А. Ф. Соловьев, Кривизна гиперраспределения и контактные метрические многообразия,
*Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 3, 450–462

https://www.mathnet.ru/mzm5557

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 3 (1985)


# КРИВИЗНА ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ


**А. Ф. Соловьев**


Контактные метрические многообразия изучались многими авторами. Однако основному объекту, связанному с таким многообразием,— его контактному распределению — было уделено мало внимания. Причина этого кроется в недостаточном развитии римановой геометрии распределений. В данной работе кривизна контактного метрического многообразия рассматривается с точки зрения кривизны его контактного распределения (о понятии кривизны распределения см. [1]).

Основные результаты данной работы о контактных распределениях постоянной $\varphi$-секционной кривизны на многообразиях Сасаки содержатся в § 6. В предыдущих же параграфах излагаются необходимые сведения о гиперраспределениях на римановых многообразиях (§§ 1—4) и о контактных метрических многообразиях (§ 5).

**1. Отображения Вейнгартена и неголономности.** Пусть риманово многообразие $(M, \langle,\rangle)$ допускает гиперраспределение $\Delta$, ортогональное единичному векторному полю $\xi$ (все рассматриваемые дифференцируемые объекты предполагаются гладкими). Пусть $V$ и $V^{\perp}$ — ортогональные проекторы на $\Delta$ и на его ортогональное дополнение $\Delta^{\perp}$, $\mathfrak{X}(M)$ — множество гладких векторных полей на $M$ и $\Gamma(\Delta)$ — множество гладких векторных полей, принадлежащих $\Delta$.

Определим на $M$ тензорное поле $L$ типа (1, 1), полагая

$$LA = -\nabla_A \xi,\ A \in \mathfrak{X}(M),$$

где $\nabla$ — связность Леви-Чивиты, и обозначим через $L^+$ и $L^-$ его симметричную и кососимметричную части. Пусть $l^\pm = V \circ L^\pm \circ V$.

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $l^+ = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta$ *вполне геодезично;*

2) $L^+ = 0$ *в том и только в том случае, когда векторное поле* $\xi$ *киллингово;*

3) *условие* $l^- = 0$ *равносильно интегрируемости* $\Delta$.

Доказательство. Вторая фундаментальная форма [2] $h$ гиперраспределения $\Delta$ равна

$$h(A, B) = -\langle B, \xi\rangle LA + \langle LA, B\rangle \xi,\ A, B \in \mathfrak{X}(M). \quad (1)$$

Поэтому для любых $X, Y \in \Gamma(\Delta)$ имеем $h(X, Y) = \langle LX, Y\rangle \xi$, и предложение 2 из [2] дает утверждения 1) и 3). Далее, значение производной Ли поля метрического тензора $\langle,\rangle$ вдоль $\xi$ для любых $A, B \in \mathfrak{X}(M)$ равно $\xi\langle A, B\rangle - \langle[\xi, A], B\rangle - \langle A, [\xi, B]\rangle = -2\langle L^+A, B\rangle$, что доказывает утверждение 2). Предложение доказано.

Назовем линейные отображения $\overset{+}{l_p}, \overset{-}{l_p}\colon \Delta_p \to \Delta_p$ *отображениями Вейнгартена* и *неголономности* гиперраспределения $\Delta$ в точке $p$ (по отношению к единичной нормали $\xi_p$). Термин «отображение Вейнгартена» объясняется тем фактом, что $\overset{+}{l_p}$ совпадает с отображением Вейнгартена соприкасающейся геодезической гиперповерхности [1] $\delta(p)$ этого гиперраспределения в точке соприкосновения $p$ [1]).

ЛЕММА 1. *Если* $L\xi = 0$, *то* $\overline{\nabla}_\xi l^- = l^+ \circ l^- + l^- \circ l^+$.

Доказательство. Рассмотрим 1-форму $\eta$ на $M$ такую, что $\eta(A) = \langle A, \xi\rangle$, $A \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда

$$d\eta(A, B) = \langle A, L^-B\rangle,\ A,\ B \in \mathfrak{X}(M). \quad (2)$$

Так как $d^2\eta = 0$, то $\mathfrak{S}\langle(\nabla_A L^-)B, C\rangle = 0$, где $\mathfrak{S}$ — знак циклической суммы по $A, B, C \in \mathfrak{X}(M)$. Полагая здесь $A = \xi$, получаем $\nabla_\xi l^- = l^+ \circ l^- + l^- \circ l^+$, поскольку $L^\pm = l^\pm$ в случае $L\xi = 0$. Остается заметить, что $\overline{\nabla}_\xi l^- = \nabla_\xi l^-$. Лемма доказана.

