О. Э. Зубелевич, О мажорантном методе в задаче Коши–Ковалевской,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 3, 363–374

Математические заметки

том 69 выпуск 3 март 2001

УДК 517.955

О МАЖОРАНТНОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧЕ КОШИ–КОВАЛЕВСКОЙ

О. Э. Зубелевич

Получена теорема, позволяющая доказывать существование и получать мажорантные оценки решений задачи Коши для системы из счетного числа уравнений в частных производных. Данный результат позволяет также оценивать действительный промежуток времени существования решения.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Мажорантный метод доказательства существования и единственности аналитических решений начальной задачи для линейных уравнений в частных производных впервые был применен О. Коши в 1842 году. В 1874 году с помощью усовершенствованной версии этого метода С. Ковалевская решила задачу Коши в нелинейной постановке. С разными версиями истории теоремы Коши–Ковалевской можно познакомиться по книгам [1], [2].

Поясним суть мажорантного метода на примере скалярной задачи

$$\begin{cases} u_t = f(u, u_z, z, t), \\ u|_{t=0} = u_0(z), \end{cases} \tag{1.1}$$

где функция u_0 аналитична по z в нуле:

$$u_0(z) = \sum_k u_{0k} z^k,$$

функция $f(u, v, z, t)$ аналитична в точке $(u_0, v_0, 0, 0)$:

$$f(u, v, z, t) = \sum_{i,j,m,n} f_{i,j,m,n} (u - u_0)^i (v - v_0)^j z^m t^n,$$

где $u_0 = u_0(0)$ и $v_0 = (u_0)_z(0)$. Будем искать решение задачи (1.1) в виде ряда по степеням z и t:

$$u(t, z) = \sum_{i,j} u_{i,j} z^i t^j. \tag{1.2}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 00-15-99269 и № 99-01-00953.

Подставляя этот ряд в (1.1), мы получим рекуррентную систему алгебраических уравнений, из которой последовательно и однозначно находятся коэффициенты $u_{i,j}$. Для доказательства сходимости ряда (1.2) Ковалевская, пользуясь мажорантными функциями, предложенными Вейерштрассом, построила мажорантную задачу

$$\begin{cases} U_t = F(U, U_z, z, t), \\ U|_{t=0} = U_0(z), \end{cases} \tag{1.3}$$

решение которой $U(t,z)$ находится в явном виде. Здесь $U_0(z) = \sum_k U_{0k} z^k$,

$$F(U,V,z,t) = \sum_{i,j,m,n} F_{i,j,m,n}(U-U_0)^i (V-V_0)^j z^m t^n$$

и $U_0 = U_0(0)$, $V_0 = (U_0)_z(0)$. Функции F и U_0 таковы, что

$$|u_{0k}| \leqslant U_{0k}, \qquad |f_{i,j,m,n}| \leqslant F_{i,j,m,n}.$$

Соответствующий ряд

$$U(t,z) = \sum_{i,j} U_{i,j} t^i z^j \tag{1.4}$$

сходится в некотором бикруге. Сравнивая рекуррентные формулы для коэффициентов $u_{i,j}$ и $U_{i,j}$, убеждаемся, что $|u_{i,j}| \leqslant U_{i,j}$, поэтому ряд (1.2) сходится в том же бикруге.

В силу своей универсальности мажорантная система (1.3) дает лишь очень грубые оценки области сходимости ряда (1.2). Для улучшения этих оценок можно, следуя Пуанкаре, строить каждый раз свою систему (1.3), учитывая специфику задачи (1.1). Если же нужно получить точные оценки действительного промежутка времени существования решения, этот способ не подходит, так как круг в плоскости комплексного времени, в котором сходится решение, может оказаться ограниченным из-за комплексных особенностей, в то время как в действительном направлении решение можно продолжать и дальше. Для этого естественно раскладывать решение задачи (1.1) в ряд лишь по пространственной переменной z с коэффициентами, зависящими от t, и строить мажоранты для такого ряда (мажоранты по пространственной переменной z). Однако это приводит к системе из бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений на эти коэффициенты, которая не является рекуррентной, и поэтому техника доказательства соответствующих утверждений совершенно иная.

Теоремы существования и единственности, освобожденные от требования аналитичности правых частей задачи (1.1) по времени, при различных предположениях получены в работах [3], [4]. Однако указанные результаты по-прежнему локальны по t.

