k \in \overline{0, \varkappa - 1}$ функция z_k вида

$$z_k(x) \rightleftharpoons z(k[a+b] + ax)$$

совпадает с функцией y с точностью до знака.

(2) При любом выборе индекса $k \in \overline{1, \varkappa - 1}$ на интервале $(k[a+b] - b, k[a+b])$ выполняется тождество

$$|z(x)| \equiv \left| y(0) + \frac{y''(0)}{2a^2} \cdot (x - k[a+b] + b) \cdot (x - k[a+b]) \right|.$$

Непосредственным вычислением с учетом факта самоподобия функции P устанавливается, что функция z удовлетворяет уравнению

$$[z''' - (\varkappa/a^3)\,\mu_n P z]' + (\varkappa/a^3)\,\mu_n P z = 0.$$

Кроме того, из неравенства $y(0) \cdot y''(0) < 0$ [(1.3), предложение 2] вытекает наличие у функции z в точности $\varkappa n$ нулей на интервале $(0,1)$. Тем самым доказываемое предложение является верным [предложение 7]. $\square$

Предложение 9. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (1.1), (1.3) *при* $\alpha = 12/b^2$, $\beta = 6/b$, *а* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— аналогичная последовательность для граничной задачи того же типа при* $\alpha = 12a^2/b^2$, $\beta = 6a/b$. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1} = (\varkappa/a^3)\,\mu_n.$$

Доказательство. Данное предложение доказывается аналогичным предложению 8 образом с тем основным отличием, что при „сшивке“ копий исходной собственной функции используются не квадратичные, а кубические параболы видов

$$\zeta_k \cdot \left[\frac{y''(0)}{3a^2b} \cdot \left(\zeta_k^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \frac{2y(0)}{b}\right], \tag{3.1}$$

где положено $\zeta_k \rightleftharpoons x - k[a+b] + b/2$. Ввиду заведомого различия знаков величин $y(0)$ и $y''(0)$ [(1.3), предложение 2] каждая из парабол (3.1) имеет на отвечающем ей интервале $(k[a+b]-b, k[a+b])$ единственный нуль. Последнее означает наличие у функции z в точности $\varkappa(n+1)-1$ нулей на интервале $(0,1)$. □

3.2. Имеет место следующий факт.

Предложение 10. *Пусть* $N\colon (0,+\infty) \to \mathbb{N}$ *— считающая функция собственных значений пучка* T. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *справедливо асимптотическое соотношение*

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln\lambda) + o(1)], \tag{3.2}$$

где $D \rightleftharpoons \nu^{-1}\ln\varkappa$, $\nu \rightleftharpoons \ln\varkappa - 3\ln a$, *а* s *—* ν*-периодическая функция, допускающая на периоде* $[0,\nu]$ *представление*

$$s(t) \equiv e^{-Dt}\sigma(t), \tag{3.3}$$

в котором σ *— некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.*

Доказательство. Заметим [(1.4)], что замена значений параметров α и β приводит к возмущению операторов пучка T некоторым оператором не превосходящего 4 ранга. Соответственно, главный член асимптотики считающей функции N не зависит от выбора указанных значений. На протяжении оставшейся части доказательства в качестве основной будет рассматриваться задача вида $\alpha = 0$, $\beta = 2a/b$ с последовательностью собственных значений $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Последовательность собственных значений задачи $\alpha = 0$, $\beta = 2/b$ при этом будет обозначаться через $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Введем в рассмотрение последовательность заданных на отрезке $[0,\nu]$ функций вида $\sigma_k(t) \rightleftharpoons \varkappa^{-k}N(e^{k\nu+t})$. Заметим, что независимо от выбора значений $k,\, n\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,\nu]$ выполнение неравенств

$$\mu_n < e^{k\nu+t} \leqslant \mu_{n+1}$$

влечет [предложение 8, (1.4)] выполнение неравенств

$$\mu_{\varkappa n} \leqslant \lambda_{\varkappa n} < e^{(k+1)\nu+t} \leqslant \lambda_{\varkappa(n+1)} \leqslant \mu_{\varkappa(n+1)+2}.$$

Таким образом, при любых $k\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,\nu]$ выполняется неравенство

$$|\sigma_{k+1}(t)-\sigma_k(t)| \leqslant \varkappa^{-k}, \tag{3.4}$$

автоматически означающее равномерную сходимость последовательности $\{\sigma_k\}_{k=0}^{\infty}$ к некоторой функции σ со свойствами (3.2), (3.3).