---

[1]) $\delta(p) = \overline{\exp}(U \cap \Delta_p)$, где $U$ — область определения экспоненциального отображения $\overline{\exp}$ связности $\overline{\nabla} = \nabla - h$ и $h$ задано равенством (1).

Единичное векторное поле $\xi$, для которого $L\xi = 0$, назовем *геодезическим*, поскольку его интегральные кривые суть геодезические линии риманова многообразия $M$.

**2. Кручение.** Рассмотрим *секционное кручение* [1]

$$t_{xy} = \| T(x, y) \|^2 \| x \wedge y \|^{-2}, \qquad x \wedge y \subset \Delta_p$$

гиперраспределения $\Delta$ в точке $p$ (здесь $T$ — тензор кручения связности $\overline{\nabla} = \nabla - h$). Сумма $\varkappa_x = \sum_a t_{xe_a}$ не зависит от выбора касательных векторов $e_a$, образующих вместе с $x$ ортогональный базис подпространства $\Delta_p \subset \subset M_p$. Назовем $\varkappa_x$ *кручением гиперраспределения* $\Delta$ *в* (*одномерном*) *направлении* $x$. Так как $T(x, y) = 2 \langle x, l^- y \rangle \xi_p$ для любых $x, y \in \Delta_p$, то

$$\varkappa_x = 4 \| l^- x \|^2 \| x \|^{-2}, \ x \in \Delta_p.$$

Будем говорить, что $\Delta$ имеет *постоянное кручение*, если $\varkappa_x$ постоянно в каждой точке $p \in M$ и не зависит от этой точки. Ортогональное единичному геодезическому векторному полю $\xi$ гиперраспределение $\Delta$ имеет постоянное кручение $a$ тогда и только тогда, когда

$$(l^-)^2 = -(a/4) V, \ a = \mathrm{const}. \tag{3}$$

Если $a = 0$, то $l^- = 0$ и $\Delta$ интегрируемо согласно предложению 1. Если же $a \neq 0$, то $a > 0$, $\operatorname{rang} l^- = \dim M - 1$ и, следовательно, размерность $M$ нечетная. Гиперраспределение, характеризующееся условиями (3), где $a \neq 0$, обозначим через $\Delta(a)$.

Предложение 2. *Отображения Вейнгартена и неголономности любого гиперраспределения* $\Delta(a)$ *обладают следующими свойствами*:

$$l^+ \circ l^- + l^- \circ l^+ = 0, \ \operatorname{trace} l^+ = 0, \ \overline{\nabla}_\xi l^- = 0.$$

Доказательство. В силу (3) имеем

$$(\overline{\nabla}_\xi l^-) \circ l^- = -l^- \circ (\overline{\nabla}_\xi l^-).$$

Поэтому с помощью леммы 1 получаем

$$0 = (\overline{\nabla}_\xi l^-) l^- A + l^- (\overline{\nabla}_\xi l^-) A = 2 l^- (l^+ \circ l^- + l^- \circ l^+) A$$

для любого $A \in \mathfrak{X}(M)$. Следовательно, $l^+ \circ l^- + l^- \circ l^+ = 0$, так как $l^- X \neq 0$ для произвольного ненулевого $X \in \Gamma(\Delta(a))$ и $V^\perp \circ l^\pm = 0$. Далее, поскольку $l^+ \circ l^- = -l^- \circ l^+$, то для каждого собственного направления $X$ аффинора $l^+$ направление $l^- X$ также является его собственным, причем соответствующие собственные значения отличаются лишь знаком. Поэтому $\operatorname{trace} l^{+} = 0$. Равенство $\overline{\nabla}_{\xi} l^{-} = 0$ получаем из леммы 1. Предложение доказано.

Гиперраспределение, для которого $\operatorname{trace} l^{+} = 0$, естественно назвать *минимальным*, так как оно характеризуется тем, что для любой точки $p \in M$ его соприкасающаяся геодезическая гиперповерхность $\delta(p)$ минимальна в точке соприкосновения.

**3. Уравнения Гаусса и Кодацци.** Пусть $A, B \in \mathfrak{X}(M)$. Определим на $M$ тензорное поле $A \wedge B$ типа (1, 1), полагая $(A \wedge B) C = \langle B, C\rangle A - \langle A, C\rangle B$ для любого $C \in \mathfrak{X}(M)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $R$ — тензор кривизны риманова многообразия $M$, $\overline{R}$ — тензор кривизны индуцированной связности $\overline{\nabla} = \nabla - h$ гиперраспределения $\Delta \perp \xi$ на $M$. Имеют место тождества*:

$$V \circ R(A, B) \circ V = \overline{R}(A, B) - LA \wedge LB,$$

$$R(A, B)\xi = -(\overline{\nabla}_A L) B + (\overline{\nabla}_B L) A + \\ + 2\langle L^{-}A, B\rangle L\xi - L^2 (A \wedge B)\xi, \quad A, B \in \mathfrak{X}(M).$$

По аналогии с геометрией подмногообразий назовем их *уравнениями Гаусса и Кодацци* гиперраспределения $\Delta$.