В ряде задач динамики [5], [6] возникает необходимость в доказательствах теорем существования решений для систем из бесконечного числа уравнений в частных производных, а также в получении довольно точных оценок (не вытекающих, в частности, из общих результатов вида [3], [4]) действительных промежутков времени существования решений в конкретных системах. Кроме того, необходимыми оказываются мажорантные оценки этих решений.

Настоящая статья посвящена одному из возможных путей получения таких оценок. В ней обосновывается метод мажорант по пространственным переменным в приложении к системам из счетного числа уравнений в частных производных, правые части которых представляют собой непрерывные отображения пространства аналитических функций в себя.

В более классической постановке (уравнений – конечное число, правые части – аналитические функции по всем своим аргументам, кроме времени) мажорантный метод рассматривался в работе [7].

Отметим, что ниже получена теорема существования, единственность же решения в конкретных задачах может быть доказана, например, с помощью результатов работы [4].

2. Определения. Определим норму $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n)\}$ формулой $\|z\| = \max_k |z_k|$. Через B_R обозначим открытый поликруг в $\mathbb{C}^n$ с радиусом R и центром в нуле:

$$B_R = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < R\}.$$

Через $\mathscr{H}$ обозначим множество голоморфных в B_R функций $u\colon B_R \to \mathbb{C}$. Зададим в $\mathscr{H}$ семейство норм по формуле

$$\|u\|_r = \sup_{z \in B_r} |u(z)|, \qquad 0 < r < R.$$

Пространство $\mathscr{H}$ полунормированное [8]. Топология в нем определяется следующим образом: будем говорить, что последовательность $\{u_k\}$ *сходится к u при $k \to \infty$* (обозначается $u_k \to u$), если $\{u_k\}$ сходится к u по любой норме $\|\cdot\|_r$, $r < R$. Так, например, множество $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}$ компактно, если из любой его бесконечной последовательности можно извлечь сходящуюся по любой норме $\|\cdot\|_r$ подпоследовательность и предел этой подпоследовательности лежит в $\mathscr{K}$.

Ниже используются следующие полунормированные пространства:

пространство

$$\mathscr{H}^N = \{u(z) = (u^{-N}(z), \dots, u^0(z), \dots, u^N(z)) \mid u^k \in \mathscr{H}\}$$

с нормами $\|u\|_r^N = \sum_{|k| \leqslant N} \|u^k\|_r$,
пространство

$$\mathscr{H}^\infty = \{u(z) = \{u^k(z)\}_{k \in \mathbb{Z}} \mid u^k \in \mathscr{H}\}$$

с нормами $\|u\|_r^\infty = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u^k\|_r$,
пространство $\mathscr{C}$ непрерывных отображений отрезка $I = [0, T]$ в $\mathscr{H}$ с нормами $\|u(t,z)\|_{r,c} = \sup_{t \in I} \|u(t,z)\|_r$,
пространство

$$\mathscr{C}^N = \{u(t,z) = (u^{-N}(t,z), \dots, u^0(t,z), \dots, u^N(t,z)) \mid u^k \in \mathscr{C}\}$$

с нормами $\|u\|_{r,c}^N = \sum_{|k| \leqslant N} \|u^k\|_{r,c}$,
пространство

$$\mathscr{C}^\infty = \{u(t,z) = \{u^k(t,z)\}_{k \in \mathbb{Z}} \mid u^k \in \mathscr{C}\}$$

с нормами $\|u\|_{r,c}^\infty = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|u^k\|_{r,c}$, а также банахово пространство над полем действительных чисел $\mathscr{C}_r$ с нормой $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$, состоящее из бесконечномерных векторов $\{u^k(t,z)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где функции $u^k(t,z)$ со значениями в $\mathbb{C}$ непрерывны на множестве $I \times \overline{B}_r$ (чертой обозначено замыкание) и голоморфны в B_r при всех $t \in I$.

Непрерывность отображений, рассматриваемых ниже, понимается в смысле топологии тех пространств, на которых они определены.

Рассмотрим две функции из $\mathscr{C}$:

$$f(t,z)=\sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant 0} f_{i_1,\dots,i_n}(t)z^{i_1}\cdots z^{i_n},\qquad F(t,z)=\sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant 0} F_{i_1,\dots,i_n}(t)z^{i_1}\cdots z^{i_n}.$$

Определение 2.1. Будем говорить, что F *мажорирует* f $(f\ll F)$, если неравенство $|f_{i_1,\dots,i_n}(t)|\leqslant F_{i_1,\dots,i_n}(t)$ справедливо для любого $t\in I$ и любого набора индексов $i_1,\dots,i_n$.

