A. Ya. Kazakov, On condition of a “breakdown” in the singularly perturbed systems, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 203, 83–91

А.Я.Казаков

ЯВЛЕНИЯ СРЫВА В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ

I. Многие прикладные задачи физики и математики сводятся к исследованию решений сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=G(x,y,\varepsilon),\qquad \frac{dx}{dt}=F(x,y,\varepsilon),\quad y\in R^m,\ x\in R^n,\ 0<\varepsilon\ll 1. \tag{I}$$

При этом на практике функции $G(x,y,\varepsilon)$, $F(x,y,\varepsilon)$ могут быть достаточно произвольными. Построение решений системы (I) в общей ситуации сводится к следующей процедуре, см., например, [I, 2]. Пусть $y=\chi_p(x)$, $1\leqslant p\leqslant P$, – решение системы уравнений

$$G(x,y,0)=0. \tag{2}$$

Если гиперповерхность $y=\chi_p(x)$ при $x\in D_p\subset R^n$ удовлетворяет условию асимптотической устойчивости (далее будем говорить $\chi_p(x)$ устойчива), а именно, матрица

$$\left\{\frac{\partial G_r}{\partial y_s}\right\}\Bigg|_{y=\chi_p(x)},\quad 1\leqslant r,s\leqslant m,$$

имеет только отрицательные собственные значения, то для построения ведущего члена асимптотики решений в окрестности гиперповерхности достаточно взять решение уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F(x,\chi_p(x),0),\qquad y=\chi_p(x). \tag{3}$$

Затем, с помощью стандартных методов теории возмущений выписываются дальнейшие члены асимптотического по ε разложения решений. При этом решения ведут себя следующим образом (с точностью до уточнений, которые будут даны ниже). Независимо от начальных данных решение асимптотически быстро попадает в асимптотически малую окрестность одной из устойчивых ветвей $\chi_p(x)$ и далее его поведение в главном определяется редуцированной системой (3). Для исследования поведения решения во всем фазовом пространстве

(x, y) надо изучить его динамику вблизи точек А, где нарушается условие асимптотической устойчивости ветвей $y = \chi_p(x)$ и точек Б квазипересечения, т.е. точек пересечения гиперповерхностей $y = \chi_p(x)$ для разных p. При прохождении окрестности таких точек решение системы может "сорваться", покинуть окрестность устойчивой гиперповерхности и попасть затем в окрестность другой устойчивой гиперповерхности. При надлежащем расположении устойчивых гиперповерхностей могут возникать релаксационные колебания [2]. В работах [I-3] подробно обсуждались ситуации, связанные с наличием точек типа А и выписывались асимптотики физически интересных величин, таких, как время прохождения окрестности особой точки. При этом предполагалось, что размеры области, где нарушается условие устойчивости, порядка O(I). Здесь мы будем обсуждать ситуации, связанные с наличием точек типа Б. Вообще говоря, легко можно увидеть, что в окрестности точек квазипересечения условие устойчивости также нарушается, однако, размеры области, в которой это происходит, асимптотически малы. При этом для решений, первоначально находившихся в малой окрестности устойчивой гиперповерхности, возникает

Альтернатива А. В зависимости от значений параметров, возможен либо "срыв" решения и уход его в окрестность другой устойчивой гиперповерхности (кривой), либо решение может остаться в окрестности исходной устойчивой гиперповерхности после прохождения особой точки.

Для таких ситуаций с точки зрения приложений представляет интерес вывод критерия срыва, а также вычисление времени прохождения окрестности особой точки.

В п.2 мы обсудим одну модельную задачу и получим для нее критерий срыва. В п.3 мы рассмотрим этот круг задач с точки зрения теории бифуркаций и опишем специфические особенности связанных с ними задач классификации.

2. Вообще говоря, точка квазипересечения может находиться вблизи точки равновесия системы (I). Здесь мы рассмотрим модельную задачу при $m = n = 1$ в предположении, что точка квазипересечения находится на расстоянии порядка O(I) от точки равновесия:

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = x^{2k} - y^2 - b\varepsilon^{\mu}, \qquad \frac{dx}{dt} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, b = O(1), \tag{4}$$

Мотивировка такого выбора модельной задачи будет дана ниже, в п.3. В данном случае устойчивая кривая имеет вид:

$$y = +\left(x^{2k} - b\varepsilon^{\mu}\right)^{1/2}. \tag{5}$$

При $b > 0$ кривая (5) распадается на две части: левую, при $x < -(b\varepsilon^{\mu})^{1/2k}$, и правую, при $x > (b\varepsilon^{\mu})^{1/2k}$. Если исходное состояние системы было в окрестности левой части устойчивой ветви, то после прохождения окрестности точки $x = 0$ есть две возможности:

I) система может покинуть окрестность кривой (5), т.е. "сорваться";

2) система может перескочить в окрестность правой части кривой (5).