Доказательство. Непосредственные вычисления дают равенство

$$\overline{R}(A, B) C = R(A, B) C - (\overline{\nabla}_A h)(B, C) + (\overline{\nabla}_B h)(A, C) - \\ - h(A, h(B, C)) + h(B, h(A, C)) - h(T(A, B), C)$$

для любых $A, B, C \in \mathfrak{X}(M)$, где $T$ — тензор кручения для $\overline{\nabla}$. Отсюда получаем соотношения

$$VR(A, B) X = \overline{R}(A, B) X + h(A, h(B, X)) - \\ - h(B, h(A, X)),$$

$$\langle R(A, B) X, \xi\rangle \xi = (\overline{\nabla}_A h)(B, X) - (\overline{\nabla}_B h)(A, X) + \\ + h(T(A, B), X)$$

для любых $A, B \in \mathfrak{X}(M)$ и $X \in \Gamma(\Delta)$, поскольку $\overline{R}(A, B) X, h(A, h(B, X)) \in \Gamma(\Delta)$ и $h(A, X), (\overline{\nabla}_A h)(B, X) \in \Gamma(\Delta^{\perp})$. Первое из этих соотношений дает уравнение Гаусса, так как $\overline{R}(A, B)\xi = 0$ и $h(A, h(B, X)) = -\langle LB, X\rangle LA$, а второе — уравнение Кодацци в силу равенств $\langle R(A, B) X, \xi\rangle = -\langle R(A, B)\xi, X\rangle$, $\langle(\overline{\nabla}_A h)(B, X),$

$\xi\rangle = \langle(\overline{\nabla}_A L)\, B,\ X\rangle, \langle h(T(A,B), X), \xi\rangle = \langle LT(A,B), X\rangle$ и, наконец, $T(A, B) = L(A \wedge B)\xi - 2\langle L^- A, B\rangle\, \xi$ для любых $A$, $B \in \mathfrak{X}(M)$ и $X \in \Gamma(\Delta)$. Теорема доказана.

Назовем гиперраспределение $\Delta$ *нормальным*, если $\overline{\nabla} L = 0$ и $\Delta$ ортогонально единичному киллингову векторному полю $\xi$. Согласно теореме 1 уравнение Кодацци нормального гиперраспределения $\Delta$ имеет вид

$$R(A, B)\,\xi = -(l^-)^2 (A \wedge B)\,\xi. \qquad (4)$$

**4. Кривизна.** Тензором кривизны распределения $\Delta$ в [1] назван тензор кривизны $K$ связности $D$ в $\Delta$, которая для гиперраспределения $\Delta \perp \xi$ может быть задана так:

$$D_A X = \overline{\nabla}_A X + \langle A, \xi\rangle\, l^- X,\ A \in \mathfrak{X}(M),\ X \in \Gamma(\Delta). \qquad (5)$$

Продолжим $D$ на $TM$, полагая

$$D_A \xi = 0,\ A \in \mathfrak{X}(M). \qquad (6)$$

Определенную равенствами (5) и (6) связность $D$ на $M$ назовем *канонической связностью* гиперраспределения $\Delta$. Ее тензор кривизны равен

$$K(A, B)\, C = \bar{R}(A, B)\, C - 2\langle L^- A, B\rangle\, l^- C + (\overline{\nabla}_{(A\wedge B)\xi}\, l^-)\, C \qquad (7)$$

для любых $A$, $B$, $C \in \mathfrak{X}(M)$. Поэтому уравнение Гаусса гиперраспределения $\Delta$ принимает вид

$$V\circ R(A, B)\circ V = K(A, B) - D_{(A\wedge B\xi)} l^- - LA \wedge LB + 2\langle L^- A, B\rangle\, l^-,\ A,\ B \in \mathfrak{X}(M). \qquad (8)$$

В частности, для нормального гиперраспределения имеем

$$V\circ R(A, B)\circ V = K(A, B) - l^- A \wedge l^- B + 2\langle l^- A, B\rangle\, l^-,\ A,\ B \in \mathfrak{X}(M). \qquad (9)$$

Предложение 3. *Пусть $X$, $Y$, $Z$, $W \in \Gamma(\Delta)$. Тензор кривизны $K$ любого гиперраспределения $\Delta$ обладает свойствами*

$$\langle K(X, Y)\, Z, W\rangle = -\langle K(Y, X)\, Z, W\rangle = -\langle K(X, Y)\, W, Z\rangle. \qquad (10)$$