Если $\tilde f=\{f^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\widetilde F=\{F^k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\mathscr{C}^\infty$, то запись $\tilde f\ll\widetilde F$ означает, что $f^k\ll F^k$ для любого $k\in\mathbb{Z}$.

Рассмотрим два отображения $f(u)$ и $F(u)$ пространства $\mathscr{C}^\infty$ в себя. Будем говорить, что F *мажорирует* f $(f\ll F)$, если для любых $v,V\in\mathscr{C}^\infty$ таких, что $v\ll V$, верно отношение $f(v)\ll F(V)$.

Заметим, что если $f\ll F$, то $\|f\|_r\leqslant\|F\|_r$ для любого $r<R$.

3. Основные результаты. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t=f(u),\\ u|_{t=0}=u_0(z),\end{cases}\tag{3.1}$$

где $u_0\in\mathscr{H}^\infty$, а отображение $f\colon\mathscr{C}^\infty\to\mathscr{C}^\infty$ непрерывно. В частности, f может быть непрерывной функцией от производных $u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}$.

Пусть непрерывное отображение $F\colon\mathscr{C}^\infty\to\mathscr{C}^\infty$ мажорирует f: $f\ll F$, и существует функция $U(t,z)\in\mathscr{C}^\infty$, удовлетворяющая следующим отношениям:

$$\begin{aligned} &U(0,z)\gg u_0(z),\\ &U(t,z)\gg U(0,z)+\int_0^t F(U)\,ds\qquad \text{при } t\in I.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Функцию U будем называть *мажорантной функцией* для задачи (3.1). В частности, если функция U является решением задачи Коши

$$U_t=F(U),\qquad U|_{t=0}=U_0(z)\gg u_0(z),\tag{3.3}$$

то она удовлетворяет отношениям (3.2), причем в формулах (3.3) вместо знака “=” может стоять знак “$\gg$”.

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned} W=\{&w(t,z)\in\mathscr{C}^\infty\mid w\ll U,\\ &\|w(t',z)-w(t'',z)\|_r^\infty\leqslant\|F(U)\|_{r,c}^\infty\cdot|t'-t''|,\qquad t',t''\in I\}.\end{aligned}$$

Теорема 1. *Если задача* (3.1) *допускает мажорантную функцию, то она имеет решение* $u(t,z)\in W$.

Рассмотрим отображение $P\colon\mathscr{C}^\infty\to\mathscr{C}^\infty$, заданное формулой

$$P(u)=u_0(z)+\int_0^t f(u)\,ds.\tag{3.4}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и множество* $D \subseteq W$ *замкнуто в* $\mathscr{C}^\infty$ *и выпукло в* $\mathscr{C}_r$. *Тогда если* $P(D) \subseteq D$, *то задача* (3.1) *имеет решение* $v(t,z) \in D$.

Для приложений полезно следующее

Предложение 3.1. *Множество* W *замкнуто в* $\mathscr{C}^\infty$ *и выпукло в* $\mathscr{C}_r$.

4. Приложения. В качестве примера мы рассмотрим дифференциальные уравнения, возникающие при решении задачи о вложении диффеоморфизма в поток с помощью метода непрерывного усреднения. Подробное изложение этой теории и полные доказательства содержатся в [5].

4.1. *Метод непрерывного усреднения.* Пусть рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = \hat{a}(t,z), \qquad z \in M^m,$$

где M^m – гладкое n-мерное многообразие. Мы ищем зависящую от времени замену переменных

$$z \mapsto Z \tag{4.1}$$

так, чтобы в переменных Z векторное поле $\hat{a}$ записывалось в более удобном виде $a(t,Z)$. Предлагается искать замену (4.1) среди преобразований многообразия M^m, принадлежащих фазовому потоку $\{g_b^\delta(z)\}$ некоторой другой системы

$$\frac{dz}{d\delta} = b(\delta,t,z).$$

Таким образом, a оказывается явно зависящим от δ. Векторное поле b определяется полем a и характером рассматриваемой задачи. Аналитически это можно выразить так: $b = \xi a$, где ξ – некоторый оператор на пространстве векторных полей. Легко показать, что векторное поле a должно быть решением задачи Коши

$$a_\delta = (\xi a)_t - [\xi a, a], \qquad a|_{\delta=0} = \hat{a}. \tag{4.2}$$

Через $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$, как обычно, обозначен коммутатор.