Выбор реализующегося сценария зависит от значения параметров b, μ, k. Таким образом, возникает задача - написать критерий срыва в этих терминах.

Подстановка

$$y = +\varepsilon \frac{d(\ln u)}{dx}, \quad u = u(x), \tag{6}$$

и преобразование масштаба $x = z\varepsilon^{1/(k+1)}$ приводит первое уравнение (4) (уравнение Риккати) к виду

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \left(z^{2k} - c\right)u, \quad c = b\varepsilon^{\mu - 2k/(k+1)}, \tag{7}$$

Введем функцию $L(z,c)$, решение уравнения (7) с фиксированным поведением при $z \Rightarrow -\infty$:

$$L(z,c) \sim |z|^{-k/2} \exp\left\{-\frac{|z|^{k+1}}{k+1}\right\}. \tag{8}$$

С помощью функции $L(z,c)$ строится ведущий член асимптотики решения системы (4), исходное состояние которого - в окрестности левой части кривой (5). В самом деле, подставляя (8) в (6), получаем:

$$y \sim 1 + |x|^k \qquad \text{при} \quad x \Rightarrow -\infty,$$

что согласуется с (5). Если функция $L(z,c)$ не имеет нулей при $z \in R$, то с помощью этой функции можно построить решение системы (4), "перескакивающее" на правую часть кривой (4): $L(z,c)$ везде больше нуля и

$$L(z,c) \sim \varkappa |z|^{-k/2} \exp\left\{+\frac{|z|^{k+1}}{k+1}\right\} \quad \text{при } z \Rightarrow \infty, \ \varkappa > 0,$$

т.е., как опять-таки следует из (6), решение после прохождения окрестности точки $x = 0$ находится в окрестности правой части кривой (4). Если же функция $L(z,c)$ имеет нули при $z \in R$, то, как следует из (6), при подходе по оси z слева к самому левому нулю $L(z,c)$ функция $y_0(x)$ принимает сколь угодно большие по модулю отрицательные значения, что естественно трактовать как "срыв" решения. Таким образом, условие срыва связано с наличием нулей на вещественной оси у функции $L(z,c)$.

Используя несложные соображения, можно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $C(k)$ - наименьшее собственное значение задачи:

$$T(z) \in L_2(R), \quad \left\{-\frac{d^2}{dz^2} + z^{2k}\right\} T = \lambda T.$$

Тогда при $c < C(k)$ функция $L(z,c)$ не имеет нулей при $z \in R$, а при $c > C(k)$ имеет по крайней мере один нуль. При $k = I$ уравнение (8) совпадает с уравнением параболического цилиндра. Таким образом, $C(1) = I$. С помощью ЭВМ можно вычислить значения $C(k)$ и при других k. Например, $C(2) \approx 1.06$.

Мы получили следующий критерий срыва. Решение системы (4), находившееся сначала в малой окрестности кривой (5), после прохождения $x = 0$ покинет ее, если

$$\mu < \frac{2k}{k+1}, \quad \text{или } \mu = \frac{2k}{k+1}, \ c > C(k).$$

Решение системы (4) останется в малой окрестности кривой (4) после прохождения точки $x = 0$, если

$$\mu > \frac{2k}{k+1}, \quad \text{или } \mu = \frac{2k}{k+1}, \ c < C(k).$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, мы находим критерий срыва в терминах параметра $q = b\varepsilon^{\mu}$. Таким образом, значение малого параметра q определяет глобальное поведение решения, образно выражаясь, этот параметр определяет, "открыт или закрыт люк", в который может "сорваться" решение.