*Если $\Delta$ вполне геодезично, то*

$$\langle K(X, Y)\, Z, W\rangle = \langle K(Z, W)\, X, Y\rangle, \qquad (11)$$

$$K(X, Y)\, Z + K(Y, Z)\, X + K(Z, X)\, Y = 0. \qquad (12)$$

*Для нормального $\Delta$ имеем также*

$$(D_X K)(Y, Z, W) + (D_Y K)(Z, X, W) + \\ + (D_Z K)(X, Y, W) = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Из (8) следует

$$\langle K(X, Y) Z, W\rangle = \langle R(X, Y) Z, W\rangle + \\ + \langle (LX \wedge LY) Z, W\rangle - 2\langle l^- X, Y\rangle \langle l^- Z, W\rangle$$

для любых $X, Y, Z, W \in \Gamma(\Delta)$. Поэтому имеют место равенства (10)—(12) (здесь мы использовали также соответствующие свойства тензора кривизны $R$). Далее, из второго тождества Бьянки для $D$ (см. [3, с. 132]) получаем

$$\mathfrak{S}\{(D_X K)(Y, Z) - 2\langle l^- X, Y\rangle K(\xi, Z)\} = 0,$$

и для доказательства (13) достаточно показать, что $K(\xi, Z) W = 0$ для любых $Z, W \in \Gamma(\Delta)$. В силу (9) и (4) имеем $\langle K(\xi, Z) W, Y\rangle = \langle R(W, Y)\xi, Z\rangle = 0$ для любых $W, Y, Z \in \Gamma(\Delta)$, и потому $0 = VK(\xi, Z) W = K(\xi, Z) W$, $Z, W \in \Gamma(\Delta)$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Тензор кривизны нормального гиперраспределения $\Delta(a)$ постоянного кручения обладает также свойствами*

$$\langle K(l^- X, l^- Y) Z, W\rangle = \langle K(X, Y) l^- Z, l^- W\rangle = \\ = \langle l^- K(X, Y) Z, l^- W\rangle, X, Y, ZW \in \Gamma(\Delta(a)). \tag{14}$$

Доказательство. Так как $L^+ = 0$, $\bar{\nabla} L = 0$ и, следовательно, $\bar{\nabla} l^- = 0$, то $\bar{R}(X, Y) l^- Z = l^- \bar{R}(X, Y) Z$. Поэтому согласно (7) имеем также $K(X, Y) l^- Z = l^- K(X, Y) Z$ для любых $X, Y, Z \in \Gamma(\Delta(a))$. Остается использовать (10) и (11). Предложение доказано.

Как и в [1], через $K_{xy}$ и $k_x$ обозначим секционную и Риччи кривизны гиперраспределения $\Delta$. Из [1] следует

$$K_{xy} = R_{xy} + (3/4) t_{xy} + \\ + \{\langle l^+ x, x\rangle \langle l^+ y, y\rangle - \langle l^+ x, y\rangle^2\} \| x \wedge y \|^{-2} \tag{15}$$

для любой плоскости $x \wedge y \subset \Delta_p$, $p \in M$, где $R_{xy}$ — секционная кривизна риманова многообразия $M$. Отсюда получаем равенство

$$k_x = \rho_x - R_{\xi x} + (3/4) \varkappa_x + \\ + \{\langle l^+ x, x\rangle \operatorname{trace} l^+ - \langle (l^+)^2 x, x\rangle\} \| x \|^{-2} \tag{16}$$

для любого $x \in \Delta_p$, где $\rho_x$ — кривизна Риччи $M$.

**5. Контактные метрические многообразия.** Связное многообразие $M^{2n+1}$ называется *контактным метрическим* [4], если оно допускает такие тензорное поле $\varphi$ типа (1,1), векторное поле $\xi$, 1-форму $\eta$ и риманову метрику $\langle\ ,\ \rangle$, что

$$\eta(\xi) = 1, \langle \xi, \xi \rangle = 1, \tag{17}$$

$$\varphi^2 = -\mathrm{id} + \eta \otimes \xi, \tag{18}$$

$$d\eta(A, B) = \langle A, \varphi B \rangle, \ A, B \in \mathfrak{X}(M^{2n+1}). \tag{19}$$

Контактное метрическое многообразие $M^{2n+1}$ называется *K-контактным*, если $\xi$ — киллингово векторное поле, и называется *многообразием Сасаки* [4], если

$$(\nabla_A \varphi) B = \langle A, B \rangle \xi - \eta(B) A, \ A, B \in \mathfrak{X}(M^{2n+1}). \tag{20}$$

Гиперраспределение $\Delta \perp \xi$ на $M^{2n+1}$ называется *контактным распределением* [4].