Ниже мы будем считать многообразие M^m компактным и вещественно-аналитическим, все векторные поля на нем – вещественно-аналитическими по z, гладкими и 2π-периодичными по t. Оператор ξ строится следующим образом. Разложим поле $a(t,z,\delta)$ в ряд Фурье:

$$a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^k(z,\delta)e^{ikt}. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\xi a = i\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(k) a^k(z,\delta)e^{ikt}. \tag{4.4}$$

4.2. *Задача о вложении диффеоморфизма в поток.* Пусть $T\colon M^m \to M^m$ – вещественно-аналитический диффеоморфизм компактного многообразия M^m. Возникает вопрос: можно ли построить динамическую систему с вещественно-аналитическим по z и t и 2π-периодическим по t векторным полем $a(t,z)$, для которой диффеоморфизм T являлся бы отображением за период. Ответ на этот вопрос оказывается положительным при условии, что диффеоморфизм T изотопен тождественному, т.е. существует вещественно-аналитический диффеоморфизм T_t, непрерывно зависящий от параметра t, такой, что

$$T_0 = \mathrm{id}_{M^m}, \qquad T_{2\pi} = T.$$

Доказывается эта теорема следующим образом (приводимый здесь анализ сообщил автору Д.В. Трещев). Можно показать, что изотопия T_t может быть выбрана класса C^3 по t, и построить динамическую систему с векторным полем $\hat a(t,z)$, фазовый поток которой совпадает с T_t. Поле $\hat a(t,z)$ можно выбрать 2π-периодичным и C^2-гладким по t, а также вещественно-аналитическим по z (подробности см. в [5]). С помощью метода непрерывного усреднения строится вещественно-аналитическая замена переменных (4.1) такая, что в новых координатах поле $\hat a(t,z)$ приобретает вид $a(t,Z,\delta)$, $\delta > 0$, где a – вещественно-аналитично по t и Z.

Далее в этом пункте мы докажем аналитичность векторного поля $a(t,Z,\delta)$, а затем обсудим вопрос о возможности вложения диффеоморфизма, принадлежащего некоторой группе Ли, в поток, порожденный векторным полем из соответствующей алгебры Ли.

Подставляя формулы (4.3), (4.4) в (4.2) и делая замену $a^k = v^k e^{-|k|\delta}$, получаем следующую систему:

$$v^k_\delta = i\,\mathrm{sign}(k)[v^0, v^k] - 2i\sum_{l,n}[v^l, v^n]e^{-(|l|+|n|)\delta}, \tag{4.5}$$

$$v^k(z,0) \ll \frac{A}{(|k|+1)^2(B-\zeta)}\mathbf{1}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Здесь $v^k(\delta,z)$ – m-мерное векторное поле, $z=(z_1,\dots,z_m)$, через $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ обозначен коммутатор, в котором дифференцирование производится по переменным z_j,

$$\zeta = z_1+\dots+z_m, \qquad \mathbf{1} = (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^m,$$

A, B – некоторые положительные константы. Суммирование производится по целым числам l,n таким, что $l+n=k$, $l>0$, $n<0$. Формула (4.6) вытекает из общих теорем об оценках коэффициентов Фурье конечно-гладких функций (см., например, [9]).

Лемма 4.1. *Существуют такие положительные постоянные A, B, C, что для любого $\delta\in[0,B^2/(4AC))$ решение задачи Коши* (4.5), (4.6) *существует и удовлетворяет отношениям*

$$v^k(z,\delta) \ll \frac{G(\zeta,\delta)}{(|k|+1)^2},$$

где

$$G(\zeta,\delta) = \frac{2A}{B-\zeta+\sqrt{(B-\zeta)^2-4AC\delta}}. \tag{4.7}$$

Предложение 4.1. *Имеем* $v^k(z,\delta) \ll w^k(\zeta,\delta)\mathbf{1}$, *где* w^k – *скалярные функции, удовлетворяющие системе*

$$w^k_\delta = m(w^0w^k)_\zeta + 2m\sum_{l,n}(w^lw^n)_\zeta, \tag{4.8}$$

$$w^k(\zeta,0) = \frac{A}{(|k|+1)^2(B-\zeta)}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

Доказательство этого предложения вытекает из того, что начальные значения (4.9) и правые части системы (4.8) мажорируют соответственно начальные значения (4.6) и правые части системы (4.5).

Предложение 4.2. *Имеем* $w^k(\zeta,\delta) \ll \boldsymbol{w}^k(\zeta,\delta) \equiv G(\zeta,\delta)/(|k|+1)^2$, *где*

$$G_\delta = CGG_\zeta, \qquad G(\zeta,0) = \frac{A}{B-\zeta}, \qquad C = 2m\left(\frac{\pi^2}{3}-1\right).$$

Замечание 4.1. Решая явно уравнение на G, получаем формулу (4.7). Таким образом, лемма 4.1 вытекает из предложений 4.1 и 4.2.