3. Возникает естественная задача: описать возможные асимптотические ситуации, связанные с наличием точек типа Б, т.е. описать типы точек Б при $m, n \geqslant 1$, различные с асимптотической точки зрения. Общий подход к классификации особенностей содержится в [5-7]. Он включает в себя следующие этапы:

а) описание списка бифуркаций (ростков катастроф) для данного типа задач;

б) построение для каждой бифуркации соответствующего семейства версальных деформаций (функций катастроф).

Специфика рассматриваемых здесь задач приводит к некоторым особенностям этих задач классификации. Рассмотрим сначала задачу а). Список бифуркаций - это список ростков (отрезков ряда Тейлора отображения в окрестности особой точки), описывающих особенность отображения, к которым может быть допустимым преобразованием приведено произвольное отображение, имеющее особенность в заданной точке. При этом важное значение имеет априорная информация о группе допустимых преобразований - например, о наличии симметрий. В нашем случае исходные переменные x и y не равноправны: переменные y - быстрые, а переменные x - медленные, употребляя стандартные асимптотические термины. При этом допустимыми преобразованиями $(x, y) \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ являются такие гладкие преобразования, которые не переводят медленные переменные в быстрые, не меняют тип медленных переменных. Если

$$\bar{x} = A(x, y),$$

$$\bar{y} = B(x, y),$$

то это условие означает, что

$$\left.\frac{\partial A_s}{\partial y_r}\right|_{x=y=0} = 0 \qquad \text{при } 1 \leqslant s \leqslant n, \ 1 \leqslant r \leqslant m. \tag{9}$$

Далее, для каждого ростка катастрофы надо построить семейство версальных деформаций. Это семейство возникает при описании возмущений катастрофы данного типа. Для любого такого возмущения существует допустимое преобразование, приводящее его к каноническому виду, зависящему от конечного набора параметров [5-6]. Для данного класса задач параметры версальных деформаций следует представлять с помощью естественного масштаба ε. Обычно семейство версальных деформаций для данного ростка бифуркации $Q(x, y)$

имеет вид:

$$Z(x,y) = Q(x,y) + \sum_{s,r} a_{sr} x^s y^r.$$

В данной ситуации функцию катастрофы естественно представлять в виде:

$$Z(x,y) = Q(x,y) + \varepsilon^{\varkappa} \sum_{s,r} a_{sr} \varepsilon^{p_{sr}} x^s y^r. \qquad (10)$$

где члены $\varepsilon^{p_{sr}} x^s y^r$ приводят к одному и тому же по параметру малости ε возмущению решения.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В функцию (10) достаточно включать только те мономы, которые влияют на ведущий член асимптотики решения. Параметры p_{sr} вычисляются после построения асимптотик решения системы (I) при $a_{sr} = 0$ Параметры $\varkappa$ и $a_{sr} = O(1)$ являются для данных задач естественными параметрами версального семейства. Семейство функций (10) можно называть асимптотическим версальным семейством деформаций.

Рассмотрим с этой точки зрения задачу, описанную в п.I. Мы обсудим здесь несколько интересных ростков катастроф, связанных с пересечением гиперповерхностей $y = \xi_p(x,y)$. При этом мы *a priori* предполагаем, что пересекаются две ветви. Рассмотрим сначала случай $n = m = 1$. Как уже упоминалось выше, поведение решения системы (I) и, соответственно, классификация особенностей пары вектор-функций $F(x,y)$; $G(x,y)$, зависит от того, находится ли точка бифуркации вблизи точки равновесия системы (I). Мы будем полагать, что функция $F(x,y)$ не имеет особенностей при $x = y = 0$, т.е. находится в общем положении. С учетом замечания I мы можем ограничиться рассмотрением ростка

$$F(x,y) = 1. \qquad (11)$$

Простейшая при $m = n = 1$ бифуркация, соответствующая пересечению двух кривых, есть

$$Q(x,y) = x^2 - y^2. \qquad (12)$$

Росток (11) является асимптотически версально устойчивым, т.е. его возмущение не приводит (с учетом замечания I) к искажению его формы. Далее, версальная деформация ростка (I2) с помощью допустимых преобразований может быть сведена к виду:

$$Z(x, y) = Q(x, y) + b\varepsilon^{\mu}.$$

Таким образом, мы пришли к функциям, определяющим вид модельной задачи (4) (при $k = I$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Работы [I-3], с излагаемой здесь точки зрения, посвящены изучению катастрофы с ростками

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= x^2 - y. \\ F(x, y) &= 1. \end{aligned} \tag{I3}$$

Эта катастрофа является устойчивой, т.е. ее возмущения могут быть приведены с помощью допустимых преобразований к виду (I3). Она описывает переход устойчивой кривой в неустойчивую (потерю устойчивости) и не связана с пересечением кривых $\chi_p(x)$. В работе [4] изучалась асимптотика решения системы (4) при $b = 0$, $k = I$.