ТЕОРЕМА 2. *Контактное распределение на произвольном контактном метрическом многообразии имеет постоянное кручение, равное 4. Контактное метрическое многообразие является K-контактным (соответственно многообразием Сасаки) тогда и только тогда, когда его контактное распределение является вполне геодезическим (соответственно нормальным).*

Доказательство. Из (17)—(19) следует

$$\varphi\xi = 0, \ \eta(A) = \langle A, \xi \rangle, \ A \in \mathfrak{X}(M^{2n+1}). \tag{21}$$

Поэтому, сравнивая условие (19) с равенством (2), получаем $\varphi = L^-$. Так как $\varphi\xi = 0$, то $L^-\xi = 0$, и, следовательно, $L\xi = 2L^-\xi = 0$. Таким образом, структурное тензорное поле $\varphi$ является отображением неголономности $l^-$ контактного распределения $\Delta$, и условие (18) вместе с (21) показывает, что $(l^-)^2 = -V$, где $V$ — ортогональный проектор на $\Delta$. В результате $\Delta = \Delta$ (4). Далее, поскольку $L^+\xi = (1/2) L\xi = 0$, то киллинговость $\xi$ равносильна вполне геодезичности $\Delta$ согласно предложению 1. Наконец, в случае киллингова $\xi$ имеем

$$(\overline{\nabla}_A \varphi) B = (\nabla_A \varphi) B - \langle A, B \rangle \xi + \eta(B) A. \tag{22}$$

Если теперь контактное метрическое многообразие является сасакиевым, то $\xi$ киллингово (см., например, [4]), и в силу (22) $\overline{\nabla}\varphi = 0$. Поэтому $L^+ = 0$, $0 = \overline{\nabla}\varphi = \overline{\nabla}L$ и контактное распределение $\Delta$ нормальное. Обратно, если

$\Delta$ нормальное, то $L^+ = 0$, $0 = \overline{\nabla} L = \overline{\nabla}\varphi$, и согласно (22) контактное метрическое многообразие является сасакиевым. Теорема доказана.

Согласно этой теореме и предложению 2 любое контактное метрическое многообразие обладает следующими свойствами:

$$l\circ\varphi + \varphi\circ l = 0,\ \mathrm{trace}\ l = 0,\ \overline{\nabla}_\xi\varphi = 0, \tag{23}$$

где $l$ — отображение Вейнгартена контактного распределения. В частности, любое контактное распределение минимально.

Нам понадобится также следующее

Предложение 5. *Секционная кривизна и кривизна Риччи контактного распределения $\Delta$ любого контактного метрического многообразия обладают следующими свойствами*:

$$K_{X\varphi X} = R_{X\varphi X} - \{\langle lX, X\rangle^2 + \langle lX, \varphi X\rangle^2\}\| X \|^{-4} + 3, \tag{24}$$

$$k_X = \rho_X + (1/2)(R_{\xi\varphi X} - R_{\xi X}) + 2, \qquad X \in \Gamma(\Delta). \tag{25}$$

Доказательство. Из (18), (19) и (21) имеем

$$\langle\varphi A, \varphi B\rangle = \langle VA, VB\rangle,\ A, B \in \mathfrak{X}\,(M^{2n+1}). \tag{26}$$

Первое свойство следует теперь из (15), поскольку $\langle l\varphi X, \varphi X\rangle = -\langle\varphi l X, \varphi X\rangle = -\langle lX, X\rangle$ в силу (23) и (26), $\| X \wedge \varphi X \| = \| X \|^2$ и $t_{X\varphi X} = 4$ для любого $X \in \Gamma(\Delta)$. Далее, формула (16) принимает вид

$$k_X = \rho_X - R_{\xi X} - \langle l^2X, X\rangle \| X \|^{-2} + 3,\ X \in \Gamma(\Delta), \tag{27}$$

так как $\mathrm{trace}\ l = 0$ и $\varkappa_X = 4$ для любого $X \in \Gamma(\Delta)$. Из уравнения Кодацци контактного распределения $\Delta$ с помощью (23) получаем

$$R(X, \xi)\,\xi = (\overline{\nabla}_\xi l)\,X - l^2X + X,\ X \in \Gamma(\Delta).$$

Отсюда и из (23) следует

$$(1/2)(R_{\xi\varphi X} + R_{\xi X}) = -\langle l^2X, X\rangle \| X \|^{-2} + 1 \tag{28}$$

для любого $X \in \Gamma(\Delta)$. Второе искомое свойство следует теперь из (27). Предложение доказано.