Далее, независимо от выбора значений $k,\, n\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,\nu]$ выполнение неравенств

$$\sup(\mu_{\varkappa(n+1)-1},\lambda_{\varkappa n}) < e^{(k+1)\nu+t} \leqslant \mu_{\varkappa(n+1)}$$

влечет выполнение равенства $\sigma_{k+1}(t)=\sigma_k(t)$. При этом путем почти дословного повторения рассуждений из доказательств предложений [1, §5.1.1] и [1, §5.2.1], устанавливается [предложения 8, 9] ограниченность последовательностей частичных сумм рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\ln\mu_{\varkappa(n+1)-1}-\ln\mu_{\varkappa n}|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\ln\lambda_{\varkappa n}-\ln\mu_{\varkappa n}|.$$

Соответственно, последовательность мер множеств вида

$$\{t\in[0,\nu]\colon \sigma_{k+1}(t)\neq\sigma_k(t)\}$$

имеет при $k\to\infty$ асимптотику $o(1)$, что влечет [(3.4)] справедливость асимптотических соотношений

$$\|\sigma_{k+1}-\sigma_k\|_{L_2[0,1]}=o(\varkappa^{-k}),\quad \|\sigma_k-\sigma\|_{L_2[0,1]}=o(\varkappa^{-k}).$$

Поскольку ввиду отмеченной ранее [(3.4)] равномерной по $k\in\mathbb{N}$ ограниченности функций σ_k число точек разрыва этих функций имеет при $k\to\infty$ асимптотику $O(\varkappa^k)$, то для завершения доказательства остается лишь учесть признак сингулярности — предложение 1. $\square$

3.3. Таблицы из настоящего пункта содержат данные, относящиеся к уравнению, весовой функцией в котором выступает обобщенная производная канторовой лестницы. Данные табл. 1 иллюстрируют предложение 8. Данные табл. 2 иллюстрируют предложение 9.

Таблица 1. Оценки первых собственных значений задач $\alpha = 0$, $\beta = 2$ и $\alpha = 0$, $\beta = 6$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$

n	μ_n	$54\mu_n$	λ_n
1	$2,2131 \cdot 10^1 \pm 10^{-3}$	$1,1951 \cdot 10^3 \pm 10^{-1}$	$4,0965 \cdot 10^1 \pm 10^{-3}$
2	$8,1717 \cdot 10^2 \pm 10^{-2}$	$4,4127 \cdot 10^4 \pm 10^0$	$1,1951 \cdot 10^3 \pm 10^{-1}$
3	$3,175 \cdot 10^3 \pm 10^0$	$1,714 \cdot 10^5 \pm 10^2$	$3,867 \cdot 10^3 \pm 10^0$
4	$3,849 \cdot 10^4 \pm 10^1$	$2,078 \cdot 10^6 \pm 10^3$	$4,412 \cdot 10^4 \pm 10^1$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений задач $\alpha = 12$, $\beta = 6$ и $\alpha = 108$, $\beta = 18$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$

n	μ_n	$54\mu_n$	λ_n
0	$8,2987 \cdot 10^0 \pm 10^{-4}$	$4,4813 \cdot 10^2 \pm 10^{-2}$	$4,0965 \cdot 10^1 \pm 10^{-3}$
1	$1,3784 \cdot 10^2 \pm 10^{-2}$	$7,443 \cdot 10^3 \pm 10^0$	$4,4813 \cdot 10^2 \pm 10^{-2}$
2	$1,6311 \cdot 10^3 \pm 10^{-1}$	$8,808 \cdot 10^4 \pm 10^1$	$3,867 \cdot 10^3 \pm 10^0$
3	$4,380 \cdot 10^3 \pm 10^0$	$2,365 \cdot 10^5 \pm 10^2$	$7,443 \cdot 10^3 \pm 10^0$
4	$4,586 \cdot 10^4 \pm 10^1$	$2,476 \cdot 10^6 \pm 10^3$	$6,251 \cdot 10^4 \pm 10^1$
5	$6,465 \cdot 10^4 \pm 10^1$	$3,491 \cdot 10^6 \pm 10^3$	$8,808 \cdot 10^4 \pm 10^1$

Список литературы

[1] Владимиров А. А., Шейпак И. А., *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*, Функц. анал. и его прил. **47** (2013), №4, 18–29.

[2] Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М., *Спектральный анализ дифференциальных операторов. Связь спектральных и осцилляционных свойств*, Приазов. гос. техн. ун-т, Мариуполь, 2001.

[3] Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

[4] Leighton W., Nehari Z., *On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 325–377.

[5] Назаров А. И., *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры*, Зап. науч. семин. ПОМИ **311** (2004), 190–213.

[6] Владимиров А. А., *О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов*, Мат. заметки **75** (2004), №6, 941–943.

[7] Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

ВЦ им. А. А. Дородницына РАН
119333, Москва
ул. Вавилова, 40
Россия
E-mail: vladimi@mech.math.msu.su

Поступило 3 марта 2014 г.