Доказательство предложения 4.2. Так как $\boldsymbol{w}^k(\zeta,0) = w^k(\zeta,0)$, то по теореме 1 нам достаточно проверить, что для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$\boldsymbol{w}^k_\delta \gg m(\boldsymbol{w}^0\boldsymbol{w}^k)_\zeta + 2m\sum_{l+n=k,l>0,n<0}(\boldsymbol{w}^l\boldsymbol{w}^n)_\zeta. \tag{4.10}$$

Правая часть этого выражения равна

$$\frac{2m}{(|k|+1)^2}GG_\zeta + 4mGG_\zeta\sum_{l+n=k,l>0,n<0}\frac{1}{(|l|+1)^2(|n|+1)^2}.$$

Последняя сумма не превосходит

$$\frac{1}{(|k|+1)^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(|j|+1)^2} = \frac{1}{(|k|+1)^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right),$$

и мы получаем, что правая часть (4.10) не превосходит ($\ll$)

$$\frac{C}{(|k|+1)^2}GG_\zeta = \boldsymbol{w}^k_\delta.$$

Предложение 4.2 доказано.

Рассмотрим некоторые варианты задачи о вложении диффеоморфизма в поток. Приведенные ниже теоремы уточняют формулировки соответствующих результатов из [5].

Пусть $M^m_{\mathbb{C}}$ – комплексная окрестность многообразия M^m. На множестве голоморфных на $M^m_{\mathbb{C}}$ функций со значениями в $\mathbb{C}$ зададим семейство норм по формуле

$$\|f\|_K = \max_{z\in K}|f(z)|,$$

где $K \subset M^m_{\mathbb{C}}$ – произвольный компакт.

Пусть $\mathscr{L}$ – алгебра Ли аналитических векторных полей на $M^m_{\mathbb{C}}$ (роль умножения играет операция коммутирования). Введем в $\mathscr{L}$ семейство норм следующим образом. Если $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathscr{L}$, то

$$\|v\|_K = \max_j \|v_j\|_K. \tag{4.11}$$

Следует отметить, что такие нормы не инвариантны относительно замен координат на $M^m_{\mathbb{C}}$, поэтому будем считать, что система координат фиксирована.

Назовем подалгебру $L \subseteq \mathscr{L}$ *замкнутой*, если из того, что последовательность $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L$ сходится в смысле любой из норм (4.11), следует, что предел этой последовательности принадлежит L. Свойство подалгебры быть замкнутой не зависит от выбора системы координат.

Теорема 3. *Пусть подалгебра $L \subseteq \mathscr{L}$ замкнута. Тогда если поле $\hat{a}(t,z) \in L$ при любом t, $\hat{a}(t,z)$ дважды дифференцируемо по t, то задача* (4.2) *имеет решение $a(t,z,\delta) \in L$, которое является вещественно-аналитичным и 2π-периодичным по t при $\delta > 0$.*

Как и выше, мы рассмотрим решение задачи (4.5), (4.6) лишь в окрестности произвольной точки многообразия M^m, локальные координаты которой можно считать нулевыми.

Через $\widehat{L}$ обозначим множество последовательностей

$$\{v^k(\delta,z)\}_{k\in\mathbb{Z}}, \qquad v^k(\delta,z) \in L.$$

Зависимость векторных полей v^k от δ считается произвольной.

Легко показать, что все коэффициенты Фурье разложения векторного поля $\hat{a}(t,z)$ по t лежат в L. Остается применить теорему 2 к задаче (4.5), (4.6). Здесь множество W определено леммой 4.1,

$$P^k(\{v^j\}) = v^k(0,z) + \int_0^\delta i\,\mathrm{sign}(k)[v^0, v^k] - 2i \sum_{l,n} [v^l, v^n] e^{-(|l|+|n|)s}\, ds,$$

где $l + n = k$, $l > 0$, $n < 0$, а $D = W \cap \widehat{L}$.

Рассмотрим еще один пример применения теоремы 2. Пусть g – аналитический диффеоморфизм многообразия M^m, продолжаемый до аналитического отображения $M^m_{\mathbb{C}}$ в себя. Будем говорить, что векторное поле $u(t,z) \in \mathscr{L}$ g-обратимо, если выполнено равенство

$$u(t,z) = -(dg(z))^{-1} u(-t, g(z)). \tag{4.12}$$

Множество g-обратимых векторных полей обозначим через R_g.