**6. Контактные распределения постоянной $\varphi$-секционной кривизны.** Распространим теперь понятие постоянной $\varphi$-секционной или $\varphi$-голоморфной секционной кривизны контактного метрического многообразия (см. [5, 6]) на случай контактного распределения.

Если секционная кривизна контактного распределения $\Delta$ постоянная для всех инвариантных относительно $\varphi$ плоскостей $x \wedge y$ из $\Delta_p$ и для любой точки $p \in M^{2n+1}$, то $\Delta$ назовем *распределением постоянной $\varphi$-секционной кривизны* (всякая инвариантная относительно $\varphi$ плоскость имеет вид $x \wedge \varphi x$). *Распределением Эйнштейна* назовем такое, кривизна Риччи которого постоянна в каждой точке и не зависит от этой точки.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть контактное метрическое многообразие $M^{2n+1}$ имеет постоянную кривизну $c$. Тогда при $n > 1$ его контактное распределение $\Delta$ имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну, равную 4, и является распределением Эйнштейна с кривизной Риччи $2(n+1)$. Если же $n = 1$, то $\Delta$ имеет постоянную кривизну $2(c+1) \leqslant 4$.*

Доказательство. Ольшак [7] доказал, что если контактное метрическое многообразие $M^{2n+1}$ размерности $\geqslant 5$ имеет постоянную кривизну $c$, то $c = 1$, и это многообразие является сасакиевым. Поэтому, согласно предложению 5, при $n > 1$ имеем $K_{X\varphi X} = 4$ и $k_X = 2n + 2$ для любого $X \in \Gamma(\Delta)$. Пусть теперь $n = 1$. Тогда из (28) следует $\langle l^2 X, X\rangle \| X \|^{-2} = 1 - c$, $X \in \Gamma(\Delta)$. Следовательно, если $\mu$ — собственное значение аффинора $l$, то $\mu^2 = 1 - c \geqslant 0$, и из предложения 5 получаем $K_{X\varphi X} = 2(c+1) \leqslant 4$ для любого $X \in \Gamma(\Delta)$. Теорема доказана.

В общем случае имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $M^{2n+1}$ — многообразие Сасаки и $n > 1$. Если секционная кривизна $K_{x\varphi x}$ его контактного распределения $\Delta$ зависит лишь от точки $p \in M^{2n+1}$, то $\Delta$ имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну и его тензор кривизны имеет такое строение*:

$$K(X, Y) Z = (\lambda/4) \{X \wedge Y + \varphi X \wedge \varphi Y + 2 \langle X, \varphi Y\rangle \varphi\} Z \quad (29)$$

*для любых $X, Y, Z \in \Gamma(\Delta)$, где $\lambda$ есть $\varphi$-секционная кривизна.*

Доказательство. Пусть $\lambda(p)$ — значение $\varphi$-секционной кривизны контактного распределения $\Delta$ в точке $p$. Тензор $K$ удовлетворяет тождествам (10)—(12) и (14), где аффинор $l^{-} = \varphi$ действует в каждой плоскости $\Delta_p$ как оператор комплексной структуры, поскольку $\varphi^2 = -V$. Поэтому (см. [8, с. 156—158]) он имеет строение (29). Покажем, что функция $\lambda$ постоянна на $M^{2n+1}$. Из

(29) следует

$$4\,(D_W K)\,(X, Y, Z) = (W\lambda)\,\{X \wedge Y + \varphi X \wedge \varphi Y + \\ + 2\,\langle X, \varphi Y\rangle\,\varphi\}\,Z$$

для любых $X$, $Y$, $Z$, $W \in \Gamma(\Delta)$, поскольку $D\varphi = 0$ и $D\,\langle,\rangle = 0$. Беря циклическую сумму по $W$, $X$, $Y \in \Gamma(\Delta)$, отсюда с помощью (13) получаем

$$0 = \mathfrak{S}\,(W\lambda)\,\{X \wedge Y + \varphi X \wedge \varphi Y + 2\,\langle X, \varphi Y\rangle\,\varphi\}\,Z.$$

Выберем здесь следующие значения аргументов: $X$ ортогонален $Y$ и $\varphi Y$, тогда и $\varphi X$ оротогонален $Y$ и $\varphi Y$ в силу $\varphi^2 = -V$ (такой выбор возможен, так как $\dim \Delta \geqslant 4$), а $W = Z = \varphi X$. Тогда

$$4\,(Y\lambda)\,X - (X\lambda)\,Y + [(\varphi X)\,\lambda]\,\varphi Y = 0,$$

откуда $Z\lambda = 0$ для любого $Z \in \Gamma(\Delta)$ в силу линейной независимости $X$, $Y$ и $\varphi Y$. Следовательно, функция $\lambda$ постоянна вдоль каждой интегральной кривой контактного распределения $\Delta$. А так как $\Delta$ неинтегрируемое и $M^{2n+1}$ связное, то любые две точки этого многообразия можно соединить кусочно-гладкой интегральной кривой этого распределения (см. [9]). Поэтому функция $\lambda$ постоянна на $M^{2n+1}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если контактное распределение $\Delta$ многообразия Сасаки $M^{2n+1}$ имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну $\lambda$, то оно является распределением Эйнштейна с кривизной Риччи* $(1/2)\,(n + 1)\,\lambda$.