Итак, при $m = n = I$ простейшая бифуркация, описывающая пересечение устойчивых кривых, приводит к альтернативе А. Аналогичным свойством обладают и бифуркации при других значениях m, n . Например, при $m = I,\ n = 2$ ростки

$$Q(x_1, x_2, y) = x_1^2 - y^2, \tag{I4}$$

$$Q(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 - y^2. \tag{I5}$$

приводят к подобным явлениям; относительно $F(x_1, x_2, y)$ мы предполагаем, что она - в общем положении. Если рассматривать ситуации, когда точка квазипересечения находится вблизи точки равновесия системы, то дополнительную сложность вносит учет требования (9); оно приводит к появлению модальных ростков [5-7] в нижних размерностях. Как следует из результатов работ [2, 8], при $m \geqslant 2$ могут возникать дополнительные сложности при выводе условия срыва.

Системы уравнений (I), для которых существуют точки квазипересечения и, тем самым, для которых возможна альтернатива А, обладают интересным с точки зрения приложений свойством: глобальное поведение решений этих систем зависит от значений малых параметров, которые определяют, "открыт" ли соответствующий "люк" или "закрыт". Эти малые параметры управляют переходом системы от динамики, подчиняющейся (в старшем порядке) системе (3) при некотором p к системе (3) с другим p. При этом, как показывают примеры (I4) и (I5), области, где происходят такие переходы, могут иметь существенно различную геометрию. Далее, можно рассмотреть подобные задачи при наличии шума (так иили иначе введенного) и попытаться вывести соответствующий критерий срыва (в терминах функции плотности). Например, введем в (4) (при $k = 1$) шумы в соответствии с уравнениями

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - b\varepsilon^{\mu} + \sigma, \quad \langle \sigma \rangle = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} = 1,$$

и положим, что шумы σ – гауссовы с дисперсией $p\varepsilon^{\beta}$. Напишем (с формальных позиций) соответствующее уравнение Фоккера-Планка для функции плотности $f(x, y, t, \varepsilon)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{x^2+y^2-b\varepsilon^{\mu}}{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} + p\varepsilon^{\beta-2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Для вывода критерия срыва надо построить ведущий член асимптотического разложения решения, для которого начальное состояние – δ-функция, сосредоточенная в точке, лежащей на левой части устойчивой кривой (5). Если $b < 0$, то явление срыва в данной ситуации можно трактовать как "просачивание" под воздействием шума через точку квазипересечения (без шума для таких b срыва не происходит).

Литература

1. Понтрягин Л.С. Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Изв.АН СССР, сер.матем., 1957, т.21, № 5, с.605-626.
2. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром. Тр.Мат.ин-та им.Стеклова АН СССР, 1985, т.169, с.99-118.
3. Nipp K. Breakdown of stability in singularly perturbed autonomous systems. I Orbit equations. SIAM J.Math.Anal., 1986, 17, N 5, p.512-532.

4. L e b o v i t z N.R., S h a a r R.J. Exchange of stabilities in autonomous systems. Stud.Appl.Math., 1975, v.54, N 3, p.229-260.
5. А р н о л ь д В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.
6. А р н о л ь д В.И., В а р ч е н к о А.Н., Г у с е й н-З а д е С.М. Особенности дифференцируемых отображений, т.I, М., 1982.
7. Г и л м о р Р.М. Прикладная теория катастроф, т.I, М., 1984.
8. Ш и ш к о в а М.А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Докл.АН СССР, 1973, т.209, № 3, с.576-579.

A.Ya.Kazakov. On condition of a "breakdown" in the singularly perturbed systems.

A behavior of the singularly perturbed systems near the points of quasy-crossing is under consideration. The criterion of "breakdown" is determined for the model situation. The corresponding bifurcation theory problems are discussed.

A.S.Blagovestchensky. The inverse axial simmetric Lamb's problem.

The problem is reduced to the nonlinear "integral" equation which like to Volterra equation. The theorems of uniqueness and of existens in small are proved.