Теорема 4. *Если поле $\hat{a}(t,z) \in R_g$ при любом t и дважды дифференцируемо по t, то задача* (4.2) *имеет решение $a(t,z,\delta) \in R_g$, которое является вещественно-аналитичным и 2π-периодичным по t при $\delta > 0$.*

Через $\widehat{R}_g$ обозначим множество последовательностей

$$\{u^k(\delta,z)\}, \quad u^k(\delta,z) \in \mathscr{L}$$

(зависимость векторных полей от δ считается произвольной), удовлетворяющих цепочке уравнений

$$u^k(\delta,z) + (dg(z))^{-1} u^{-k}(\delta, g(z)) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

которая получается, если разложить в ряд Фурье левую и правую части формулы (4.12). Как и выше, $D = W \cap \widehat{R}_g$.

5. Доказательство теорем 1, 2. Множество W не пусто, так как ему принадлежит вектор, целиком состоящий из нулей.

Ниже используются следующие вложения: $\mathscr{H}^N \subset \mathscr{C}^N \subset \mathscr{C}^\infty \subset \mathscr{C}_r$. Первое вложение получается, если элементы множества $\mathscr{H}^N$ формально считать зависящими от t, второе – если доопределить каждый элемент множества $\mathscr{C}^N$ нулями до бесконечного вектора:

$$\mathscr{C}^N \ni (u^{-N}, \dots, u^0, \dots, u^N) \mapsto (\dots, 0, u^{-N}, \dots, u^0, \dots, u^N, 0, \dots) \in \mathscr{C}^\infty.$$

Лемма 5.1. *Если $u(t,z) \in \mathscr{C}$, то $u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}(t,z) \in \mathscr{C}$.*

Действительно, непрерывность по t функции $u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}$ в точке $t_0 \in I$ вытекает из оценки Коши

$$\|u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}(t_0,z) - u_{z_{k_1}^{j_1},\dots,z_{k_s}^{j_s}}(t,z)\|_r \leqslant \left(\frac{K}{\sigma}\right)^{j_1+\dots+j_s} \|u(t_0,z) - u(t,z)\|_{r+\sigma}.$$

Ниже, для краткости, мы не всегда будем явно указывать аргументы функций.

Обозначим

$$V = \{u(t,z) \in \mathscr{C} \mid u \ll S \in \mathscr{C}\}.$$

Лемма 5.2. *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_{r,c}$, то предельная функция $u \in V$ и указанная последовательность сходится к u в смысле любой нормы $\|\cdot\|_{r',c}$, $r' < R$.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция u голоморфна в B_r и непрерывна в $\overline{B}_r$ при любом $t \in I$. Обозначим

$$u_k(t,z) = \sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant 0} u_{ki_1,\dots,i_n}(t) z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}, \qquad u(t,z) = \sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant 0} u_{i_1,\dots,i_n}(t) z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n},$$
$$S(t,z) = \sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant 0} S_{i_1,\dots,i_n}(t) z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}.$$

Функции $u_{ki_1,\dots,i_n}(t)$ непрерывны на отрезке I по лемме 5.1.

В силу оценок Коши

$$\sup_{t\in I} |u_{ki_1,\dots,i_n}(t) - u_{i_1,\dots,i_n}(t)| \leqslant i_1!\cdots i_n! \left(\frac{K}{r}\right)^{i_1+\dots+i_n} \|u_k - u\|_{r,c}$$

последовательности соответствующих коэффициентов в рядах Тейлора сходятся равномерно по t на отрезке I:

$$u_{ki_1,\dots,i_n}(t) \to u_{i_1,\dots,i_n}(t) \quad \text{при } k \to \infty. \tag{5.1}$$

Из этого следует, что функции $u_{i_1,\dots,i_n}(t)$ непрерывны и при всех $t \in I$ справедливы неравенства $|u_{i_1,\dots,i_n}(t)| \leqslant S_{i_1,\dots,i_n}(t)$, поэтому $u \in V$.

Покажем, что u_k сходится к u в смысле нормы $\|\cdot\|_{r',c}$. Выберем p так, что

$$\Bigg\| \sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant p+1} u_{i_1,\dots,i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \Bigg\|_{r',c} + \Bigg\| \sum_{i_1,\dots,i_n\geqslant p+1} u_{ki_1,\dots,i_n} z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n} \Bigg\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно, так как $u_k, u \in V$. Выберем N так, что при $k > N$ верна оценка

$$\left\| \sum_{i_1,\dots,i_n \leqslant p} u_{i_1,\dots,i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} - \sum_{i_1,\dots,i_n \leqslant p} u_{k i_1,\dots,i_n} z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \right\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это возможно в силу (5.1). Отсюда при $k > N$ имеем $\|u_k - u\|_{r',c} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Лемма доказана.