В самом деле, по теореме 4 строение тензора кривизны рассматриваемого распределения имеет вид (29) (оно получено без условия $n > 1$). Теперь остается использовать определение кривизны Риччи распределения.

Следствие 2. *Если контактное распределение $\Delta$ многообразия Сасаки имеет нулевую $\varphi$-секционную кривизну, то оно является распределением нулевой кривизны.*

Доказательство также следует из (29).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть контактное распределение $\Delta$ многообразия Сасаки $M^{2n+1}$ имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну $\lambda$ и $n > 1$. Тогда для его кривизны $K_{xy}$ в любом двумерном направлении из $\Delta_p$ и в любой точке $p \in M^{2n+1}$ выполняются неравенства $\lambda/4 \leqslant K \leqslant \lambda$ при $\lambda > 0$ и $\lambda \leqslant K \leqslant \lambda/4$ при $\lambda \leqslant 0$. При этом верхний (соответственно нижний) предел в первом случае и нижний (соответственно верхний) предел во втором случае достигаются вдоль* *любой инвариантной (соответственно антиинвариантной) относительно* $\varphi$ *плоскости.*

Антиинвариантной относительно $\varphi$ плоскостью здесь названа такая $x \wedge z$, что $z$ ортогонален $x$ и $\varphi x$.

Доказательство. Из (29) любых $x, y \in \Delta_p$ имеем

$$\langle K(x, y) y, x\rangle = (\lambda/4) \{ \| x \wedge y \|^2 + 3 \langle \varphi x, y\rangle^2\}. \quad (30)$$

Рассмотрим плоскости $x \wedge \varphi x, x \wedge z \subset \Delta_p$, инвариантную и антиинвариантную относительно $\varphi$. Пусть $y \in (z \wedge \varphi x)$ и $\beta$ — угол между $y$ и $\varphi x$. Тогда из (30) получаем

$$K_{xy} = (\lambda/4) (1 + 3 \cos^2 \beta),$$

откуда и следуют утверждения теоремы.

По аналогии с римановой геометрией вводим понятие $\delta$-*ограниченности кривизны распределения.*

ТЕОРЕМА 6. *Контактное распределение* $\Delta$ *многообразия Сасаки* $M^{2n+1}$, *где* $n > 1$, *обладающее постоянной* $\varphi$-*секционной кривизной* $\lambda$, *имеет* 1/4-*ограниченную кривизну при* $\lambda \neq 0$ *и является распределением нулевой кривизны в случае* $\lambda = 0$. *Если же* $n = 1$, *то такое распределение имеет постоянную кривизну* $\lambda$.

Первое утверждение получаем из теоремы 5 (см. также следствие 2); второе очевидно.

Замечание 1. Согласно предложению 5 $\varphi$-секционные кривизны $K$-контактного многообразия (в частности, многообразия Сасаки) $M^{2n+1}$ и контактного распределения $\Delta$ на $M^{2n+1}$ связаны так:

$$K_{X\varphi X} = R_{X\varphi X} + 3, \quad X \in \Gamma(\Delta).$$

Поэтому $K$-контактное многообразие имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну $H$ тогда и только тогда, когда его контактное распределение имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну $\lambda = H + 3$. Танно [6] показал, что всякое полное односвязное многообразие Сасаки $M^{2n+1}$ постоянной $\varphi$-секционной кривизны $H$ изоморфно (т. е. изометрично с сохранением структурных тензоров) многообразию Сасаки $S^{2n+1}[H]$, $E^{2n+1}[-3]$ или $(E, CD^n)[H]$ в зависимости от того, будет ли $H > -3$, $H = -3$ или $H < -3$. В терминах $\varphi$-секционной кривизны $\lambda = H + 3$ контактного распределения классификация Танно имеет более естественный с аналитической точки зрения вид: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть выполнены условия теоремы 4, где $\lambda = H + 3$. Равенство (29) и уравнение Гаусса (9) рассматриваемого распределения $\Delta$ (где $l^{-} = \varphi$) позволяют вычислить значение $VR(VA, VB)VC$ тензора кривизны рассматриваемого многообразия Сасаки $M^{2n+1}$. Но

$$R(A, B)C = VR(VA, VB)VC + \langle A, \xi\rangle VR(\xi, B)C + \\ + \langle B, \xi\rangle VR(A, \xi)C + \langle C, \xi\rangle R(VA, VB)\xi - \\ - \langle R(A, B)\xi, C\rangle \xi$$

для любых $A, B, C \in \mathfrak{X}(M^{2n+1})$. Поэтому найденное значение $VR(VA, VB)VC$ и уравнение Кодацци распределения $\Delta$, имеющее вид $R(A, B)\xi = (A \wedge B)\xi$ в силу (4) и $(l^{-})^2 = \varphi^2 = -V$, дают возможность получить следующее хорошо известное из [5] строение тензора кривизны многообразия Сасаки постоянной $\varphi$-секционной кривизны $H$:

$$4R(A, B)C = (H+3)(A \wedge B)C + \\ + (H-1)\{\langle C, \xi\rangle (B \wedge A)\xi + \\ + \langle (A \wedge B)\xi, C\rangle \xi + [\varphi A \wedge \varphi B + 2\langle A, \varphi B\rangle \varphi]C\}.$$

З а м е ч а н и е 3. Рассмотрим контактное метрическое многообразие $M^{2n+1}$ с регулярным структурным векторным полем $\xi$. Тогда определены фактор-пространство $B^{2n} = M^{2n+1}/\xi$ и каноническая субмерсия $\pi: M^{2n+1} \to B^{2n}$ (см. [10]). Если $M^{2n+1}$ есть $K$-контактное многообразие, то его риманова метрика $\langle,\rangle$ является проектируемой при отображении $\pi$ и порождает на $B^{2n}$ некоторую риманову метрику $g$. Горизонтальным распределением полученной римановой субмерсии $\pi: M^{2n+1} \to B^{2n}$ является контактное распределение $\Delta$ на $M^{2n+1}$. В случае $K$-контактного многообразия $M^{2n+1}$ проектируемым при отображении $\pi$ является и структурное тензорное поле $\varphi$. На $B^{2n}$ мы имеем почти комплексную структуру $I = \pi_*(\varphi|_\Delta)$, так как $\varphi^2 = -V$. В результате на $B^{2n}$ получаем почти эрмитову структуру $(I, g)$, так как $\langle \varphi X, \varphi Y\rangle = \langle X, Y\rangle$ для любых $X, Y \in \Gamma(\Delta)$ согласно (26). Она является кэлеровой, если $M^{2n+1}$ — многообразие Сасаки (в этом случае $\pi$ называют сасакиевой субмерисей). Далее, в [1] показано, что кривизна горизонтального распределения любой римановой субмерсии $\pi: M \to B$ соответствует при отображении $\pi$ кривизне риманова многообразия $B$. Поэтому для заданной сасакиевой субмерсии $\pi: M^{2n+1} \to B^{2n}$ контактное распределение $\Delta$ многообразия Сасаки $M^{2n+1}$ имеет постоянную $\varphi$-секционную кривизну тогда и только тогда, когда кэлерово многообразие $B^{2n}$ имеет ту же постоянную голоморфную секционную кривизну. Вот почему теоремы 4—6 напоминают соответствующие результаты о кэлеровых многообразиях постоянной голоморфной секционной кривизны. По этой же причине контактное распределение многообразия Сасаки можно назвать неголономным аналогом кэлерова многообразия точно так же, как само многообразие Сасаки называют его нечетномерным аналогом.

Томский политехнический институт им. С. М. Кирова

Поступило 26.04.84

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Соловьев А. Ф. Кривизна распределения.— Математические заметки, 1984, т. 35, вып. 1, с. 111—124.

[2] Соловьев А. Ф. Вторая фундаментальная форма распределения.— Математические заметки, 1982, т. 31, вып. 1, с. 139—146.

[3] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. I.— М.: Наука, 1981.

[4] Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry.— Lecture Notes in Math., 509. Berlin — Heidelberg.— N. Y.: Springer, 1976.

[5] Ogiue K, On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility.— Kōdai Math. Sem. Rep., 1964, v. 16, № 4, p. 223—232.

[6] Tanno S. Sasakian manifolds with constant $\varphi$-holomorphic sectional curvature.— Tôhoku Math. J., 1969, v. 21, № 3, p. 501—507.

[7] Olszak Z. On contact metric manifolds.— Tôhoku Math. J., 1979, v. 31, № 2, p. 247—253.

[8] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. II.— М.: Наука, 1981.

[9] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией.— Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ-мат., 1938, т. 3, № 2, с. 83—94.

[10] Boothby S. I., Wang H. C. On contact manifolds.— Ann. Math., 1958, v. 68, № 3, p. 721—734.