Лемма 5.2 легко обобщается на пространство

$$T = \{u(t,z) \in \mathscr{C}^\infty \mid u \ll U \in \mathscr{C}^\infty\}.$$

Отметим, что $W \subseteq T$.

Лемма 5.3. *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq T$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_{r,c}^\infty$, то предельная функция $u \in T$ и указанная последовательность сходится к u в смысле любой нормы $\|\cdot\|_{r',c}^\infty$, $r' < R$.*

Доказательство. Пусть

$$u_k = \{u_k^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad u = \{u^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad U = \{U^n(t,z)\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

По условию леммы последовательность $\{u_k^n\}$ сходится к u^n по норме $\|\cdot\|_{r,c}$; следовательно, по лемме 5.2 $u^n \in \mathscr{C}$, $u^n \ll U^n$, поэтому $u \in T$ и последовательность $\{u_k^n\}$ сходится к u^n по любой норме $\|\cdot\|_{r',c}$, $r' < R$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N, зависящий от ε и от r', такой, что при $k > N$ выполнено неравенство $\|u_k - u\|_{r',c}^\infty < \varepsilon$. Действительно, в силу того, что $u_k, u \in T$, существует такой номер m, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\sum_{|n|>m} \|u_k^n\|_{r',c} + \sum_{|n|>m} \|u^n\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем номер N так, чтобы при $k > N$ выполнялось неравенство

$$\sum_{|n|\leqslant m} \|u_k^n - u^n\|_{r',c} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Утверждение леммы вытекает из последних двух неравенств.

Лемма доказана.

С помощью леммы 5.3 получается

Лемма 5.4. *Множество W замкнуто в $\mathscr{C}^\infty$.*

Отметим еще одно утверждение, которое следует из леммы 5.3, если в качестве функции U взять элемент пространства $\mathscr{H}^N$. Пусть

$$Q = \{u(z) \in \mathscr{H}^N \mid u \ll G \in \mathscr{H}^N\}.$$

Лемма 5.5. *Если последовательность $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ сходится в смысле нормы $\|\cdot\|_r^N$, то предельная функция $u \in Q$ и указанная последовательность сходится к u в смысле любой нормы $\|\cdot\|_{r'}^N$, $r' < R$.*

Лемма 5.6. *Пусть $f\colon T \to T$ – непрерывное (в смысле топологии полунормированных пространств) отображение. Тогда отображение f непрерывно по любой норме $\|\cdot\|_{r,c}^{\infty}$.*

Доказательство. Пусть $u_n \to u$ при $n \to \infty$ по норме $\|\cdot\|_{r,c}^{\infty}$. Из леммы 5.3 следует, что $u_n \to u$ по любой норме $\|\cdot\|_{r',c}^{\infty}$, $r' < R$. Поэтому $f(u_n) \to f(u)$ по любой норме $\|\cdot\|_{\rho,c}^{\infty}$ $(\rho < R)$, в частности, по норме $\|\cdot\|_{r,c}^{\infty}$.

Лемма доказана.

Лемма 5.7. *Множество W выпукло и компактно в $\mathscr{C}_r$, $r < R$.*

Доказательство. Выпуклость множества W проверяется прямым вычислением.

Проверим, что проекция W_n множества W в пространство $\mathscr{C}^n$ компактна. Проекция задается отображением

$$\{w^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto (w^{-n}, \dots, w^n).$$

Действительно, множество W_n равностепенно непрерывно: для любых $r < R$ и $\varepsilon > 0$ существует δ, зависящее от r и ε, такое, что если $|t' - t''| < \delta$, то

$$\sup_{y\in W_n} \|y(t', z) - y(t'', z)\|_r^n < \varepsilon.$$

Это следует непосредственно из определения множества W. Можно считать, что $\delta = \varepsilon/\|F(U)\|_{r,c}^{\infty}$.

Замыкание множества $W_n(t) = \{x(t,z) \in W_n\} \subseteq \mathscr{H}^n$ ограничено (множество $V \subseteq \mathscr{H}^n$ называется *ограниченным*, если $\sup_{v\in V} \|v\|_r^n \leqslant L_r$, где L_r – некоторые константы) при всех $t \in I$ по лемме 5.5, так как все элементы множества $W_n(t)$ мажорируются вектором $(U^{-n}(t,z), \dots, U^n(t,z))$. Следовательно, по теореме Монтеля (см. п. 6) множества $\overline{W}_n(t)$ (чертой обозначено замыкание) компактны при всех $t \in I$. По теореме Асколи (см. п. 6) множество $\overline{W}_n$ компактно в $\mathscr{C}^n$.

Множество W_n вложено в W: каждый вектор из W_n доопределяется нулями до бесконечного вектора, который принадлежит W. Используя этот факт и лемму 5.4, получаем, что множество W_n замкнуто: $\overline{W}_n = W_n$ и, следовательно, в соответствии с доказанным выше компактно.

Из определения множества W следует, что для любого $\varepsilon > 0$ множество W_n является ε-сетью в W при некотором n. То есть для любого $r < R$ и $\varepsilon > 0$ найдется число n такое, что при всех $w \in W$ выполнено неравенство $\|w_n - w\|_{r,c}^{\infty} < \varepsilon$, где $w_n \in W_n$ является проекцией элемента w.

Заметим, что из компактности какого-либо множества в $\mathscr{C}^n$ вытекает его компактность в $\mathscr{C}_r$, поэтому множество W_n компактно в $\mathscr{C}_r$. Таким образом, множество W_n является компактной ε-сетью в W в смысле пространства $\mathscr{C}_r$, поэтому W компактно [10].

Лемма доказана.

Докажем теорему 1. Проверим, что $P(W) \subseteq W$ (см. (3.4)). Действительно, пусть $w \in W$. Тогда из определения мажорантной функции имеем $P(w) \ll U$. Обозначим $b(t,z) = P(w)$ и выполним оценку

$$\|b(t', z) - b(t'', z)\|_r^{\infty} = \left\| \int_{t''}^{t'} f(w)\, ds \right\|_r^{\infty} \leqslant \|F(U)\|_{r,c}^{\infty} \cdot |t' - t''|.$$

Отображение P непрерывно на W в смысле пространства $\mathscr{C}_r$ по лемме 5.6. По теореме Шаудера (см. п. 6) и лемме 5.7 отображение P имеет неподвижную точку в W. Эта неподвижная точка является искомым решением задачи (3.1).

Теорема 1 доказана.

Докажем теорему 2. Проверим, что множество D замкнуто в $\mathscr{C}_r$. Действительно, пусть последовательность $\{u_k\} \subset D$ сходится в $\mathscr{C}_r$ при $k \to \infty$, значит, по лемме 5.3 она сходится и в $\mathscr{C}^\infty$. Так как D замкнуто в $\mathscr{C}^\infty$, то предел этой последовательности лежит в D.

Множество D компактно в $\mathscr{C}_r$ как замкнутое подмножество компакта W. Доказательство завершается применением теоремы Шаудера к отображению P и множеству D.

Теорема 2 доказана.

6. Дополнение. В применении к рассматриваемым задачам использованные в доказательстве леммы 5.7 теоремы можно сформулировать следующим образом. (Подробное обсуждение этих результатов содержится в [8].)

Теорема 5 (Монтель). *Если множество $V \subseteq \mathscr{H}^N$ замкнуто и ограничено, то оно компактно.*

Теорема 6 (Асколи). *Если множество $V \subseteq \mathscr{C}^N$ равностепенно непрерывно и замыкание множества $V(t) = \{u(t,z) \in V\} \subseteq \mathscr{H}^N$ компактно при любом $t \in I$, то замыкание множества V компактно.*

Теорема 7 (Шаудер). *Непрерывное отображение выпуклого компактного подмножества банахова пространства в себя имеет неподвижную точку.*

Автор глубоко признателен Д.В. Трещеву за полезные обсуждения в течение всего периода работы над статьей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Т. 1. М.: Наука, 1989.
[2] Кочина П.Я. Софья Васильевна Ковалевская. М.: Наука, 1981.
[3] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
[4] Safonov M.V. The abstract Cauchy–Kovalevskaya theorem in a weighted Banach space // Comm. Pure Appl. Math. 1995. V. 48. P. 629–643.
[5] Трещев Д.В. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.: Фазис, 1998.
[6] Pronin A., Treschev D. Continuous averaging in multi-freqncy slow-fast systems // Regular and Chaotic Dynamics. 2000. V. 5. №2. P. 157–170.
[7] Леднев Н.А. Новый метод решения дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. сб. 1948. Т. 22(64). С. 205–259.
[8] Шварц Л. Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.
[9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз, 1960.
[10] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 5. М.: ГИФМЛ, 1959.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило
05.10.2000